

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Les vecteurs</b>	<b>6</b>
1.1	Conventions d'écriture . . . . .	6
1.1.1	Notation des vecteurs et de leurs composantes . . . . .	6
1.1.2	Convention de sommation . . . . .	6
1.1.3	Sommation sur plusieurs indices . . . . .	7
1.1.4	Symbole de Kronecker . . . . .	8
1.1.5	Symbole d'antisymétrie . . . . .	8
1.2	Généralisation de la notion de vecteur . . . . .	9
1.2.1	Exemple de vecteurs . . . . .	9
1.2.2	Propriétés des opérations sur les vecteurs . . . . .	10
1.2.3	Autres exemples de vecteurs . . . . .	11
1.2.4	Définition générale des vecteurs . . . . .	12
1.2.5	Structure d'un ensemble . . . . .	12
1.3	Bases d'un espace vectoriel . . . . .	13
1.3.1	Exemples de vecteurs indépendants et dépendants . . . . .	13
1.3.2	Vecteurs de base . . . . .	14
1.3.3	Décomposition d'un vecteur sur une base . . . . .	14
1.3.4	Changement de base . . . . .	15
1.4	Produit scalaire . . . . .	16
1.4.1	Exemple de produits scalaires . . . . .	16
1.4.2	Définition du produit scalaire . . . . .	17
1.4.3	Expression générale du produit scalaire . . . . .	17
1.4.4	Vecteurs orthogonaux . . . . .	18
1.4.5	Bases orthogonales d'un espace vectoriel pré-euclidien . . . . .	18
1.4.6	Norme d'un vecteur . . . . .	19
1.5	Espace vectoriel euclidien . . . . .	21
1.5.1	Définitions . . . . .	21
1.5.2	Bases orthonormées . . . . .	21
1.5.3	Composantes contravariantes et covariantes . . . . .	22
1.5.4	Expression du produit scalaire et de la norme . . . . .	24
1.5.5	Changement de base . . . . .	24
1.5.6	Bases réciproques . . . . .	25
1.5.7	Décomposition d'un vecteur sur les bases réciproques . . . . .	26
1.5.8	Produits scalaires des vecteurs de base . . . . .	27
1.6	Exercices résolus . . . . .	28

<b>2</b>	<b>Exemples de tenseurs euclidiens</b>	<b>38</b>
2.1	Changement de base . . . . .	38
2.1.1	Composantes covariantes du tenseur fondamental . . . . .	38
2.1.2	Produit tensoriel de deux vecteurs . . . . .	40
2.2	Propriétés de changement de base . . . . .	42
2.2.1	Tenseur d'ordre deux . . . . .	42
2.2.2	Combinaisons linéaires de tenseurs . . . . .	43
2.2.3	Tenseur d'ordre trois . . . . .	44
2.3	Exemples de tenseurs en Physique . . . . .	45
2.3.1	Tenseur d'inertie . . . . .	45
2.3.2	Tenseur vitesse de rotation instantanée d'un solide . . . . .	47
2.3.3	Tenseurs des propriétés des milieux anisotropes . . . . .	49
2.4	Exercices résolus . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Algèbre tensorielle</b>	<b>59</b>
3.1	Tenseur d'ordre deux . . . . .	59
3.1.1	Introduction . . . . .	59
3.1.2	Exemple de tenseur : produit tensoriel de triplets de nombres . . . . .	59
3.1.3	Propriétés du produit tensoriel . . . . .	61
3.1.4	Définition du produit tensoriel de deux espaces vectoriels . . . . .	62
3.1.5	Expression analytique du produit tensoriel de deux vecteurs . . . . .	63
3.1.6	Éléments d'un espace produit tensoriel . . . . .	64
3.1.7	Produit tensoriel de deux espaces vectoriels identiques . . . . .	65
3.2	Tenseurs d'ordre quelconque . . . . .	66
3.2.1	Produit tensoriel de plusieurs vecteurs . . . . .	66
3.2.2	Produit tensoriel d'espaces identiques . . . . .	67
3.2.3	Classification des tenseurs . . . . .	68
3.3	Produit scalaire . . . . .	68
3.3.1	Produit scalaire d'un produit tensoriel par un vecteur de base . . . . .	68
3.3.2	Produit scalaire d'un tenseur par un vecteur de base . . . . .	69
3.3.3	Produit scalaire de deux tenseurs de même ordre . . . . .	70
3.3.4	Composantes d'un tenseur pré-euclidien . . . . .	70
3.3.5	Expression du produit scalaire . . . . .	71
3.3.6	Tenseurs euclidiens d'ordre quelconque . . . . .	71
3.4	Bases d'un espace produit tensoriel . . . . .	72
3.4.1	Bases réciproques . . . . .	72
3.4.2	Composantes des tenseurs pré-euclidiens . . . . .	73
3.4.3	Tenseurs d'ordre quelconque . . . . .	75
3.4.4	Changement de base . . . . .	76
3.4.5	Critère de tensorialité . . . . .	78
3.5	Opérations sur les tenseurs . . . . .	79
3.5.1	Addition de tenseurs du même ordre . . . . .	79
3.5.2	Multiplication tensorielle . . . . .	79
3.5.3	Contraction des indices . . . . .	79
3.5.4	Multiplication contractée . . . . .	81
3.5.5	Critères de tensorialité . . . . .	82

3.6	Tenseurs particuliers . . . . .	84
3.6.1	Tenseur symétrique . . . . .	84
3.6.2	Quadrique représentative d'un tenseur symétrique . . . . .	84
3.6.3	Le tenseur fondamental . . . . .	86
3.6.4	Tenseur antisymétrique . . . . .	87
3.6.5	Produit extérieur de deux vecteurs . . . . .	88
3.7	Groupes ponctuels de symétrie . . . . .	89
3.7.1	Symétrie d'un cristal et de ses propriétés physiques . . . . .	89
3.7.2	Effet de la symétrie sur les tenseurs . . . . .	90
3.8	Exercices résolus . . . . .	91
<b>4</b>	<b>Espaces ponctuels</b> . . . . .	<b>105</b>
4.1	Espace ponctuel pré-euclidien . . . . .	105
4.1.1	Exemple d'espace ponctuel . . . . .	105
4.1.2	Définition d'un espace ponctuel . . . . .	106
4.1.3	Repères d'un espace ponctuel pré-euclidien . . . . .	107
4.1.4	Distance entre deux points . . . . .	108
4.1.5	Dérivée d'un vecteur . . . . .	108
4.1.6	Notation des dérivées . . . . .	110
4.2	Coordonnées curvilignes . . . . .	110
4.2.1	Systèmes de coordonnées . . . . .	110
4.2.2	Coordonnées rectilignes . . . . .	111
4.2.3	Coordonnées sphériques . . . . .	111
4.2.4	Coordonnées curvilignes . . . . .	112
4.3	Repère naturel . . . . .	112
4.3.1	Définitions . . . . .	112
4.3.2	Repère naturel en coordonnées sphériques . . . . .	113
4.3.3	Changement de coordonnées curvilignes . . . . .	114
4.3.4	Élément linéaire d'un espace ponctuel . . . . .	115
4.4	Exercices résolus . . . . .	116
<b>5</b>	<b>Analyse tensorielle</b> . . . . .	<b>129</b>
5.1	Symboles de Christoffel . . . . .	129
5.1.1	Tenseurs sur un espace ponctuel . . . . .	129
5.1.2	Problèmes fondamentaux de l'analyse tensorielle . . . . .	130
5.1.3	Symboles de Christoffel en coordonnées sphériques . . . . .	131
5.1.4	Définition des symboles de Christoffel . . . . .	132
5.1.5	Détermination des symboles de Christoffel . . . . .	133
5.1.6	Changement de base . . . . .	136
5.1.7	Vecteurs réciproques . . . . .	137
5.1.8	Équation des géodésiques . . . . .	137
5.2	Dérivée covariante . . . . .	139
5.2.1	Transport parallèle . . . . .	139
5.2.2	Dérivée covariante d'un vecteur . . . . .	141
5.2.3	Dérivée covariante d'un tenseur . . . . .	144
5.2.4	Propriétés de la dérivée covariante d'un tenseur . . . . .	145

5.2.5	Dérivée covariante seconde d'un vecteur . . . . .	146
5.3	Différentielle absolue . . . . .	146
5.3.1	Différentielle absolue d'un vecteur . . . . .	146
5.3.2	Dérivée absolue le long d'une courbe . . . . .	148
5.3.3	Différentielle absolue d'un tenseur . . . . .	149
5.3.4	Théorème de Ricci . . . . .	151
5.3.5	Symboles de Christoffel contractés . . . . .	151
5.4	Opérateurs différentiels . . . . .	152
5.4.1	Vecteur gradient . . . . .	152
5.4.2	Rotationnel d'un champ de vecteurs . . . . .	153
5.4.3	Divergence d'un champ de vecteurs . . . . .	154
5.4.4	Laplacien d'un champ de scalaires . . . . .	154
5.5	Exercices résolus . . . . .	155
<b>6</b>	<b>Espaces de Riemann</b> . . . . .	<b>164</b>
6.1	Exemples d'espace de Riemann . . . . .	164
6.1.1	Surfaces à deux dimensions . . . . .	164
6.1.2	Disque tournant . . . . .	165
6.1.3	Espace de configuration . . . . .	166
6.2	Métrique riemannienne . . . . .	167
6.2.1	Notion de variété . . . . .	167
6.2.2	Définition des espaces de Riemann . . . . .	168
6.2.3	Métrique euclidienne et riemannienne . . . . .	169
6.2.4	Conditions nécessaires pour qu'une métrique soit euclidienne . . . . .	169
6.3	Propriétés géométriques . . . . .	170
6.3.1	Métrique euclidienne tangente en un point . . . . .	170
6.3.2	Propriétés géométriques déduites des métriques euclidiennes tangentes . . . . .	173
6.4	Propriétés différentielles . . . . .	174
6.4.1	Métrique euclidienne osculatrice . . . . .	174
6.4.2	Espace euclidien osculateur . . . . .	175
6.4.3	Différentielle absolue et dérivée covariante des tenseurs . . . . .	176
6.4.4	Transport parallèle . . . . .	177
6.4.5	Géodésiques d'un espace de Riemann . . . . .	178
6.5	Déplacement le long d'une courbe . . . . .	179
6.5.1	Développement d'une courbe . . . . .	179
6.5.2	Déplacement associé à un cycle . . . . .	182
6.5.3	Expression du déplacement associé à un cycle . . . . .	185
6.6	Tenseur de Riemann-Christoffel . . . . .	189
6.6.1	Détermination du tenseur de Riemann-Christoffel . . . . .	189
6.6.2	Composantes covariantes . . . . .	190
6.6.3	Système de coordonnées normales . . . . .	191
6.6.4	Propriétés de symétrie . . . . .	191
6.6.5	Première identité de Bianchi . . . . .	192
6.6.6	Composantes indépendantes . . . . .	192
6.7	Courbure Riemannienne . . . . .	193

6.7.1	Le tenseur de rotation en fonction du tenseur de Riemann-Christoffel . . . . .	193
6.7.2	Courbure riemannienne . . . . .	194
6.7.3	Tenseur de Ricci et courbure scalaire . . . . .	196
6.7.4	Seconde identité de Bianchi . . . . .	196
6.7.5	Tenseur d'Einstein . . . . .	197
6.8	Exercices résolus . . . . .	198

# Chapitre 1

## Les vecteurs

### 1.1 Conventions d'écriture

#### 1.1.1 Notation des vecteurs et de leurs composantes

Les vecteurs et les tenseurs sont représentés par des lettres en caractère gras :  $\mathbf{x}$  représentera par exemple un vecteur. Les composantes des vecteurs et des tenseurs sont notées par des lettres *en italique* avec des indices. Par exemple, un vecteur  $\mathbf{x}$  de la géométrie classique, rapporté à une base  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , s'écrira :

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 \quad (1.1.1)$$

Nous utiliserons également par la suite pour les composantes, des indices inférieurs (voir composantes covariantes et contravariantes).

#### 1.1.2 Convention de sommation

Lorsqu'on effectue la somme de certaines quantités, on utilise couramment la lettre grecque *sigma* majuscule pour représenter cette sommation. On a par exemple :

$$x^1 y^1 + x^2 y^2 + \dots + x^n y^n = \sum_{i=1}^n x^i y^i \quad (1.1.2)$$

La convention de sommation d'Einstein va consister à utiliser le fait que l'indice répété, ici l'indice  $i$ , va définir lui-même l'indication de la sommation. On écrit alors avec cette convention :

$$\sum_{i=1}^n x^i y^i = x^i y^i \quad (1.1.3)$$

La variation de l'indice se fera sur tout le domaine possible, en général de 1 à  $n$ , sauf indication contraire. L'indice répété peut être affecté à des lettres différentes, ou à une même lettre comme dans l'exemple suivant :

$$A_{ii} x_j = A_{11} x_j + A_{22} x_j + \dots + A_{nn} x_j \quad (1.1.4)$$

Les indices peuvent être simultanément inférieurs ou supérieurs, ou l'un peut être inférieur et l'autre supérieur. Par exemple, l'expression  $A^i_k y_i$  pour  $n = 4$  :

$$A^i_k y_i = A^1_k y_1 + A^2_k y_2 + A^3_k y_3 + A^4_k y_4 \quad (1.1.5)$$

On remarque que l'expression  $A^i_k y_i$  comporte deux sortes d'indices. L'indice de sommation  $i$  qui varie de 1 à 4 (de 1 à  $n$  en général) peut être remplacé par une lettre quelconque, par exemple  $A^m_k y_m$  ou  $A^r_k y_r$ . Ces expressions représentent exactement la même quantité :

$$A^j_k y_j = A^m_k y_m = A^r_k y_r \quad (1.1.6)$$

Cet indice qui peut être noté indifféremment, s'appelle *indice muet*.

Par contre, l'indice  $k$  qui spécifie un terme particulier est appelé *indice libre*. Si aucune indication contraire n'est donnée, tout indice libre prendra, de manière implicite, les mêmes valeurs que l'indice muet. Ainsi, l'expression  $a_{ij} x_j = b_i$ , pour  $n = 3$ , représente le système d'équations :

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 &= b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 &= b_3 \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Cette convention ne s'applique qu'aux monômes ou à une seule lettre. Ainsi l'expression  $(x_k + y_k)$  ne représente pas une sommation sur l'indice  $k$  mais seulement un élément, par exemple  $z_k = (x_k + y_k)$ . Par contre le terme  $A_{ii}$  représente la somme :

$$A_{ii} = A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn} \quad (1.1.8)$$

Lorsqu'on voudra parler d'un ensemble de termes  $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn}$ , on ne pourra donc pas écrire le symbole  $A_{ii}$ .

La convention de sommation s'étend à tous les symboles mathématiques comportant des indices répétés. Ainsi, la décomposition d'un vecteur  $\mathbf{x}$  sur une base  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , s'écrit pour  $n = 3$  :

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 = x^i \mathbf{e}_i \quad (1.1.9)$$

**En conclusion, toute expression qui comporte un indice deux fois répété représente une somme sur toutes les valeurs possibles de l'indice répété.**

### 1.1.3 Sommation sur plusieurs indices

La convention de sommation s'étend au cas où figurent plusieurs indices muets dans un même monôme. Soit, par exemple, la quantité  $A^i_j x^i y^j$ , celle-ci représente la somme suivante pour  $i$  et  $j$  prenant les valeurs 1 et 2 :

$$\begin{aligned} A^i_j x^i y^j &= A^1_j x^1 y^j + A^2_j x^2 y^j && \text{(somme sur } i) \\ &= A^1_1 x^1 y^1 + A^1_2 x^1 y^2 + A^2_1 x^2 y^1 + A^2_2 x^2 y^2 && \text{(somme sur } j) \end{aligned}$$

Si l'expression a deux indices de sommation qui prennent respectivement les valeurs  $1, 2, \dots, n$ , la somme comporte  $n^2$  termes; s'il y a trois indices, on aura  $n^3$  termes, etc.

**Substitution** - Supposons que l'on ait la relation :

$$A = a_{ij} x^i y_j \text{ avec } x^i = c_{ij} y^j \quad (1.1.10)$$

Pour obtenir l'expression de  $A$  uniquement en fonction des variables  $y^j$ , on ne peut pas écrire  $A = a_{ij} c_{ij} y^j y_j$  car **un indice muet ne peut pas se retrouver répété plus de deux fois dans un monôme**. Il faut effectuer au préalable un changement de l'indice muet dans l'une des expressions. Par exemple, on pose :  $x^i = c_{ik} y^k$ , et on reporte dans l'expression de  $A$ ; on obtient :

$$A = a_{ij} (c_{ik} y^k) y_j = a_{ij} c_{ik} y^k y_j \quad (1.1.11)$$

On a ainsi une triple sommation sur les indices muets  $i, j, k$ . La convention de sommation peut être généralisée à un nombre quelconque d'indices.

### 1.1.4 Symbole de Kronecker

$$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1.1.12)$$

Ce symbole est appelé *symbole de Kronecker*. Il permet d'écrire, par exemple, le produit scalaire de deux vecteurs  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{e}_j$  de norme unité et orthogonaux (on dit aussi orthonormés) entre eux, sous la forme :

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (1.1.13)$$

Lors d'une sommation portant sur deux indices muets, le symbole de Kronecker annule tous les termes où les indices ont des valeurs différentes. Par exemple :

$$\delta_{ij} y_i y_j = y_i y_i \quad (1.1.14)$$

### 1.1.5 Symbole d'antisymétrie

Dans le cas où les indices  $i, j, k$  prennent l'une des valeurs  $1, 2, 3$ , le symbole d'antisymétrie  $\epsilon^{ijk}$  prend les valeurs suivantes :

$\epsilon^{ijk} = 0$ , si deux quelconques des indices ont une valeur identique; par exemple :

$$\epsilon^{112} = \epsilon^{313} = \epsilon^{222} = 0 \quad (1.1.15)$$

$\epsilon^{ijk} = 1$ , si les indices sont dans l'ordre 1,2,3 ou proviennent d'un nombre pair de permutations par rapport à cet ordre initial ; par exemple :

$$\epsilon^{123} = \epsilon^{231} = \epsilon^{312} = 1 \quad (1.1.16)$$

$\epsilon^{ijk} = -1$ , si les indices sont dans un ordre qui provient d'un nombre impair de permutations par rapport à l'ordre initial ; par exemple :

$$\epsilon^{132} = \epsilon^{321} = \epsilon^{213} = -1 \quad (1.1.17)$$

Le symbole d'antisymétrie peut comporter un nombre  $n$  quelconque d'indices, prenant des valeurs de 1 à  $n$ , et les conventions précédentes se généralisent.

En utilisant ce symbole, un déterminant d'ordre deux s'écrit sous la forme suivante :  $\det[a^{ij}] = \epsilon^{ij} a^{1i} a^{2j}$ . Un déterminant du troisième ordre s'écrit :  $\det[a^{ijk}] = \epsilon^{ijk} a^{1i} a^{2j} a^{3k}$ .

## 1.2 Généralisation de la notion de vecteur

La difficulté pour comprendre la généralisation de la notion de vecteur est liée à l'habitude qu'a le physicien de la représentation des vecteurs de la géométrie classique, à trois dimensions, utilisées en physique. Il faut abandonner toute représentation pour les "vecteurs" que l'on étudie ici. Une seconde difficulté est liée à la terminologie qui reprend le terme de vecteur pour désigner des êtres mathématiques très divers et plus abstraits.

### 1.2.1 Exemple de vecteurs

**Triplet de nombres réels** - Considérons l'exemple suivant : on appellera vecteur un ensemble de trois nombres réels ordonnés  $x^1, x^2, x^3$ .

Certes une telle définition se réfère implicitement aux vecteurs libres de la géométrie classique qui sont représentés par trois composantes, mais c'est à présent ce triplet de nombres que l'on appelle un vecteur, sans faire référence à un espace géométrique quelconque. On note ce vecteur  $(x^1, x^2, x^3)$  ou, sous une forme plus condensée, par le symbole  $\mathbf{x}$  ; on a donc  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ .

Appelons  $E_3$  l'ensemble de tous les vecteurs  $\mathbf{x}$  ainsi définis.

**Opérations sur les vecteurs** - Pour un tel objet, dégagé de toute attache géométrique, on peut aisément définir des opérations entre vecteurs, analogues aux lois classiques d'addition des vecteurs libres et de leur multiplication par un scalaire.

Par définition, à deux vecteurs  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$  et  $\mathbf{y} = (y^1, y^2, y^3)$ , l'addition vectorielle fait correspondre un autre vecteur  $\mathbf{z}$ , noté  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ , tel que :

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, x^3 + y^3) = (z^1, z^2, z^3) = \mathbf{z} \quad (1.2.1)$$

Le vecteur  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$  est appelé la somme des vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ .

Également par définition, à un vecteur  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ , la multiplication par un nombre réel  $\lambda$  fait correspondre un autre vecteur  $\mathbf{u}$ , noté  $\lambda \mathbf{x}$  tel que :

$$\lambda \mathbf{x} = (\lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3) = (u^1, u^2, u^3) = \mathbf{u} \quad (1.2.2)$$

Le vecteur  $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{x}$  est appelé le produit de  $\mathbf{x}$  par le nombre réel  $\lambda$ . Par suite, les nombres réels seront appelés des scalaires.

On remarque que ces deux opérations sur les vecteurs font correspondre à un ou plusieurs éléments de l'ensemble  $E_3$ , un autre élément de ce même ensemble. On dit que ces opérations sont des lois de composition interne.

**Remarque** - Par suite, les vecteurs constitués par des triplets de nombres seront associés à un espace ponctuel et ce dernier pourra, si on lui attribue cette signification, constituer une représentation de l'espace physique à trois dimensions.

Mais les vecteurs sont définis de manière générale, ainsi qu'on va le voir, uniquement à partir des propriétés des opérations entre les éléments d'un ensemble.

## 1.2.2 Propriétés des opérations sur les vecteurs

Dans l'exemple précédent, on a les propriétés suivantes :

### Addition vectorielle

**A1** - Commutativité :  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$

**A2** - Associativité :  $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$

**A3** - Il existe un vecteur nul, noté  $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$  tel que :  $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$

**A4** - Quel que soit le vecteur  $\mathbf{x}$ , il existe un vecteur noté  $(-\mathbf{x})$ , appelé son opposé, tel que :  $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

### Multiplication par un scalaire

**M1** - Associativité :  $\lambda_1 (\lambda_2 \mathbf{x}) = (\lambda_1 \lambda_2) \mathbf{x}$

**M2** - Distributivité par rapport à l'addition des scalaires :

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x} + \lambda_2 \mathbf{x}$$

**M3** - Distributivité par rapport à l'addition vectorielle :

$$\lambda (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}$$

**M4** - Pour le scalaire 1, on a  $1 \mathbf{x} = \mathbf{x}$

On démontre aisément ces diverses propriétés en partant de la définition des opérations (1.2.1) et (1.2.2). Par exemple, la distributivité par rapport à l'addition vectorielle se démontre comme suit :

$$\begin{aligned}
 \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \lambda(x^1 + y^1, x^2 + y^2, x^3 + y^3) = (\lambda(x^1 + y^1), \lambda(x^2 + y^2), \lambda(x^3 + y^3)) \\
 &= (\lambda x^1 + \lambda y^1, \lambda x^2 + \lambda y^2, \lambda x^3 + \lambda y^3) = (\lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3) + (\lambda y^1, \lambda y^2, \lambda y^3) \\
 &= \lambda(x^1, x^2, x^3) + \lambda(y^1, y^2, y^3) = \lambda \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}
 \end{aligned}
 \tag{1.2.3}$$

### 1.2.3 Autres exemples de vecteurs

**Multiplet de nombres réels** - La généralisation de l'exemple des vecteurs de  $E_3$ , se fait aisément en considérant un multiplète constitué de  $n$  nombres réels ordonnés  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  que l'on appellera un vecteur. Sous forme condensée, on note  $\mathbf{x}$  ce vecteur ; on a :

$$\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n) \tag{1.2.4}$$

De même que précédemment, on peut définir deux lois de composition interne entre ces vecteurs :

- L'addition vectorielle qui à deux vecteurs  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$  et  $\mathbf{y} = (y^1, y^2, \dots, y^n)$  fait correspondre leur somme  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$  définie par :

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \dots, x^n + y^n) = (z^1, z^2, \dots, z^n) = \mathbf{z} \tag{1.2.5}$$

- La multiplication par un scalaire  $\lambda$  qui à un vecteur  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$  fait correspondre le produit  $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{x}$  défini par :

$$\lambda \mathbf{x} = (\lambda x^1, \lambda x^2, \dots, \lambda x^n) = (u^1, u^2, \dots, u^n) = \mathbf{u} \tag{1.2.6}$$

On vérifie aisément que ces deux lois d'addition et de multiplication possèdent les mêmes propriétés, notées précédemment **A1** à **A4** et **M1** à **M4**, que celles des vecteurs de  $E_3$ .

**Polynômes** - Ces propriétés fondamentales, **A1** à **A4** et **M1** à **M4**, se trouvent être identiques pour les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire effectuées sur une très grande variété d'êtres mathématiques.

À titre d'exemple, considérons le polynôme de degré trois :

$$P_a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \tag{1.2.7}$$

À l'addition de deux polynômes  $P_a(t)$  et  $P_b(t)$  de degré trois correspond un autre polynôme  $P_c(t)$  de même degré. On vérifie aisément que l'addition des polynômes possède les propriétés **A1** à **A4** de l'addition vectorielle.

La multiplication d'un polynôme  $P_a(t)$  par un scalaire  $\lambda$  donne un autre polynôme  $\lambda P_a(t)$  de degré trois et cette multiplication possède les propriétés **M1** à **M4**.

Par suite de cette identité des propriétés des opérations sur les polynômes avec celles des opérations sur les vecteurs de la géométrie classique, on peut considérer les polynômes comme des vecteurs.

**Autres exemples** - On sait définir des opérations telles que l'addition et la multiplication par un scalaire, sur des êtres mathématiques très divers. C'est le cas par exemple, des nombres complexes, des matrices, des fonctions définies sur un intervalle donné, etc. Ainsi qu'on peut le vérifier pour chaque cas particulier, ces opérations vérifient respectivement les propriétés fondamentales **A1** à **A4** et **M1** à **M4**.

Au lieu de considérer la multiplication par un nombre réel, il est possible d'utiliser des nombres complexes. Cependant, nous nous limitons par la suite à l'emploi des nombres réels pour la multiplication.

#### 1.2.4 Définition générale des vecteurs

Ces exemples conduisent à définir de manière générale les vecteurs uniquement à partir de leurs propriétés opératoires.

Pour cela, considérons un ensemble  $E$  d'éléments quelconques que l'on note  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}$ , etc. Supposons qu'il existe entre ces éléments les deux lois de composition interne suivantes :

- À tout couple d'éléments  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ , une première loi fait correspondre un élément  $\mathbf{z}$  de  $E$ , noté  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ , soit  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ . De plus, cette loi possède les propriétés **A1** à **A4**.
- À tout élément  $\mathbf{x}$  et à tout nombre réel  $\lambda$ , une seconde loi fait correspondre un élément  $\mathbf{u}$  de  $E$ , noté  $\lambda \mathbf{x}$ , soit  $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{x}$ . De plus cette loi possède les propriétés **M1** à **M4**.

Par définition, l'ensemble  $E$ , muni de ces deux lois de composition interne, est appelé **un espace vectoriel** par rapport au corps des nombres réels. Les éléments  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ , etc de  $E$  sont appelés des vecteurs.

#### 1.2.5 Structure d'un ensemble

Il peut être utile de distinguer l'ensemble  $E'$  d'éléments que l'on se donne au départ, de l'espace vectoriel  $E$  lui-même.

Lorsqu'on ajoute à l'ensemble  $E'$ , deux lois de composition interne, ces lois vont constituer **une structure** pour cet ensemble  $E'$ . Ce dernier, muni de ces deux lois possédant respectivement les propriétés **A1** à **A4** et **M1** à **M4**, devient alors un

ensemble  $E$  muni d'une structure d'espace vectoriel. Cet espace vectoriel se confond évidemment en tant qu'ensemble d'éléments avec l'ensemble  $E'$ . Cependant, il s'en distingue en tant qu'espace qui constitue un ensemble structuré. On peut dire que  $E'$  constitue le support de  $E$ .

De manière générale, munir un ensemble d'une ou plusieurs relations et lois de composition, c'est lui conférer une structure. Cette dernière est définie par les propriétés qui régissent les relations et les opérations dont la structure est pourvue.

## 1.3 Bases d'un espace vectoriel

### 1.3.1 Exemples de vecteurs indépendants et dépendants

Considérons les trois vecteurs suivants de l'espace vectoriel  $E_3$  :

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1) \quad (1.3.1)$$

Effectuons une combinaison linéaire de ces vecteurs :  $(\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3)$  et cherchons pour quelles valeurs de  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , cette combinaison linéaire est égale au vecteur nul  $\mathbf{0}=(0,0,0)$ . On a :

$$\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 = \lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 0) + \lambda_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \quad (1.3.2)$$

La multiplication par les scalaires donne :

$$(\lambda_1, 0, 0) + (0, \lambda_2, 0) + (0, 0, \lambda_3) = (0, 0, 0) \quad (1.3.3)$$

Manifestement, cette relation vectorielle est vérifiée si et seulement si :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \quad (1.3.4)$$

On dit que ces trois vecteurs  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  sont linéairement *indépendants*.

Par contre, si l'on prend les deux vecteurs suivants :  $\mathbf{x}=(3,4,-2)$  et  $\mathbf{y}=(6,8,-4)$ , et que l'on cherche  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  tels que  $\lambda_1 \mathbf{x} + \lambda_2 \mathbf{y} = \mathbf{0}$ , on obtient, en remarquant que  $\mathbf{y} = 2\mathbf{x}$  :

$$\lambda_1 \mathbf{x} + \lambda_2 \mathbf{y} = (\lambda_1 + 2\lambda_2) \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (1.3.5)$$

ce qui implique que  $(\lambda_1 + 2\lambda_2) = 0$  puisque  $\mathbf{x}$  n'est pas nul. Tous les nombres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  qui vérifient  $\lambda_1 = -2\lambda_2$  permettent de satisfaire la relation vectorielle précédente. On dit que les vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont linéairement *dépendants* : l'un peut se déduire de l'autre.

Pour plus de deux vecteurs, on dira qu'ils sont linéairement dépendants si l'un d'entre eux peut être déterminé à partir des autres.

### 1.3.2 Vecteurs de base

Considérons  $p$  vecteurs  $\mathbf{x}_i$  d'un espace vectoriel  $E$  et écrivons qu'une combinaison linéaire de ces  $p$  vecteurs est égale au vecteur nul, soit :

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad (1.3.6)$$

Si la seule combinaison linéaire qui vérifie cette égalité correspond à des scalaires  $\lambda_i$  tous nuls, on dit que ces  $p$  vecteurs sont linéairement indépendants. On a un système de  $p$  vecteurs indépendants.

Dans le cas contraire, les vecteurs sont linéairement dépendants et l'un au moins d'entre eux est une combinaison linéaire des autres. Supposons par exemple que  $\lambda_1$  soit différent de zéro dans l'égalité précédente, on a alors :

$$\mathbf{x}_1 = (-1/\lambda_1)(\lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_p \mathbf{x}_p) \quad (1.3.7)$$

En prélevant un certain nombre de vecteurs dans un espace vectoriel  $E$ , on peut former des ensembles de vecteurs indépendants. Il existe des espaces vectoriels où le nombre de vecteurs formant un système linéairement indépendant n'est pas fini mais nous ne les considérons pas ici.

On suppose donc que le nombre maximum de vecteurs indépendants est borné et l'on appelle  $n$  ce nombre maximum. Cela signifie, qu'après avoir choisi  $n$  vecteurs indépendants, si l'on ajoute un vecteur quelconque, le système devient dépendant. Un tel système de  $n$  vecteurs indépendants est appelé une **base de l'espace vectoriel  $E$** .

Ces  $n$  vecteurs indépendants sont appelés des **vecteurs de base**. Ils forment un système de  $n$  vecteurs qui sera noté sous la forme  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  ou plus brièvement  $(\mathbf{e}_i)$ . Pour rappeler que l'espace vectoriel comporte  $n$  vecteurs de base, on le note  $E_n$ .

Le nombre  $n$  est appelé **la dimension** de l'espace vectoriel  $E$ . Un espace vectoriel de dimension  $n$  sera noté  $E_n$ .

**Exemple** - Les trois vecteurs  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ , constituent une base de l'espace vectoriel  $E_3$ . La dimension de cet espace est égale à trois.

### 1.3.3 Décomposition d'un vecteur sur une base

Soient  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  une base d'un espace vectoriel  $E_n$ . Le système suivant de  $(n+1)$  vecteurs :  $(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  est formé de vecteurs linéairement dépendants ; si l'on a :

$$\lambda_0 \mathbf{x} + \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \lambda_p \mathbf{e}_p = \mathbf{0} \quad (1.3.8)$$

On peut ainsi décomposer sur la base  $E_n$  le vecteur  $\mathbf{x}$  qui peut être représenté par une combinaison linéaire des vecteurs de base :

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + \dots + x^n \mathbf{e}_n = x^i \mathbf{e}_i \quad (1.3.9)$$

avec  $x^i = (-\lambda_i/\lambda_0)$ . Cette combinaison est unique, car si l'on avait une autre décomposition :

$$\mathbf{x} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + \dots + a^n \mathbf{e}_n = a^i \mathbf{e}_i \quad (1.3.10)$$

on en déduirait :

$$(x^1 - a^1) \mathbf{e}_1 + (x^2 - a^2) \mathbf{e}_2 + \dots + (x^n - a^n) \mathbf{e}_n = (x^i - a^i) \mathbf{e}_i = \mathbf{0} \quad (1.3.11)$$

Les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  étant indépendants, une telle relation n'est possible que si tous les termes  $(x^i - a^i)$  sont nuls, donc si  $x^i = a^i$ , ce qui correspond à deux décompositions identiques.

Les nombres  $x^i$  sont les *composantes* du vecteur  $\mathbf{x}$  par rapport à la base  $(\mathbf{e}_i)$ . D'où le théorème suivant : **Dans un espace vectoriel  $E_n$  où existe une base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ , tout vecteur peut s'exprimer d'une manière et d'une seule par une combinaison linéaire des vecteurs formant cette base.**

**Exemple 1** - Tout vecteur  $\mathbf{x} = (a^1, a^2, a^3)$  de l'espace vectoriel  $E_3$  peut être décomposé sur la base  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ . On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (a^1, a^2, a^3) = (a^1, 0, 0) + (0, a^2, 0) + (0, 0, a^3) \\ &= a^1(1, 0, 0) + a^2(0, 1, 0) + a^3(0, 0, 1) = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Dans cette base, les composantes du vecteur sont identiques aux nombres qui figurent dans le triplet qui définit le vecteur lui-même. Il n'en est évidemment pas de même lorsque la base est quelconque.

**Exemple 2** - L'espace vectoriel des polynômes  $P_2(t)$  de degré 2 admet, par exemple, la base suivante :  $\mathbf{e}_1 = 3$ ,  $\mathbf{e}_2 = 4t$ ,  $\mathbf{e}_3 = 2t^2$ . Tout polynôme de degré deux se décompose sur cette base sous la forme :  $P_2(t) = a^1 + a^2t + a^3t^2 = c^1 \mathbf{e}_1 + c^2 \mathbf{e}_2 + c^3 \mathbf{e}_3$ , avec  $a^1 = 3c^1$ ,  $a^2 = 4c^2$ ,  $a^3 = 2c^3$ .

### 1.3.4 Changement de base

Soient deux bases  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  et  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$  d'un espace vectoriel  $E_n$ . Chaque vecteur d'une base peut être décomposé sur l'autre base sous la forme suivante :

$$\mathbf{e}_i = A_i'^k \mathbf{e}'_k \quad (1.3.12)$$

$$\mathbf{e}'_k = A_k^i \mathbf{e}_i \quad (1.3.13)$$

où l'on utilise la convention de sommation pour  $i, k = 1, 2, \dots, n$ .

**Changement des composantes d'un vecteur** - Un vecteur  $\mathbf{x}$  de  $E_n$  peut être décomposé sur chaque base sous la forme :

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x'^k \mathbf{e}'_k \quad (1.3.14)$$

Cherchons les relations entre les composantes  $x^i$  et  $x'^k$ . Remplaçons les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{e}'_k$  dans la relation (1.3.14) par leur expression respective (1.3.12) et (1.3.13); il vient :

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x^i A_i'^k e'_k = x'^k \mathbf{e}'_k = x'^k A_k^i \mathbf{e}_i \quad (1.3.15)$$

Par suite de l'unicité de la décomposition d'un vecteur sur une base, on peut égaliser les coefficients des vecteurs  $\mathbf{e}'_k$  et l'on obtient :

$$x'^k = A_i'^k x^i \quad (1.3.16)$$

De même, les coefficients des vecteurs  $\mathbf{e}_i$  donnent :

$$x^i = A_k^i x'^k \quad (1.3.17)$$

Ce sont les formules de changement de base des composantes d'un vecteur. On remarque que les composantes d'un vecteur quelconque se transforment de façon contraire de celle des vecteurs de base (voir (1.3.12) et (1.3.13)), les grandeurs  $A$  et  $A'$  s'échangeant. Par suite de ce genre de transformation, ces composantes sont appelées des **composantes contravariantes**.

**Matrice de changement de base** - Les relations (1.3.12) et (1.3.13) nous donnent :

$$\mathbf{e}_i = A_i'^k A_k^j \mathbf{e}_j \quad (1.3.18)$$

d'où :

$$A_i'^k A_k^j = \delta_i^j \quad (1.3.19)$$

La matrice de changement de base  $A = [A_i'^k]$  a donc pour matrice inverse  $A^{-1} = [A_k^i]$ . On a la relation :  $AA^{-1} = I$ , où  $I$  est la matrice unité. En vertu de la règle donnant le déterminant du produit des matrices, on a :

$$\det(A) \det(A^{-1}) = 1 \quad (1.3.20)$$

Les déterminants de deux matrices inverses sont inverses l'un de l'autre.

## 1.4 Produit scalaire

### 1.4.1 Exemple de produits scalaires

**1 : Triplets de nombres** - Considérons l'exemple des vecteurs constitués par des triplets de nombres. Soit la base de  $E_3$  formée des vecteurs  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$  et deux vecteurs quelconques de cet espace vectoriel décomposés sur cette base :  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{y} = y^i \mathbf{e}_i$ .

Par définition, le produit scalaire des vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  est le nombre, noté  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ , donné par :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 = x^i y^i \quad (1.4.1)$$

On vérifie aisément que le produit scalaire ainsi défini possède les propriétés suivantes :

1)  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$ ; 2)  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$ ; 3)  $(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$ ; 4) Pour tout vecteur donné  $\mathbf{x}$ , si l'on a  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$  pour tout vecteur  $\mathbf{y}$  de  $E_3$ , alors  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

**2 : Polynômes** - Considérons l'espace vectoriel des polynômes  $P_a(x)$  de degré deux. On peut définir, par exemple, un produit scalaire des polynômes entre eux par l'intégrale suivante :

$$P_a(x) \cdot P_b(x) = \int_{-1}^{+1} P_a(x) P_b(x) dx \quad (1.4.2)$$

On vérifie aisément qu'un tel produit scalaire possède également les propriétés précédentes.

### 1.4.2 Définition du produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs quelconques est défini de manière générale à partir de ses propriétés.

On appelle produit scalaire une loi de composition qui, à tout couple, de vecteurs  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  d'un espace vectoriel  $E_n$ , associe un nombre réel, souvent noté  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ , et vérifie les axiomes suivants :

<p>PS1 - Commutativité : <math>\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}</math>          PS2 - Distributivité par rapport à l'addition vectorielle : <math>(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}</math>          PS3 - Associativité avec la multiplication par un scalaire : <math>(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})</math>          PS4 - Si <math>\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0</math>, quelque soit <math>\mathbf{y}</math>, alors <math>\mathbf{x} = \mathbf{0}</math></p>
---

Un espace vectoriel sur lequel on a défini un produit scalaire est appelé un espace vectoriel pré-euclidien.

### 1.4.3 Expression générale du produit scalaire

Considérons un espace vectoriel pré-euclidien  $E_n$  rapporté à une base quelconque  $(\mathbf{e}_i)$ . Les vecteurs de  $E_n$  s'écrivent sur cette base :  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{y} = y^j \mathbf{e}_j$ . Le produit scalaire, compte tenu des propriétés PS2 et PS3, s'écrit :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x^i \mathbf{e}_i) \cdot (y^j \mathbf{e}_j) = x^i y^j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = g_{ij} x^i y^j \quad (1.4.3)$$

avec  $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ . On obtient donc l'expression générale du produit scalaire sous la forme :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = g_{ij} x^i y^j \quad (1.4.4)$$

La donnée des  $g_{ij}$  correspond à la définition même du produit scalaire particulier que l'on se donne sur un espace vectoriel. Ces quantités ne peuvent cependant pas être entièrement arbitraires car, réciproquement, l'expression

(1.4.4) du produit scalaire de deux vecteurs doit vérifier les propriétés PS1 à PS4. Pour satisfaire la propriété de commutativité (PS1), on doit avoir :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = g_{ij} x^i y^j = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = g_{ji} y^j x^i \quad (1.4.5)$$

d'où :  $g_{ij} = g_{ji}$ .

D'autre part, la propriété PS4 nécessite que si  $g_{ij} x^i y^j = 0$  pour tous  $y^j$ , alors on doit avoir :  $x^i = 0$ . Or, l'égalité  $g_{ij} x^i y^j = 0$  est vérifiée, pour des valeurs arbitraires de  $y^j$ , seulement si l'on a :  $g_{ij} x^i = 0$ . Ce système de  $n$  équations à  $n$  inconnues ne devant admettre par hypothèse que la solution  $x^i = 0$ , il faut et il suffit pour cela que le déterminant, noté  $g$ , du système soit différent de zéro ; on doit donc avoir :

$$g = \det [g_{ij}] \neq 0 \quad (1.4.6)$$

#### 1.4.4 Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ , non nuls, d'un espace pré-euclidien sont dits orthogonaux entre eux lorsque leur produit scalaire est nul, soit :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \quad (1.4.7)$$

Un système de  $n$  vecteurs  $\mathbf{x}_i$ , tous orthogonaux entre eux, constitue un système orthogonal.

Si l'on choisit des vecteurs orthogonaux linéairement indépendants en nombre égal à la dimension de l'espace vectoriel, ce système de vecteurs constitue une base de cet espace. Cette base est appelée **une base orthogonale**. Nous allons montrer qu'il est toujours possible de déterminer une base orthogonale d'un espace vectoriel pré-euclidien.

**Remarque** - Dans un espace pré-euclidien, des vecteurs orthogonaux peuvent être linéairement dépendants. Considérons par exemple des vecteurs  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{y} = y^j \mathbf{e}_j$  d'un espace vectoriel à deux dimensions et définissons leur produit scalaire par :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x^1 y^1 - x^2 y^2 \quad (1.4.8)$$

Si l'on considère, par exemple, les deux vecteurs  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ , qui sont linéairement dépendants, on obtient  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ . Pour un tel produit scalaire, les vecteurs  $\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$  sont tels que  $\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = 0$ .

#### 1.4.5 Bases orthogonales d'un espace vectoriel pré-euclidien

La méthode dite d'orthogonalisation de Schmidt permet le calcul effectif d'une base orthogonale pour tout espace vectoriel pré-euclidien  $E_n$ .

Pour cela, considérons un ensemble de  $n$  vecteurs linéairement indépendants  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$

de  $E_n$  et supposons que l'on ait, pour chaque vecteur :  $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i \neq 0$ . Cherchons  $n$  vecteurs  $\mathbf{e}_i$  orthogonaux entre eux.

Partons de  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}_1$  et cherchons  $\mathbf{e}_2$  orthogonal à  $\mathbf{e}_1$ , sous la forme :

$$\mathbf{e}_2 = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{x}_2 \quad (1.4.9)$$

Le coefficient  $\lambda_1$  se calcule en écrivant la relation d'orthogonalité :

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{x}_1 \cdot (\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = 0 \quad (1.4.10)$$

On en déduit :  $\lambda_1 = -(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2)/(\mathbf{x}_1)^2$ . Le paramètre  $\lambda_1$  étant déterminé, on obtient le vecteur  $\mathbf{e}_2$  qui est orthogonal à  $\mathbf{e}_1$  et non nul puisque le système  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  est linéairement indépendant.

Le vecteur suivant  $\mathbf{e}_3$  est cherché sous la forme :

$$\mathbf{e}_3 = \mu_1 \mathbf{e}_1 + \mu_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{x}_3 \quad (1.4.11)$$

Les deux relations d'orthogonalité :  $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$  et  $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$ , permettent le calcul des coefficients  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . On obtient :

$$\mu_1 = -(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{x}_3)/(\mathbf{e}_1)^2 ; \mu_2 = -(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{x}_3)/(\mathbf{e}_2)^2 \quad (1.4.12)$$

ce qui détermine le vecteur  $\mathbf{e}_2$  orthogonal à  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$ , et non nul puisque le système  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n)$  est indépendant. En continuant le même type de calcul, on obtient de proche en proche un système de vecteurs  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  orthogonaux entre eux et dont aucun n'est nul.

Dans le cas où certains vecteurs seraient tels que  $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i = 0$ , on remplace  $\mathbf{x}_i$  par  $\mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_i + \lambda \mathbf{x}_j$  en choisissant un vecteur  $\mathbf{x}_j$  de telle sorte que l'on obtienne  $\mathbf{x}'_i \cdot \mathbf{x}'_i \neq 0$ .

On en déduit donc que tout espace vectoriel pré-euclidien admet des bases orthogonales.

**Produit scalaire sur une base orthogonale** - Lorsque les vecteurs de base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  d'un espace vectoriel sont orthogonaux, les quantités :

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (1.4.13)$$

sont nulles si  $i \neq j$ . Le produit scalaire de deux vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ , décomposés sur cette base, se réduit alors à :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = g_{11} x^1 y^1 + g_{22} x^2 y^2 + \dots + g_{nn} x^n y^n \quad (1.4.14)$$

De manière générale, les quantités  $g_{ij}$  peuvent être positives ou négatives.

### 1.4.6 Norme d'un vecteur

Le produit scalaire d'un vecteur  $\mathbf{x}$  peut permettre de définir la notion de norme d'un vecteur. On a pour le carré de la norme :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = g_{ij} x^i x^j = (\text{norme } \mathbf{x})^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \quad (1.4.15)$$

Les nombres  $g_{ij}$  définissent en quelque sorte une "mesure" des vecteurs ; on dit qu'ils constituent **la métrique de l'espace vectoriel**.

**Exemple** - En géométrie classique, la norme représente la longueur d'un vecteur (Fig.1.1). Considérons un plan et des vecteurs de base  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$  et  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ , avec  $g_{ij} = \delta_{ij}$ . Soit un vecteur  $\mathbf{A} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2$  ; on a :

$$\|\mathbf{A}\| = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})^{1/2} = [(x^1)^2 + (x^2)^2]^{1/2} \quad (1.4.16)$$

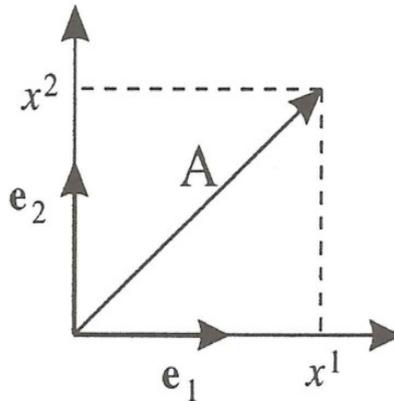


FIGURE 1.1 - Norme d'un vecteur

**Signature d'un espace vectoriel** - Dans l'espace de la géométrie classique, la norme est un nombre qui est toujours strictement positif et qui ne devient nul que si le vecteur est égal à zéro. Par contre l'expression (1.4.15) de la norme d'un vecteur, peut être éventuellement négative pour des nombres  $g_{11}, g_{12}, \dots, g_{nn}$  quelconques. On peut donc distinguer deux genres d'espaces vectoriels pré-euclidiens selon que la norme est positive ou non.

Considérons une base orthogonale ( $\mathbf{e}_i$ ) d'un espace pré-euclidien  $E_n$ , ce qui est toujours possible. Le carré de la norme d'un vecteur s'écrit alors, en faisant  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$  dans l'expression (1.4.14) :

$$(\text{norme } \mathbf{x})^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = g_{11} (x^1)^2 + g_{22} (x^2)^2 + \dots + g_{nn} (x^n)^2 \quad (1.4.17)$$

Les nombres  $g_{ij}$  pouvant être négatifs ou positifs, la norme d'un vecteur comporte une série de signe + et -, la valeur zéro étant interdite par suite de la relation (1.4.6) :  $g = \det [g_{ij}] \neq 0$ .

Le nombre de signes + et de signes - constitue une caractéristique d'un espace vectoriel donné  $E_n$  ; elle est appelée **la signature de l'espace vectoriel**  $E_n$ . Cette signature est une propriété intrinsèque de l'espace  $E_n$  ; elle ne dépend donc pas de la base considérée.

## 1.5 Espace vectoriel euclidien

### 1.5.1 Définitions

Un espace vectoriel pré-euclidien est dit **euclidien** si sa signature ne comporte que des signes +.

Dans ce cas, tous les  $g_{ij}$  étant strictement positifs, la norme d'un vecteur d'un espace vectoriel euclidien est un nombre positif ou nul. La racine carrée du carré scalaire d'un vecteur  $\mathbf{x}$  constitue la norme de  $\mathbf{x}$ ; on a :

$$\text{norme } \mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{1/2} \quad (1.5.1)$$

En géométrie classique, la norme représente la longueur d'un vecteur. Les espaces vectoriels pré-euclidiens dont la signature comporte des signes + et -, sont appelés **des espaces improprement euclidiens** ou encore **espaces pseudo-euclidiens**.

### 1.5.2 Bases orthonormées

Considérons une base orthogonale  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  d'un espace vectoriel euclidien  $E_n$ . Divisant chaque vecteur  $\mathbf{x}_i$  de cette base par sa norme, on obtient un vecteur  $\mathbf{e}_i$  de norme égale à l'unité :

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{x}_i}{\text{norme } \mathbf{x}_i} \quad (1.5.2)$$

On a donc pour ces vecteurs :  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ij} = \delta_{ij}$ . Les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  sont dits **normés**; un système de vecteurs orthogonaux et normés est appelé **un système orthonormé**. Comme les vecteurs  $\mathbf{x}_i$  constituent une base de  $E_n$ , les vecteurs  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  en forment **une base orthonormée**.

Puisque tout espace vectoriel pré-euclidien admet des bases orthogonales, tout espace vectoriel euclidien admet des bases orthonormées.

**Produit scalaire et norme** - Le produit scalaire de deux vecteurs  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{y} = y^j \mathbf{e}_j$ , rapportés à une base orthonormée  $(\mathbf{e}_i)$ , compte tenu de l'expression (1.4.5) et des relations  $g_{ij} = \delta_{ij}$ , devient :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \delta_{ij} x^i y^j = x^i y^i \quad (1.5.3)$$

La norme du vecteur  $\mathbf{x}$  s'écrit alors :

$$\text{norme } \mathbf{x} = (x^i x^i)^{1/2} \quad (1.5.4)$$

On obtient la généralisation à  $n$  dimensions des formules de la géométrie classique donnant le produit scalaire et la norme d'un vecteur rapporté à des vecteurs de base orthogonaux de longueur unité.

Dans une base orthonormée, les composantes du vecteur  $\mathbf{x}$  s'obtiennent en effectuant le produit scalaire de  $\mathbf{x}$  par un vecteur de base  $\mathbf{e}_j$ , soit :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j = (x^i \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_j = x^i \delta_{ij} = x^j \quad (1.5.5)$$

Il n'en est pas de même en général pour une base quelconque.

### 1.5.3 Composantes contravariantes et covariantes

Pour un espace vectoriel euclidien  $E_n$ , rapporté à une base quelconque  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ , le produit scalaire d'un vecteur  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$  par un vecteur de base  $\mathbf{e}_j$ , s'écrit :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j = (x^i \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_j = x^i (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = x^i g_{ij} = x_j \quad (1.5.6)$$

Ces produits scalaires, notés  $x_j$ , s'appellent **les composantes covariantes**, dans la base  $(\mathbf{e}_i)$ , du vecteur  $\mathbf{x}$ . Ces composantes sont donc définies par :

$$x_j = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j \quad (1.5.7)$$

**Elles seront notées au moyen d'indices inférieurs.** Nous verrons par la suite que ces composantes s'introduisent naturellement pour certains vecteurs de la physique, par exemple le vecteur gradient. D'autre part, la notion de composante covariante est essentielle pour les tenseurs.

La relation (1.5.6) montre que les composantes covariantes  $x_j$  sont liées aux composantes  $x^i$  classiques. Pour les distinguer, ces dernières sont appelées **les composantes contravariantes** du vecteur  $\mathbf{x}$ . Les composantes contravariantes sont donc des nombres  $x^i$  tels que :

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i \quad (1.5.8)$$

**Elles seront notées au moyen d'indices supérieurs.** L'étude des changements de base permettra de justifier l'appellation des différentes composantes.

**Base quelconque** - À titre d'exemple, considérons deux vecteurs  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  de la géométrie classique ayant des directions quelconques et des longueurs arbitraires (Fig.1.2). Soit un vecteur  $\mathbf{A} = \mathbf{OM}$ ; la parallèle à la droite portant  $\mathbf{e}_2$  et passant par  $M$  définit le point  $M'$  tel que :  $\mathbf{OM}' = x^1 \mathbf{e}_1$  ; de même :  $\mathbf{OM}'' = x^2 \mathbf{e}_2$ .

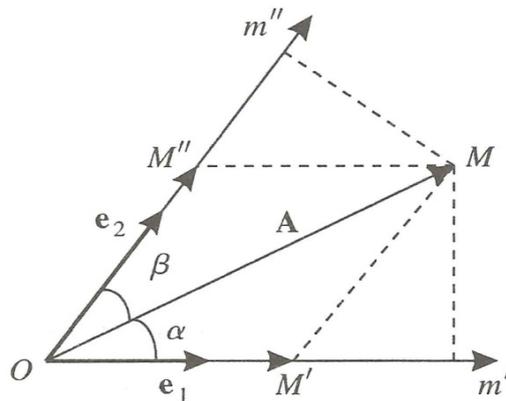


FIGURE 1.2 – Composantes covariantes et contravariantes

On a :

$$\mathbf{A} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 \quad (1.5.9)$$

Les nombres  $x^1$  et  $x^2$  sont les composantes contravariantes du vecteur  $\mathbf{A}$ . Utilisons l'expression classique du produit scalaire pour exprimer les composantes covariantes ; il vient :

$$x_1 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1 = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{e}_1\| \cos \alpha ; \quad x_2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_2 = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{e}_2\| \cos \beta \quad (1.5.10)$$

Si les vecteurs de base  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  ont des normes égales à l'unité, alors les projections orthogonales  $m'$  et  $m''$  du point  $M$  représentent les composantes covariantes de  $\mathbf{A}$ .

**Base orthonormée - Dans une base orthonormée, les composantes covariantes et contravariantes sont identiques** puisqu'on a :

$$x_j = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j = (x^i \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_j = x^i (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = x^i \delta_{ij} = x^j \quad (1.5.11)$$

Il n'en est pas de même pour une base orthogonale quelconque.

**Relations entre composantes** - La relation (1.5.6) donne l'expression des composantes covariantes en fonction des composantes contravariantes, soit :

$$x_j = x^i g_{ij} \quad (1.5.12)$$

Inversement, les composantes contravariantes peuvent être calculées en résolvant, par rapport aux  $n$  inconnues  $x^i$ , le système de  $n$  équations (1.5.12). C'est un système algébrique dont le déterminant  $g$  est différent de zéro :

$$g = \det [g_{ij}] \neq 0 \quad (1.5.13)$$

ainsi qu'on l'a vu précédemment (1.3.20). On obtient un système de Cramer qui admet une solution unique. L'inconnue  $x^i$  est égale au quotient de deux déterminants : le dénominateur est le déterminant  $g$ , le numérateur est un déterminant qui se déduit en remplaçant le  $i$ ème vecteur colonne du déterminant  $g$  par le vecteur colonne  $x_j$  du second membre.

Notons  $a^{ji}$  le coefficient de développement du terme  $g_{ij}$  dans le déterminant  $g$  et posons :

$$g^{ji} = a^{ji} / g \quad (1.5.14)$$

On obtient alors, selon la règle de Cramer :

$$x^j = g^{ji} x_i \quad (1.5.15)$$

Puisque  $g_{ij} = g_{ji}$ , le déterminant est symétrique et l'on a :  $a^{ji} = a^{ij}$ , d'où également  $g^{ji} = g^{ij}$  ; ces quantités sont symétriques par rapport à leurs indices.

### 1.5.4 Expression du produit scalaire et de la norme

La combinaison des composantes covariantes et contravariantes permet d'obtenir des expressions particulièrement simples du produit scalaire et de la norme dans une base quelconque. Dans le produit scalaire :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = g_{ij} x^i y^j \quad (1.5.16)$$

substituons en effet l'expression (1.5.12) des composantes covariantes, il vient :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_j y^j = x^i y_i \quad (1.5.17)$$

La norme du vecteur  $\mathbf{x}$  s'écrit :

$$\text{norme } \mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{1/2} = (x_i x^i)^{1/2} \quad (1.5.18)$$

On peut également exprimer le produit scalaire en fonction des seules composantes covariantes. Il vient, en substituant dans (1.5.17) l'expression des composantes contravariantes (1.5.15) :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = g^{ji} x_i y_j \quad (1.5.19)$$

d'où l'expression de la norme :

$$\text{norme } \mathbf{x} = (g^{ji} x_i x_j)^{1/2} \quad (1.5.20)$$

### 1.5.5 Changement de base

Considérons deux bases distinctes  $(\mathbf{e}_i)$  et  $(\mathbf{e}'_k)$  d'un espace vectoriel euclidien, liées entre elles par les relations :

$$(a) \ \mathbf{e}_i = A_i'^k \mathbf{e}'_k \ ; \ (b) \ \mathbf{e}'_k = A_k^i \mathbf{e}_i \quad (1.5.21)$$

Soient  $x^i$  et  $x'^k$  les composantes contravariantes d'un vecteur  $\mathbf{x}$  respectivement dans les bases  $(\mathbf{e}_i)$  et  $(\mathbf{e}'_k)$ . On a vu précédemment les formules de changement de base des composantes données par les relations (1.3.16) et (1.3.17), à savoir :

$$(a) \ x'^k = A_i'^k x^i \ ; \ (b) \ x^i = A_k^i x'^k \quad (1.5.22)$$

On remarque que les relations de transformation des composantes contravariantes sont le contraire de celles des vecteurs de base, les grandeurs  $A$  et  $A'$  s'échangeant, d'où l'appellation de ces composantes.

Soient  $x_i$  et  $x'_k$  les composantes covariantes du vecteur  $\mathbf{x}$  respectivement sur les bases  $(\mathbf{e}_i)$  et  $(\mathbf{e}'_k)$ . Remplaçons les vecteurs de base, exprimés par les formules (1.5.21) dans l'expression de définitions des composantes covariantes, il vient :

$$x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{x} \cdot (A_i'^k \mathbf{e}'_k) = A_i'^k (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}'_k) = A_i'^k x'_k \quad (1.5.23)$$

d'où la relation entre composantes covariantes dans chaque base :

$$x_i = A_i'^k x'_k \quad (1.5.24)$$

On obtient de même :

$$x'_k = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}'_k = \mathbf{x} \cdot (A_k^i \mathbf{e}_i) = A_k^i (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i) = A_k^i x_i \quad (1.5.25)$$

d'où la relation :

$$x'_k = A_k^i x_i \quad (1.5.26)$$

On remarque que **les composantes covariantes se transforment comme les vecteurs de base.**

### 1.5.6 Bases réciproques

Soit une base quelconque  $(\mathbf{e}_i)$  d'un espace vectoriel euclidien  $E_n$ . Par définition,  $n$  vecteurs  $\mathbf{e}^k$  qui vérifient les relations suivantes :

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^k = \delta_{ik} \quad (1.5.27)$$

sont appelés **les vecteurs réciproques des vecteurs  $\mathbf{e}_i$** . Ils seront notés avec des indices supérieurs. Chaque vecteur réciproque  $\mathbf{e}^k$  est orthogonal à tous les vecteurs  $\mathbf{e}_i$ , sauf pour  $k = i$ .

**Base réciproque** - Montrons que les vecteurs réciproques  $\mathbf{e}^k$  d'une base donnée  $(\mathbf{e}_i)$  sont linéairement indépendants. Pour cela, il faut montrer qu'une combinaison linéaire  $\lambda_k \mathbf{e}^k$  donne un vecteur nul,  $\lambda_k \mathbf{e}^k = \mathbf{0}$ , si et seulement si chaque coefficient  $\lambda_k$  est nul.

Soit  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$  un vecteur quelconque de  $E_n$ . Multiplions scalairement par  $\mathbf{x}$  la combinaison linéaire précédente  $\lambda_k \mathbf{e}^k$ , on obtient :

$$(\lambda_k \mathbf{e}^k) \cdot \mathbf{x} = (\lambda_k \mathbf{e}^k) \cdot (x^i \mathbf{e}_i) = \lambda_k x^i (\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_i) = \lambda_k x^i \delta_{ik} = \lambda_i x^i = 0 \quad (1.5.28)$$

Cette dernière égalité devant être vérifiée quels que soient les  $x^i$ , il est nécessaire que chaque  $\lambda_i$  soit nul et les vecteurs  $\mathbf{e}^k$  sont donc linéairement indépendants. Le système de  $n$  vecteurs réciproques forme donc une base appelée **la base réciproque de l'espace vectoriel  $E_n$** .

**Exemple** - Soit trois vecteurs  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  formant une base des vecteurs de la géométrie classique. On note  $v = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3)$ , où le symbole  $\wedge$  représente le produit vectoriel. Les vecteurs suivants :

$$\mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3}{v} ; \quad \mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1}{v} ; \quad \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2}{v} \quad (1.5.29)$$

vérifient les relations (1.5.27) et constituent le système réciproque des vecteurs  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . En cristallographie, ce sont les vecteurs de l'espace de Fourier associé.

**Expression des vecteurs réciproques** - Exprimons les vecteurs de base  $\mathbf{e}_i$  sur la base des vecteurs réciproques, soit :

$$\mathbf{e}_i = B_i'^k \mathbf{e}^k \quad (1.5.30)$$

Multiplions scalairement par  $\mathbf{e}_j$ , il vient :

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i = g_{ji} = \mathbf{e}_j \cdot (B_i'^k \mathbf{e}^k) = B_i'^k (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^k) = B_i'^k \delta_{jk} = B_i'^j \quad (1.5.31)$$

d'où :

$$\mathbf{e}_i = g_{ik} \mathbf{e}^k \quad (1.5.32)$$

Les  $n$  équations (1.5.32) sont analogues aux équations (1.5.12) et l'on obtient de même :

$$\mathbf{e}^k = g^{ik} \mathbf{e}_i \quad (1.5.33)$$

### 1.5.7 Décomposition d'un vecteur sur les bases réciproques

Soit  $(\mathbf{e}^k)$  une base réciproque de  $(\mathbf{e}_i)$  pour un espace vectoriel  $E_n$ . Un vecteur quelconque de  $E_n$  peut être décomposé sur la base  $(\mathbf{e}^k)$  sous la forme générale :

$$\mathbf{x} = \alpha^i \mathbf{e}^i \quad (1.5.34)$$

Multiplions scalairement cette expression par  $\mathbf{e}_j$ , on obtient :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j = x_j = (\alpha^i \mathbf{e}^i) \cdot \mathbf{e}_j = \alpha^i (\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j) = \alpha^i \delta_{ij} = \alpha^j \quad (1.5.35)$$

On obtient donc :

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}^i \quad (1.5.36)$$

La décomposition précédente du vecteur  $\mathbf{x}$  montre que **les quantités  $x_i$  sont les composantes contravariantes du vecteur  $\mathbf{x}$  par rapport à la base réciproque  $(\mathbf{e}^i)$ .**

Considérons à présent la décomposition de  $\mathbf{x}$  sur la base  $(\mathbf{e}_i)$ , soit :

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i \quad (1.5.37)$$

et multiplions scalairement cette dernière expression par  $\mathbf{e}^k$ , il vient :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^k = (x^i \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}^k = x^i (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^k) = x^i \delta_{ik} = x^k \quad (1.5.38)$$

La quantité  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^k$  représente la composante covariante de  $\mathbf{x}$  par rapport à la base  $(\mathbf{e}^k)$ . Cette composante covariante  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^k$  est égale à sa composante contravariante  $x^k$  sur la base  $(\mathbf{e}_i)$ .

**En conclusion, les bases réciproques jouent donc des rôles strictement symétriques, les composantes contravariantes dans une base devenant covariantes dans la base réciproque et vice-versa.**

### 1.5.8 Produits scalaires des vecteurs de base

Nous avons utilisé précédemment les produits scalaires des vecteurs de base qui ont été notés :

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (1.5.39)$$

**Produit scalaire des vecteurs réciproques** - Multiplions scalairement la relation (1.5.33) par un vecteur  $\mathbf{e}^j$ , il vient :

$$\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}^k = \mathbf{e}^j \cdot (g^{ik} \mathbf{e}_i) = g^{ik} (\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_i) = g^{ik} \delta_{ji} = g^{jk} \quad (1.5.40)$$

Pour  $k$  fixé, les quantités  $g^{jk}$  sont les composantes contravariantes du vecteur  $\mathbf{e}^k$  sur la base  $(\mathbf{e}_j)$ . Leur valeur est obtenue en effectuant le produit scalaire des vecteurs réciproques, soit :

$$\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}^k = g^{jk} \quad (1.5.41)$$

**Relations entre les produits scalaires des vecteurs réciproques** - Soit une base  $(\mathbf{e}_i)$  et une nouvelle base  $(\mathbf{e}^k)$  que l'on choisit égale à la base réciproque, soit  $\mathbf{e}^k = \mathbf{e}^k$ . Les formules de changement de base (1.5.21) s'écrivent dans le cas présent :

$$(a) \ \mathbf{e}_i = B_i'^k \mathbf{e}^k \ ; \ (b) \ \mathbf{e}'_k = \mathbf{e}^k = B_k^j \mathbf{e}_j \quad (1.5.42)$$

Les expressions (1.5.32) et (1.5.33) des vecteurs réciproques, nous montre que l'on a dans ce cas :

$$B_i'^k = g_{ik} \ ; \ B_k^j = g^{kj} \quad (1.5.43)$$

Les  $n^2$  relations scalaires (1.3.19) entre les éléments des matrices de changement de base, nous permettent alors d'écrire :

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_{ij} \quad (1.5.44)$$

Ces  $n^2$  équations permettent de calculer les quantités  $g_{ik}$  en fonction des  $g^{kj}$  et réciproquement. Si l'on note  $g_i^j$  le produit scalaire de deux vecteurs réciproques, on a :

$$g_i^j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_{ij} \quad (1.5.45)$$

Les relations (1.5.44) et (1.5.45) nous donnent alors :

$$g_{ik} g^{kj} = g_i^j \quad (1.5.46)$$

Nous allons voir par la suite que les différentes quantités définies par les produits scalaires des vecteurs de base ou des vecteurs réciproques constituent les composantes d'un tenseur.

## 1.6 Exercices résolus

### Exercice 1.1

Utiliser la convention de sommation pour écrire les expressions qui suivent ; préciser la valeur de  $n$  dans chaque cas ainsi que les indices muets et libres.

1.  $b_{j1} x_1 + b_{j2} x_2 + b_{j3} x_3 = 6$
2.  $b_{11} d_{11} + b_{12} d_{12} + b_{13} d_{13} + b_{14} d_{14} = C$

### Solutions

1. L'indice  $j$  est un indice libre ; notons  $k$  l'indice muet, il vient :

$$b_{jk} x_k = 6 \quad ; \quad n = 3$$

2. Les premiers indices, notés 1 des quantités  $b$  et  $d$  sont libres ; notons  $j$  l'indice de sommation, il vient :

$$b_{1j} d_{1j} = C \quad ; \quad n = 4$$

### Exercice 1.2

Pour  $n = 3$ , écrire explicitement l'expression  $M_{ijk} B^{ij}$ .

### Solutions

L'indice  $k$  est un indice libre ; on a deux indices de sommation  $i$  et  $j$  et le nombre de termes obtenus doit être égal à  $3^2 = 9$ .

$$\begin{aligned} M_{ijk}^{ij} &= M_{1jk} B^{1j} + M_{2jk} B^{2j} + M_{3jk} B^{3j} \\ &= M_{11k} B^{11} + M_{12k} B^{12} + M_{13k} B^{13} + M_{21k} B^{21} + M_{22k} B^{22} + M_{23k} B^{23} \\ &\quad + M_{31k} B^{31} + M_{32k} B^{32} + M_{33k} B^{33} \end{aligned}$$

### Exercice 1.3

Démontrer les identités suivantes :

1.  $a_{ij} x_i x_j = a_{ji} x_i x_j$
2.  $(a_{ik} - a_{ki}) x_i x_k = 0$

### Solutions

1. Effectuons un changement des indices muets en changeant  $i$  en  $j$  et  $j$  en  $i$ , il vient :

$$a_{ij} x_i x_j = a_{ji} x_j x_i = a_{ji} x_i x_j$$

2.

$$(a_{ik} - a_{ki}) x_i x_k = a_{ik} x_i x_k - a_{ki} x_i x_k$$

Utilisant le résultat précédent  $a_{ij} x_i x_j = a_{ji} x_i x_j$ , il vient :

$$a_{ik} x_i x_k = a_{ki} x_i x_k$$

d'où  $(a_{ik} - a_{ki}) x_i x_k = 0$

### Exercice 1.4

Démontrer qu'un déterminant d'ordre trois peut s'écrire sous la forme :

$$\det [a_{ijk}] = \epsilon^{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

### Solutions

Développons l'expression, il vient :

$$\begin{aligned} \epsilon^{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} &= \epsilon^{1jk} a_{11} a_{2j} a_{3k} + \epsilon^{2jk} a_{12} a_{2j} a_{3k} + \epsilon^{3jk} a_{13} a_{2j} a_{3k} \\ &= a_{11} (\epsilon^{1jk} a_{2j} a_{3k}) + a_{12} (\epsilon^{2jk} a_{2j} a_{3k}) + a_{13} (\epsilon^{3jk} a_{2j} a_{3k}) \end{aligned}$$

Les termes entre parenthèses sont les déterminants d'ordre deux. Le symbole d'antisymétrie  $\epsilon^{1jk}$  a pour valeur :

$$\epsilon^{111} = \epsilon^{112} = \epsilon^{113} = \epsilon^{121} = \epsilon^{122} = \epsilon^{131} = \epsilon^{133} = 0 \quad ; \quad \epsilon^{123} = 1 \quad ; \quad \epsilon^{132} = -1$$

d'où :

$$\epsilon^{1jk} a_{2j} a_{3k} = a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

On obtient de même :

$$\epsilon^{2jk} a_{2j} a_{3k} = a_{23} a_{31} - a_{21} a_{33} \quad ; \quad \epsilon^{3jk} a_{2j} a_{3k} = a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}$$

Regroupons avec le développement du début, on obtient :

$$\epsilon^{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

C'est l'expression du développement selon sa première ligne d'un déterminant d'ordre trois.

### Exercice 1.5

Considérons les vecteurs de base de  $E_3$  :

$$\mathbf{e}_1 = (a, 0, 0) \ ; \ \mathbf{e}_2 = (b, c, 0) \ ; \ \mathbf{e}_3 = (0, 0, d)$$

1. Démontrer que ces vecteurs sont linéairement indépendants.
2. Calculer la décomposition d'un vecteur donné :  $\mathbf{X} = (A, B, C)$  sur la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ .

### Solutions

1. Écrivons une combinaison linéaire des vecteurs  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  égale au vecteur nul, soit :

$$\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 = \lambda_1 (a, 0, 0) + \lambda_2 (b, c, 0) + \lambda_3 (0, 0, d) = (0, 0, 0)$$

On en déduit :  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ , d'où  $\lambda_1 = 0$

Ces trois vecteurs sont linéairement indépendants et forment une base de  $E_3$ .

2. Cherchons une décomposition du vecteur  $\mathbf{X} = (A, B, C)$  sous la forme :

$$\mathbf{X} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3$$

Écrivons cette décomposition sous la forme suivante :

$$\mathbf{X} = x^1 (a, 0, 0) + x^2 (b, c, 0) + x^3 (0, 0, d) = (A, B, C)$$

Identifiant les nombres correspondants entre eux, il vient :

$$x^1 a + x^2 b = A \ ; \ x^2 c = B \ ; \ x^3 d = C$$

d'où les valeurs des composantes :

$$x^1 = \frac{cA - bB}{ac} \ ; \ x^2 = \frac{B}{c} \ ; \ x^3 = \frac{C}{d}$$

### Exercice 1.6

On considère trois vecteurs de  $E_3$  :

$$\mathbf{A} = (1, 1, 1) \ ; \ \mathbf{B} = (0, 1, 1) \ ; \ \mathbf{C} = (0, 0, 1)$$

1. Montrer que ces trois vecteurs sont linéairement indépendants.
2. Déterminer une base orthogonale de  $E_3$  en utilisant le procédé d'orthogonalisation de Schmidt.

## Solutions

1. Les vecteurs  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  sont linéairement indépendants si le déterminant ayant pour éléments les composantes des vecteurs est différent de zéro. Le déterminant étant égal à un,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  sont des vecteurs indépendants.
2. Cherchons trois vecteurs  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  pour construire une base orthogonale de  $E_3$ . Posons :  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{A}$  et cherchons  $\mathbf{e}_2$  sous la forme :  $\mathbf{e}_2 = \alpha \mathbf{e}_1 + \mathbf{B}$ . Le coefficient  $\alpha$  se calcule en écrivant la relation d'orthogonalité :

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{A} \cdot (\alpha \mathbf{A} + \mathbf{B}) = 0$$

On obtient :

$$\alpha = -\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} = -\frac{2}{3}$$

Le vecteur  $\mathbf{e}_2$  est égal à :  $\mathbf{e}_2 = -\frac{2}{3}\mathbf{A} + \mathbf{B} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Le vecteur  $\mathbf{e}_3$  est cherché sous la forme :  $\mathbf{e}_3 = \beta \mathbf{e}_1 + \gamma \mathbf{e}_2 + \mathbf{C}$ . Écrivons les deux relations d'orthogonalité :

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \cdot (\beta \mathbf{e}_1 + \gamma \mathbf{e}_2 + \mathbf{C}) = 0 ; \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot (\beta \mathbf{e}_1 + \gamma \mathbf{e}_2 + \mathbf{C}) = 0$$

On obtient :

$$\mathbf{e}_3 = -\frac{1}{3}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 + \mathbf{C} = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

## Exercice 1.7

Soient deux vecteurs de  $E_3$  :

$$\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3) ; \quad \mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3)$$

et une base de  $E_3$  définie par :  $\{\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 1), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\}$

1. Déterminer les composantes contravariantes de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ .
2. Déterminer les composantes covariantes de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  à l'aide de deux manières différentes.
3. On considère les deux vecteurs particuliers :  $\mathbf{A} = (4, 1, 2)$  ;  $\mathbf{B} = (1, 3, 5)$

Calculer les valeurs numériques des composantes contravariantes et covariantes des vecteurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ .

4. Calculer le produit scalaire des vecteurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  à l'aide des composantes contravariantes et covariantes.

## *Solutions*

1. Les vecteurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  se décomposent sur la base donnée selon la méthode de l'exercice 1.5 ; on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= a_1 \mathbf{e}_1 + (a_2 - a_1) \mathbf{e}_2 + (a_3 - a_2) \mathbf{e}_3 \\ &= x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= b_1 \mathbf{e}_1 + (b_2 - b_1) \mathbf{e}_2 + (b_3 - b_2) \mathbf{e}_3 \\ &= y^1 \mathbf{e}_1 + y^2 \mathbf{e}_2 + y^3 \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

Par définition, les composantes contravariantes sont les nombres que multiplient les vecteurs de base. On a :

$$x^1 = a_1 ; \quad x^2 = a_2 - a_1 ; \quad x^3 = a_3 - a_2$$

$$y^1 = b_1 ; \quad y^2 = b_2 - b_1 ; \quad y^3 = b_3 - b_2$$

2. Les composantes covariantes  $x_j$  d'un vecteur  $\mathbf{A}$  sont, par définition, les produits scalaires de  $\mathbf{A}$  par chacun des vecteurs de base, soit :

$$\begin{aligned}x_j &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j = (x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_j \\ &= x^1 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_j) + x^2 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_j) + x^3 (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_j) \\ &= x^1 g_{1j} + x^2 g_{2j} + x^3 g_{3j}\end{aligned}$$

Les quantités  $g_{ij}$  sont égales à  $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ , soit :

$$g_{11} = 3 ; \quad g_{12} = g_{21} = 2 ; \quad g_{13} = g_{31} = 1$$

$$g_{22} = 2 ; \quad g_{23} = g_{32} = 1 ; \quad g_{33} = 1$$

Les composantes covariantes sont donc :

Vecteur  $\mathbf{A}$  :

$$\begin{aligned}x_1 &= a_1 g_{11} + (a_2 - a_1) g_{21} + (a_3 - a_2) g_{31} = a_1 + a_2 + a_3 \\ x_2 &= a_1 g_{12} + (a_2 - a_1) g_{22} + (a_3 - a_2) g_{32} = a_2 + a_3\end{aligned}$$

Vecteur  $\mathbf{B}$  :

$$y_1 = b_1 g_{11} + (b_2 - b_1) g_{21} + (b_3 - b_2) g_{31} = b_1 + b_2 + b_3$$

$$y_2 = b_1 g_{12} + (b_2 - b_1) g_{22} + (b_3 - b_2) g_{32} = b_2 + b_3$$

On peut également utiliser les expressions de définition des vecteurs pour calculer les composantes covariantes. On a :

Vecteur  $\mathbf{A}$  :

$$x_1 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1 = (a_1, a_2, a_3) \cdot (1, 1, 1) = a_1 + a_2 + a_3$$

$$x_2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_2 = (a_1, a_2, a_3) \cdot (0, 1, 1) = a_2 + a_3$$

$$x_3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_3 = a_3$$

Vecteur  $\mathbf{B}$  :

$$y_1 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_1 = (b_1, b_2, b_3) \cdot (1, 1, 1) = b_1 + b_2 + b_3$$

$$y_2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_2 = (b_1, b_2, b_3) \cdot (0, 1, 1) = b_2 + b_3$$

$$y_3 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_3 = b_3$$

3.  $\mathbf{A} = (4, 1, 2)$  ;  $\mathbf{B} = (1, 3, 5)$ .

Composantes contravariantes :

Vecteur  $\mathbf{A}$  :  $x^1 = 4$  ;  $x^2 = -3$  ;  $x^3 = 1$

Vecteur  $\mathbf{B}$  :  $y^1 = 1$  ;  $y^2 = 2$  ;  $y^3 = 2$

Composantes covariantes :

Vecteur  $\mathbf{A}$  :  $x_1 = 7$  ;  $x_2 = 3$  ;  $x_3 = 1$

Vecteur  $\mathbf{B}$  :  $y_1 = 9$  ;  $y_2 = 8$  ;  $y_3 = 5$

4. La formule (1.5.17) donne l'expression du produit scalaire sous la forme :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = x^1 y_1 + x^2 y_2 + x^3 y_3 = 17$$

### Exercice 1.8

Soient deux systèmes de vecteurs réciproques, notés  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  et  $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$ . Partant de la définition des vecteurs réciproques :  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_{ij}$ ,

1. Démontrer qu'on a :

$$\mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{V} ; \mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{V} ; \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{V} \text{ avec } V = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)$$

2. Démontrer qu'on a inversement :

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3}{V'} ; \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{e}^3 \times \mathbf{e}^1}{V'} ; \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^2}{V'} \text{ avec } V' = \mathbf{e}^1 \cdot (\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3)$$

### Solutions

1. Des vecteurs réciproques sont tels que :  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_{ij}$ . En particulier,  $\mathbf{e}^1$  est orthogonal à  $\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3$  et par suite on peut écrire :  $\mathbf{e}^1 = \lambda (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)$

$$\text{D'autre part : } \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}^1 = \lambda \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = 1$$

$$\text{d'où : } \lambda = \frac{1}{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)} ; \mathbf{e}^1 = \frac{(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)}{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)}$$

On obtient de même :

$$\mathbf{e}^2 = \frac{(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1)}{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)} ; \mathbf{e}^3 = \frac{(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)}{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)}$$

2. La démonstration de l'expression des vecteurs  $\mathbf{e}_i$  en fonction des vecteurs réciproques  $\mathbf{e}^j$  est identique à la démonstration précédente en intervertissant le rôle des vecteurs  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{e}^j$ . Les bases réciproques ont des rôles symétriques l'une par rapport à l'autre.

### Exercice 1.9

On considère trois vecteurs formant une base orthogonale de  $E_3$  :

$$\mathbf{e}_1 = (a, 0, 0) ; \mathbf{e}_2 = (0, b, 0) ; \mathbf{e}_3 = (0, 0, c)$$

1. Déterminer la base réciproque, notée  $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$ , de la base précédente.
2. Comparer les normes des vecteurs de chaque base
3. Considérons une base orthonormée :  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0) ; \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0) ; \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$

Déterminer la base réciproque.

## Solutions

1. Les vecteurs  $\mathbf{e}^j$  de la base réciproque sont tels que :

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_{ij}$$

Cherchons les vecteurs  $\mathbf{e}^j$  sous la forme :  $\mathbf{e}^j = (x_j, y_j, z_j)$  ; la relation précédente nous donne :

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}^1 = (a, 0, 0) \cdot (x_1, y_1, z_1) = a x_1 = 1;$$

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}^2 = (a, 0, 0) \cdot (x_2, y_2, z_2) = a x_2 = 0; \text{ etc}$$

Les vecteurs  $\mathbf{e}^j$  de la base réciproque sont :

$$\mathbf{e}^1 = \left(\frac{1}{a}, 0, 0\right) ; \mathbf{e}^2 = \left(0, \frac{1}{b}, 0\right) ; \mathbf{e}^3 = \left(0, 0, \frac{1}{c}\right)$$

2. Les vecteurs de la base  $\{\mathbf{e}_i\}$  ont pour norme :

$$\|\mathbf{e}_1\| = a ; \|\mathbf{e}_2\| = b ; \|\mathbf{e}_3\| = c$$

Ceux de la base réciproque ont pour norme les inverses des grandeurs précédentes :

$$\|\mathbf{e}^1\| = \frac{1}{a} = \frac{1}{\|\mathbf{e}_1\|} ; \|\mathbf{e}^2\| = \frac{1}{b} = \frac{1}{\|\mathbf{e}_2\|} ; \|\mathbf{e}^3\| = \frac{1}{c} = \frac{1}{\|\mathbf{e}_3\|}$$

3. Pour une base orthonormée, les vecteurs de la base réciproque sont égaux aux vecteurs de la base.

## Exercice 1.10

On considère dans un plan , un système d'axes orthogonaux portant les vecteurs  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  de longueur unité (Fig.1.3). Une rotation des axes dans le plan d'un angle  $\alpha$ , transforme ces vecteurs respectivement en  $\mathbf{e}'_1$  et  $\mathbf{e}'_2$ .

1. Déterminer les expressions de  $\mathbf{e}'_1$  et  $\mathbf{e}'_2$  sur la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  et écrire les expressions des  $A_k^i$ .
2. Faire de même pour  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  sur la base  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$  et déterminer les  $A_k^i$ .
3. Soient  $x^1$  et  $x^2$  les composantes du vecteur  $\mathbf{OM}$  sur la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  et  $x'^1, x'^2$  sur la base  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ . Déterminer  $x^1$  et  $x^2$  en fonction de  $x'^1, x'^2$  et inversement.

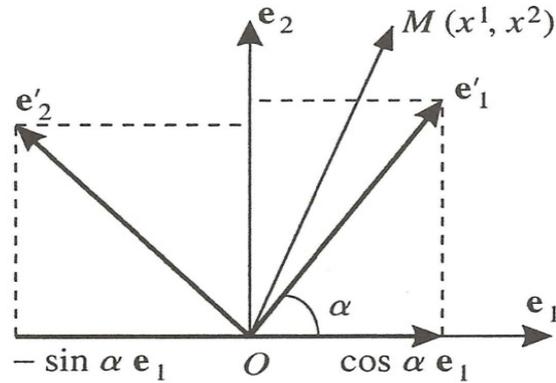


FIGURE 1.3

### Solutions

1. Les composants de  $\mathbf{e}'_1$  sont égales à ses projections sur les axes portant  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  ; de même pour  $\mathbf{e}'_2$  (Fig.1.3). On a donc :

$$\mathbf{e}'_1 = \cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}'_2 = -\sin \alpha \mathbf{e}_1 + \cos \alpha \mathbf{e}_2$$

On obtient :

$$A_1^1 = \cos \alpha ; A_1^2 = \sin \alpha ; A_2^1 = -\sin \alpha ; A_2^2 = \cos \alpha$$

2. Un raisonnement géométrique direct (ou l'inversion des relations précédentes) nous donne :

$$\mathbf{e}_1 = \cos \alpha \mathbf{e}'_1 - \sin \alpha \mathbf{e}'_2$$

$$\mathbf{e}_2 = \sin \alpha \mathbf{e}'_1 + \cos \alpha \mathbf{e}'_2$$

On obtient :

$$A_1'^1 = \cos \alpha ; A_1'^2 = -\sin \alpha ; A_2'^1 = \sin \alpha ; A_2'^2 = \cos \alpha$$

3. On peut utiliser les formules de changement de base (1.3.16) et (1.3.17) mais nous allons les établir directement. Le vecteur  $\mathbf{OM}$  s'écrit :

$$\mathbf{OM} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 = (x^1 \cos \alpha + x^2 \sin \alpha) \mathbf{e}'_1 + (-x^1 \sin \alpha + x^2 \cos \alpha) \mathbf{e}'_2$$

$$= x'^1 \mathbf{e}'_1 + x'^2 \mathbf{e}'_2$$

Identifiant les composantes entre elles, il vient :

$$x'^1 = x^1 \cos \alpha + x^2 \sin \alpha ; ; x'^2 = -x^1 \sin \alpha + x^2 \cos \alpha$$

Un calcul similaire nous donne :

$$x^1 = x'^1 \cos \alpha - x'^2 \sin \alpha ; ; x^2 = x'^1 \sin \alpha + x'^2 \cos \alpha$$

Vérifions la formule (1.3.16), par exemple, on a :  $x'^k = A_i'^k x^i$  soit :

$$x'^1 = x^1 A_1'^1 + x^2 A_2'^1 = x^1 \cos \alpha + x^2 \sin \alpha$$

$$x'^2 = x^1 A_1'^2 + x^2 A_2'^2 = -x^1 \sin \alpha + x^2 \cos \alpha$$

# Chapitre 2

## Exemples de tenseurs euclidiens

On donne, dans ce chapitre, divers exemples de tenseurs utilisés en physique, afin de se familiariser avec des êtres mathématiques nouveaux. Traitant de cas particuliers, sans définition ni théorie générale des tenseurs, on se limite à certains aspects des tenseurs qui seront définis et étudiés au cours du chapitre suivant.

La généralisation de la notion de vecteur nous a conduit à l'étude des espaces vectoriels à  $n$  dimensions. Les tenseurs sont également des vecteurs de dimension quelconques mais qui possèdent des propriétés supplémentaires par rapport aux vecteurs. Ces propriétés résultent du fait que les tenseurs sont créés à partir d'autres vecteurs. Pour le physicien, le calcul tensoriel s'intéresse en premier lieu à la manière dont les composantes des tenseurs se transforment lors d'un changement de base des espaces vectoriels dont ils sont issus. Nous commencerons donc par étudier ces propriétés vis-à-vis des changements de base. On se limite dans ce chapitre aux vecteurs et aux tenseurs euclidiens.

### 2.1 Changement de base

Un tenseur est, en pratique, souvent uniquement défini et utilisé sous la forme de ses composantes. Ces dernières peuvent être exprimées sous forme covariante ou contravariante comme pour tout vecteur. Mais un nouveau type de composantes va apparaître pour les tenseurs, ce sont les composantes mixtes. Ces trois types de composantes constituent des décompositions des tenseurs euclidiens sur des bases différentes.

#### 2.1.1 Composantes covariantes du tenseur fondamental

Au cours du chapitre précédent, nous avons utilisé les quantités  $g_{ij}$ , définies à partir du produit scalaire des vecteurs de base  $\mathbf{e}_i$  d'un espace vectoriel pré-euclidien  $E_n$  à  $n$  dimensions, par :

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (2.1.1)$$

Ces  $n^2$  quantités constituent les composantes covariantes d'un tenseur appelé **le tenseur fondamental ou tenseur métrique**.

**Exemple** - Considérons des vecteurs de base de l'espace vectoriel  $E_3$  des triplets de nombres :  $\mathbf{e}_1 = (2, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 3)$ . Définissons un produit scalaire des vecteurs de base en choisissant, par exemple, les valeurs suivantes :

$$g_{11} = 4, \quad g_{22} = 1, \quad g_{33} = 9, \quad g_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \quad (2.1.2)$$

Ces valeurs satisfont bien aux propriétés axiomatiques d'un produit scalaire. Ainsi qu'on le verra au chapitre suivant, les tenseurs sont des vecteurs ayant des propriétés particulières. On pourrait donc écrire le tenseur fondamental sous la forme classique d'un vecteur, noté  $\mathbf{g}$ , dont les composantes seraient ordonnées en une ligne, à savoir :

$$\mathbf{g} = [g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{21}, g_{22}, g_{23}, g_{31}, g_{32}, g_{33}] = [4, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 9] \quad (2.1.3)$$

Cependant, on classe généralement les composantes des tenseurs sous forme d'un tableau ordonné, soit dans le cas présent :

$$[g_{ij}] = \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad (2.1.4)$$

Ce tableau constitue **la matrice du tenseur**.

**Changement de base** - Étudions comment varient les quantités  $g_{ij}$  lorsque l'on effectue un changement de base de l'espace vectoriel  $E_n$ . Soit  $\mathbf{e}'^k$  une autre base liée à la précédente par :

$$(a) \quad \mathbf{e}_i = A_i^{lk} \mathbf{e}'_k \quad ; \quad (b) \quad \mathbf{e}'_k = A_k^i \mathbf{e}_i \quad (2.1.5)$$

Substituant la relation (2.1.5)(a) dans l'expression de  $g_{ij}$  donnée par (2.1.1), il vient :

$$g_{ij} = (A_i^{lk} \mathbf{e}'_k) \cdot (A_j^{ll} \mathbf{e}'_l) = (A_i^{lk} A_j^{ll}) (\mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}'_l) \quad (2.1.6)$$

Dans la nouvelle base  $\mathbf{e}'_k$ , les produits scalaires des vecteurs de base sont des quantités telles que :

$$g'_{kl} = \mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}'_l \quad (2.1.7)$$

qui apparaissent dans la relation (2.1.6). On a donc finalement pour l'expression **des composantes covariantes**  $g_{ij}$  lors d'un changement de base :

$$g_{ij} = (A_i^{lk} A_j^{ll}) g'_{kl} \quad (2.1.8)$$

Rapprochons cette dernière relation de la formule de transformation **des composantes covariantes d'un vecteur**  $\mathbf{x}$  de  $E_n$ , donnée par l'expression (1.5.24), à savoir :

$$x_i = A_i'^k x'_k \quad (2.1.9)$$

**Les composantes covariantes  $g_{ij}$  du tenseur fondamental ne se transforment plus comme les composantes covariantes d'un vecteur mais en faisant intervenir le produit des quantités  $A_i'^k$ .**

Substituons à présent la relation (2.1.5)(b) dans l'expression (2.1.7), il vient :

$$g'_{ij} = A_i^k A_j^l g_{kl} \quad (2.1.10)$$

Rapprochons également cette dernière relation de l'expression (1.5.26) donnant le changement des composantes covariantes d'un vecteur  $\mathbf{x}$ , à savoir :

$$x'_k = A_k^i x_i \quad (2.1.11)$$

Là également ce sont les produits des quantités  $A_k^i$  qui interviennent dans la formule de changement de base des composantes covariantes du tenseur alors que les composantes covariantes d'un vecteur se transforment à partir des quantités  $A_k^i$ . De manière générale, une suite de  $n^2$  quantités  $t_{ij}$  qui se transforment, lors d'un changement de base de  $E_n$ , selon les relations (2.1.8) et (2.1.10), à savoir :

$$(a) \quad t_{ij} = (A_i'^k A_j^l) t'_{kl} \quad ; \quad (b) \quad t'_{kl} = A_k^i A_l^j t_{ij} \quad (2.1.12)$$

constituent, par définition, **les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre deux sur  $E_n$ .**

## 2.1.2 Produit tensoriel de deux vecteurs

**Composantes contravariantes** - Considérons un espace vectoriel euclidien  $E_n$  de base  $(\mathbf{e}_i)$  et soient deux vecteurs de  $E_n$  :  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{y} = y^j \mathbf{e}_j$ . Formons les produits deux à deux des composantes  $x^i$  et  $y^j$ , soit :

$$u^{ij} = x^i y^j \quad (2.1.13)$$

On obtient ainsi  $n^2$  quantités qui constituent **les composantes contravariantes d'un tenseur d'ordre deux appelé le produit tensoriel du vecteur  $\mathbf{x}$  par le vecteur  $\mathbf{y}$ .** Étudions les propriétés de changement de base de ses composantes. Utilisons pour cela les formules de changement de base des composantes contravariantes d'un vecteur donné par (1.5.22), à savoir

$$(a) \quad x^i = A_k^i x'^k \quad ; \quad (b) \quad x'^k = A_i^k x^i \quad (2.1.14)$$

Remplaçons dans la relation (2.1.13) les composantes  $x^i$  et  $y^j$  par leur expression (2.1.14)(a), il vient :

$$u^{ij} = x^i y^j = (A_k^i x'^k)(A_l^j y'^l) = A_k^i A_l^j (x'^k y'^l) = A_k^i A_l^j u'^{kl} \quad (2.1.15)$$

Les quantités  $u'^{kl}$  sont les nouvelles composantes :

$$u'^{kl} = x'^k y'^l \quad (2.1.16)$$

La formule de transformation des  $n^2$  quantités  $u^{ij}$  lors d'un changement de base de  $E_n$  est donc finalement :

$$u^{ij} = A_k^i A_l^j u'^{kl} \quad (2.1.17)$$

Une telle relation de changement de base caractérise les composantes contravariantes d'un tenseur d'ordre deux.

On obtient de même les nouvelles composantes contravariantes en fonction des anciennes en substituant la relation (2.1.14)(b) dans l'expression (2.1.16), soit :

$$u'^{kl} = A_i^k A_j^l u^{ij} \quad (2.1.18)$$

De manière générale, un ensemble de  $n^2$  quantités  $u^{ij}$  qui se transforment, lors d'un changement de base de  $E_n$ , selon les relations (2.1.17) et (2.1.18) constituent, par définition, **les composantes contravariantes d'un tenseur d'ordre deux**.

**Composantes covariantes** - On peut former de même les produits deux à deux des composantes covariantes  $x_i$  et  $y_i$  des vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ , soit :

$$u_{ij} = x_i y_j \quad (2.1.19)$$

Les formules de changement de base des composantes covariantes des vecteurs sont données par (1.5.24) et (1.5.26), à savoir :

$$(a) \quad x_i = A_i^k x'_k \quad ; \quad (b) \quad x'_k = A_k^i x_i \quad (2.1.20)$$

Substituons la relation (2.1.20)(a) dans le produit (2.1.19), il vient :

$$u_{ij} = (A_i^k x'_k) (A_j^l y'_l) = A_i^k A_j^l (x'_k y'_l) = A_i^k A_j^l u'_{kl} \quad (2.1.21)$$

C'est la formule (2.1.12)(a) de changement de base des composantes covariantes d'un tenseur d'ordre deux. On vérifie de même que l'on a :

$$u'_{kl} = A_k^i A_l^j u_{ij} \quad (2.1.22)$$

en substituant la relation (2.1.20)(b) dans le produit :  $u'_{kl} = x'_k y'_l$ .

Les  $n^2$  quantités  $u_{ij}$  constituent **les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre deux**. On verra par la suite que ce sont les composantes covariantes du produit tensoriel de  $\mathbf{x}$  par  $\mathbf{y}$  dont les composantes contravariantes sont données par la relation (2.1.13).

**Composantes mixtes** - Formons à présent  $n^2$  quantités en multipliant deux à deux les composantes covariantes du vecteur  $\mathbf{x}$  par les composantes contravariantes de  $\mathbf{y}$ , on obtient :

$$u_i^j = x_i y^j \quad (2.1.23)$$

Effectuons un changement de base dans cette dernière relation en tenant compte des expressions (2.1.20)(a) et (2.1.14)(a), on obtient :

$$u_i^j = (A_i^{lk} x'_k) (A_l^j y'^l) = (A_i^{lk} A_l^j) x'_k y'^l \quad (2.1.24)$$

avec  $u_k^l = x'_k y'^l$ , on obtient la relation :

$$u_i^j = (A_i^{lk} A_l^j) u_k^l \quad (2.1.25)$$

Cette relation de changement de base caractérise **les composantes mixtes d'un tenseur d'ordre deux**. Inversement, on peut vérifier que l'on a :

$$u_k^l = (A_k^i A_j^l) u_i^j \quad (2.1.26)$$

Ces composantes mixtes constituent également des composantes du produit tensoriel de  $\mathbf{x}$  par  $\mathbf{y}$ , selon une certaine base.

De manière générale, une suite de  $n^2$  quantités  $u_i^j$  qui se transforment, lors d'un changement de base de  $E_n$ , selon les relations (2.1.25) et (2.1.26) constituent, par définition, **les composantes mixtes d'un tenseur d'ordre deux**.

Toutes les composantes d'un tenseur, covariantes, contravariantes et mixtes, sont liées entre elles, par des relations que l'on déterminera au chapitre suivant, et elles constituent la décomposition d'un tenseur sur différentes bases.

## 2.2 Propriétés de changement de base

### 2.2.1 Tenseur d'ordre deux

Regroupons les propriétés de changement de base des composantes d'un tenseur d'ordre deux. Soit un espace vectoriel euclidien  $E_n$ , ayant pour bases  $(\mathbf{e}_i)$  et  $(\mathbf{e}'_k)$  liées par les relations :

$$(a) \quad \mathbf{e}_i = A_i^{lk} \mathbf{e}'_k \quad ; \quad (b) \quad \mathbf{e}'_k = A_k^i \mathbf{e}_i \quad (2.2.1)$$

On suppose que l'on se donne une suite de  $n^2$  quantités  $t_{ij}$  qui se transforment, lors d'un changement de base de  $E_n$ , selon les relations suivantes :

$$(a) \quad t_{ij} = (A_i^{lk} A_j^l) t'_{kl} \quad ; \quad (b) \quad t'_{kl} = A_k^i A_l^j t_{ij} \quad (2.2.2)$$

**Par définition, si  $n^2$  quantités se transforment selon les relations (2.2.2), elles constituent les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre deux.** Lorsque  $n^2$  quantités  $t^{ij}$  se transforment lors d'un changement de base de  $E_n$  selon les relations suivantes :

$$(a) \quad t^{ij} = A_k^i A_l^j t'^{kl} \quad ; \quad (b) \quad t'^{kl} = A_i^{lk} A_j^l t^{ij} \quad (2.2.3)$$

**ces  $n^2$  quantités constituent, par définition, les composantes contravariantes d'un tenseur d'ordre deux.**

Enfin lorsque  $n^2$  quantités  $t_i^j$  se transforment lors d'un changement de base de  $E_n$  selon les relations :

$$(a) \quad t_i^j = (A_i^{k'} A_l^j) t_k^l \quad ; \quad (b) \quad t_k^l = (A_k^i A_j^l) t_i^j \quad (2.2.4)$$

ces quantités sont, par définition, les composantes mixtes d'un tenseur d'ordre deux.

Nous allons par la suite pouvoir identifier différents types de composantes d'un tenseur d'ordre deux en mettant en évidence leurs propriétés de changement de base.

## 2.2.2 Combinaisons linéaires de tenseurs

**Combinaisons de produits tensoriels :** On peut former des composantes d'autres tenseurs en combinant entre elles les composantes de différents produits tensoriels définis à l'aide des vecteurs d'un même espace vectoriel. Considérons par exemple les composantes contravariantes des produits tensoriels des vecteurs  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  et des vecteurs  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{z}$ , soit :

$$u^{ij} = x^i y^j \quad ; \quad v^{ij} = w^i z^j \quad (2.2.5)$$

Formons les quantités suivantes :

$$t^{ij} = u^{ij} + \lambda v^{ij} \quad (2.2.6)$$

Les  $n^2$  quantités  $t^{ij}$  vérifient également les formules générales de changement de base. On a en effet, en substituant la relation (2.1.17) de transformation des composantes contravariantes d'un produit tensoriel dans l'expression (2.2.6) :

$$t^{ij} = (A_k^i A_l^j u'^{kl}) + \lambda (A_k^i A_l^j v'^{kl}) = A_k^i A_l^j t'^{kl} \quad (2.2.7)$$

avec  $t'^{kl} = u'^{kl} + \lambda v'^{kl}$ .

Les  $n^2$  quantités  $t^{ij}$ , vérifiant la relation de changement de base, constituent donc également des composantes contravariantes d'un tenseur d'ordre deux. On verra par la suite que les  $t^{ij}$ , s'ils constituent bien les composantes d'un tenseur, ne forment pas nécessairement les composantes d'un produit tensoriel de deux vecteurs.

On vérifierait de même, pour des combinaisons linéaires de composantes covariantes ou mixtes, les autres formules de changement de base. Par suite, toute combinaison linéaire de produits tensoriels de deux vecteurs satisfait aux formules de changement de base des tenseurs d'ordre deux.

**Combinaisons de tenseurs -** Considérons  $n^2$  quantités  $u_{ij}$  et  $n^2$  quantités  $v_{ij}$  constituant respectivement les composantes covariantes de deux tenseurs distincts formés à partir des vecteurs d'un même espace vectoriel  $E_n$ . Toute combinaison linéaire de la forme :

$$t_{ij} = u_{ij} + \lambda v_{ij} \quad (2.2.8)$$

vérifie également les formules de changement de base (2.2.2), la démonstration étant la même que pour les produits tensoriels. Il en est de même pour des composantes contravariantes et mixtes. On peut également combiner linéairement plus de deux tenseurs et on obtiendra toujours des combinaisons de composantes qui vérifient les formules de changement de base.

Par suite, toute combinaison linéaire de composantes de tenseurs donne des composantes de nouveaux tenseurs.

### 2.2.3 Tenseur d'ordre trois

**Produit tensoriel de plusieurs vecteurs :** On peut utiliser un nombre quelconque de vecteurs pour réaliser des produits tensoriels. Considérons par exemple trois vecteurs de  $E_n$  :  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{y} = y^j \mathbf{e}_j$ ,  $\mathbf{z} = z^k \mathbf{e}_k$  et effectuons tous les produits entre leurs composantes contravariantes tels que :

$$u^{ijk} = x^i y^j z^k \quad (2.2.9)$$

Ces  $n^3$  quantités constituent les composantes contravariantes du produit tensoriel des vecteurs  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$ . Ce produit tensoriel est un tenseur d'ordre trois. Après un changement de base de  $E_n$ , on obtient les relations suivantes entre les anciennes composantes contravariantes  $u^{ijk}$  et les nouvelles  $u'^{lmp}$  :

$$u'^{ijk} = A_l^i A_m^j A_p^k u'^{lmp} \quad (2.2.10)$$

avec  $u'^{lmp} = x'^l y'^m z'^p$ . Cette formule est obtenue par des substitutions analogues à celles effectuées précédemment pour les produits tensoriels de deux vecteurs. Elle généralise la formule (2.2.3)(a).

On peut calculer de même les composantes covariantes  $u_{ijk}$  du produit tensoriel des vecteurs  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$ , à partir de leurs composantes covariantes, soit :

$$u_{ijk} = x_i y_j z_k \quad (2.2.11)$$

On obtient la formule de changement de base suivante pour les composantes covariantes :

$$u_{ijk} = A_i^l A_j^m A_k^p u'_{lmp} \quad (2.2.12)$$

formule qui généralise la relation (2.2.2)(a).

Enfin, on obtient un ensemble de diverses composantes mixtes en combinant les composantes covariantes et contravariantes des vecteurs  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$ . On peut former par exemple les  $n^3$  quantités :

$$u^i_{jk} = x^i y_j z_k \quad (2.2.13)$$

La formule de changement de base est donnée, ainsi qu'on le vérifie en effectuant les substitutions données par (2.1.20), par :

$$u^i_{jk} = A_l^i A_j^m A_k^p u'_{lmp} \quad (2.2.14)$$

**Changement de base des tenseurs d'ordre trois** - Prenons l'exemple des composantes mixtes  $t_{jk}^i$  d'un tenseur d'ordre trois. Si l'on se donne  $n^3$  quantités notées  $t_{jk}^i$  associées à un espace vectoriel  $E_n$ , qui se transforment lors d'un changement de base de  $E_n$  selon les relations suivantes :

$$(a) \quad u_{jk}^i = A_l^i A_j^m A_k^p u_{mp}^l \quad ; (b) \quad u_{mp}^l = A_i^l A_m^j A_p^k u_{jk}^i \quad (2.2.15)$$

ces  $n^3$  quantités constituent, par définition, les composantes mixtes d'un tenseur d'ordre trois. Les formules (2.2.10) et (2.2.12) servent de même à caractériser respectivement les composantes contravariantes et covariantes des tenseurs d'ordre trois. Ainsi qu'on le voit, ces formules généralisent celles qui servent à définir les composantes des tenseurs d'ordre deux.

Les relations précédentes font apparaître la règle générale des formules de changement de base des composantes d'un tenseur. Selon la variance des indices de ces composantes, on utilisera les quantités  $A$  ou  $A'$  qui définissent le changement de base des vecteurs de  $E_n$ .

On verra par la suite que les différentes composantes d'un tenseur euclidien se calculent les unes en fonctions des autres et constituent les différentes décompositions d'un tenseur sur des bases différentes.

## 2.3 Exemples de tenseurs en Physique

### 2.3.1 Tenseur d'inertie

On donne quelques exemples de tenseurs usuels en Physique. Calculons le moment d'inertie d'une masse ponctuelle  $m$ , située en un point  $M(x, y, z)$  par rapport à une droite  $\Delta$  passant par l'origine d'un référentiel cartésien  $Oxyz$  dont les vecteurs de base sont orthonormés. Dans un tel référentiel, les composantes contravariantes sont identiques aux composantes covariantes. Le moment d'inertie de cette masse, située à la distance  $d$  de la droite  $\Delta$ , est :

$$\mathcal{M} = m d^2 \quad (2.3.1)$$

Soient  $a_1, a_2, a_3$ , les cosinus directeurs de la droite  $\Delta$  par rapport respectivement aux axes  $Ox, Oy$  et  $Oz$ . On a :

$$\begin{aligned} d^2 &= (x^2 + y^2 + z^2) - (a_1x + a_2y + a_3z)^2 \\ &= x^2(1 - a_1^2) + y^2(1 - a_2^2) + z^2(1 - a_3^2) - 2a_1a_2xy - 2a_1a_3zx - 2a_2a_3yz \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

**Produit tensoriel du vecteur OM avec lui-même** - On voit apparaître dans cette dernière relation les composantes du produit tensoriel du vecteur  $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ , de composantes  $x, y, z$ , avec lui-même. Le moment d'inertie peut donc s'exprimer en fonction des composantes de ce produit tensoriel.

Pour cela, introduisons les notations suivantes :  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ , et notons  $r_{ij}$  les composantes du produit tensoriel du vecteur  $\mathbf{r}$  avec lui-même, soit :

$$r_{ij} = x_i y_j \quad (2.3.3)$$

avec  $i, j = 1, 2, 3$ . En ordonnant ses composantes sous la forme d'un tableau, on obtient pour ce produit tensoriel :

$$[r_{ij}] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{bmatrix} \quad (2.3.4)$$

C'est la matrice des composantes du tenseur. Le moment d'inertie  $\mathcal{M} = m d^2$  de la masse  $m$  peut donc s'écrire en fonction des composantes  $r_{ij}$ .

**Composantes du tenseur d'inertie** - Cependant l'expression de  $\mathcal{M}$  peut être mise sous une forme plus condensée. Compte tenu de la relation :

$$(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 = 1 \quad (2.3.5)$$

l'expression de  $\mathcal{M}$  s'écrit, avec la convention de sommation pour  $i, j = 1, 2, 3$  :

$$\mathcal{M} = a_i a_j I_{ij} \quad (2.3.6)$$

où les 9 quantités  $I_{ij}$  sont les composantes du tenseur moment d'inertie ou tenseur d'inertie, qui ont pour expression :

$$I_{ij} = m(\delta_{ij}x_kx_k - x_ix_j) \quad (2.3.7)$$

avec  $i, j, k = 1, 2, 3$ . C'est un tenseur d'ordre deux ainsi qu'on peut le vérifier en effectuant un changement de base.

Si l'on permute deux indices, l'expression des composantes  $I_{ij}$  reste inchangée :  $I_{ij} = I_{ji}$ . On dit que **le tenseur est symétrique**.

Écrivons l'expression détaillée des différentes composantes  $I_{ij}$  à l'aide des notations classiques  $x, y, z$  sous forme d'une matrice :

$$[I_{ij}] = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & z^2 + x^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \quad (2.3.8)$$

Les quantités  $I_{11}, I_{22}, I_{33}$ , représentent les moments d'inertie par rapport aux axes de coordonnées correspondants; les quantités  $I_{ij}$ , pour  $i \neq j$ , s'appellent **les produits d'inertie**.

Pour un ensemble de masses  $m_k$ , située chacune en un point  $M_k$ , et formant un système indéformable, on peut définir un tenseur d'inertie pour chaque masse. Le tenseur d'inertie du système a alors pour composantes la somme des composantes des tenseurs d'inertie relatifs à chacune des masses. Si l'on a une répartition continue de masse, formant un solide, les composantes du moment d'inertie du solide s'obtiennent par intégration sur son volume.

La donnée des composantes du tenseur d'inertie, caractérisant un solide, permet le calcul d'une grandeur scalaire, le moment d'inertie, par rapport à une droite quelconque dont on se donne les cosinus directeurs.

### 2.3.2 Tenseur vitesse de rotation instantanée d'un solide

Soit un solide, ayant un point fixe  $O$ , auquel on attache un référentiel  $Ox^1x^2x^3$  dont les vecteurs de bases sont notés  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Étudions le mouvement de rotation du solide, autour d'un axe instantané de rotation passant par le point  $O$ , dans un trièdre fixe de référence  $Ouvw$ . Au cours de la rotation les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  se déplacent par rapport au trièdre fixe et peuvent être considérés comme des vecteurs dépendant du temps  $t$ , soit  $\mathbf{e}_i(t)$ . Écrivons la décomposition du vecteur dérivée  $d\mathbf{e}_i/dt$  sur la base  $(\mathbf{e}_j)$ , soit :

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \omega_i^j \mathbf{e}_j \quad ; i, j = 1, 2, 3 \quad (2.3.9)$$

**Composantes du tenseur vitesse de rotation instantanée** - On va voir que les quantités  $\omega_j^i$  constituent les composantes mixtes d'un tenseur d'ordre deux. Pour cela, considérons le changement de base :

$$(a) \quad \mathbf{e}_i = A_i^k \mathbf{e}'_k \quad ; \quad (b) \quad \mathbf{e}'_j = A_j^i \mathbf{e}_i \quad (2.3.10)$$

Les nouvelles quantités  $\omega_i^{\prime j}$  sont données par la relation :

$$\frac{d\mathbf{e}'_j}{dt} = \omega_j^{\prime k} \mathbf{e}'_k \quad ; i, j = 1, 2, 3 \quad (2.3.11)$$

Compte tenu de l'expression (2.3.10)(b) des vecteurs  $\mathbf{e}^{\prime j}$ , la dérivée s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{e}'_j}{dt} = \frac{d}{dt}(A_j^i \mathbf{e}_i) = A_j^i \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \quad (2.3.12)$$

La dérivation par rapport à  $t$  ne porte pas sur les paramètres  $A_j^i$  de changement de base puisque ces derniers ne dépendent pas du temps. On a donc :

$$\omega_j^{\prime k} \mathbf{e}'_k = A_j^i \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = A_j^i \omega_i^l \mathbf{e}_l = (A_j^i \omega_i^l)(A_l^k \mathbf{e}'_k) \quad (2.3.13)$$

Identifiant les coefficients des vecteurs  $\mathbf{e}'_k$  dans la relation (2.3.13), on obtient :

$$\omega_j^{\prime k} = A_j^i A_l^k \omega_i^l \quad (2.3.14)$$

Les 9 quantités  $\omega_i^j$  se transforment comme les composantes mixtes d'un tenseur d'ordre deux, selon les formules de changement de base (2.2.4)(b). Elles constituent les composantes du **tenseur vitesse de rotation instantanée** du solide.

La position d'un point  $M(x^1, x^2, x^3)$  du solide peut être repérée par un vecteur  $\mathbf{OM} = x^i \mathbf{e}_i$  de coordonnées  $x^i$  fixes dans le référentiel  $Ox^1x^2x^3$ .

La vitesse  $\mathbf{v}$  du point  $M$  s'écrit :

$$\mathbf{v} = v^j \mathbf{e}_j = \frac{d\mathbf{OM}}{dt} = \frac{d(x^i \mathbf{e}_i)}{dt} = x^i \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = x^i \omega_i^j \mathbf{e}_j \quad (2.3.15)$$

Identifiant les coefficients des vecteurs  $\mathbf{e}_j$  dans cette dernière relation, on voit que les composantes  $v^j$  du vecteur vitesse s'expriment à l'aide des composantes du tenseur  $[\omega_i^j]$  sous la forme :

$$v^j = \omega_i^j x^i \quad (2.3.16)$$

**Tenseur antisymétrique** - Étudions les propriétés du tenseur vitesse de rotation instantanée. Considérons pour cela une base orthonormée  $\mathbf{e}_i$ , d'orientation directe, pour laquelle on a :  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ . On peut écrire :

$$\frac{d(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)}{dt} = \mathbf{e}_i \cdot \frac{d(\mathbf{e}_j)}{dt} + \mathbf{e}_j \cdot \frac{d(\mathbf{e}_i)}{dt} = 0 \quad (2.3.17)$$

Substituons, dans cette dernière relation, l'expression (2.3.9) des dérivées des vecteurs de base, on obtient :

$$\mathbf{e}_i \cdot (\omega_j^k \mathbf{e}_k) + \mathbf{e}_j \cdot (\omega_i^k \mathbf{e}_k) = \omega_j^k (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) + \omega_i^k (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k) = 0 \quad (2.3.18)$$

Compte tenu de la relation d'orthonormalité entre les vecteurs de base, il vient :

$$\omega_j^k \delta_{ik} + \omega_i^k \delta_{jk} = 0 \quad (2.3.19)$$

soit :

$$\omega_j^i = -\omega_i^j \quad (2.3.20)$$

Un tel tenseur est dit antisymétrique. Des 9 composantes  $\omega_i^j$ , il n'y a donc que trois d'entre elles qui caractérisent le tenseur et qui constituent **ses composantes strictes**.

**Vecteur rotation instantanée du solide** - On pose classiquement pour les composantes strictes du tenseur vitesse de rotation instantanée :

$$\omega_1^2 = r \quad ; \quad \omega_2^3 = p \quad ; \quad \omega_3^1 = q \quad (2.3.21)$$

et l'on forme le vecteur suivant :

$$\mathbf{w} = p \mathbf{e}_1 + q \mathbf{e}_2 + r \mathbf{e}_3 \quad (2.3.22)$$

Ce vecteur constitue un exemple de vecteur adjoint d'un tenseur antisymétrique. Dans le cas présent, ce vecteur est appelé vecteur rotation instantanée du solide. Compte tenu des propriétés classiques du produit vectoriel, on a :

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{e}_i \quad (2.3.23)$$

La vitesse de rotation d'un point  $M$  du solide s'écrit alors :

$$\mathbf{v} = x^i \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = x^i (\mathbf{w} \wedge \mathbf{e}_i) = \mathbf{w} \wedge (x^i \mathbf{e}_i) = \mathbf{w} \wedge \mathbf{OM} \quad (2.3.24)$$

Le vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  peut donc s'exprimer à l'aide de deux formalismes différents, par les formules (2.3.15) ou (2.3.24). On sait cependant que le vecteur  $\mathbf{w}$  est un "vecteur axial" qui nécessite une convention sur le sens de l'orientation du trièdre, de même que le produit vectoriel. Par contre, l'utilisation du tenseur  $[\omega_i^j]$  n'introduit pas de convention arbitraire et permet l'emploi d'un système d'axes quelconques.

### 2.3.3 Tenseurs des propriétés des milieux anisotropes

Un grand nombre de propriétés des milieux anisotropes sont représentées par des tenseurs. Considérons par exemple le cas de la conduction électrique dans des cristaux anisotropes où le vecteur densité de courant,  $\mathbf{j} = j^i \mathbf{e}_i$ , est lié au vecteur champ électrique,  $\mathbf{E} = E^k \mathbf{e}_k$ , par des relations de la forme :

$$j^i = \sigma_k^i E^k \quad ; i, k = 1, 2, 3 \quad (2.3.25)$$

Les 9 quantités  $\sigma_k^i$  forment les composantes du **tenseur de conductivité électrique**.

La forme des relations (2.3.25) est analogue pour de nombreuses autres propriétés dans les milieux anisotropes. Il en est ainsi pour les transferts de chaleur par conduction où le vecteur densité du flux thermique  $\mathbf{f}$  a ses composantes liées au vecteur gradient de température, **gradT**, par les relations :

$$f^i = -\lambda_j^i \frac{\partial T}{\partial x^j} \quad ; i, j = 1, 2, 3 \quad (2.3.26)$$

Les neuf quantités  $\lambda_j^i$  constituent les composantes du **tenseur de conductivité** du matériau.

**Composantes mixtes** - De manière générale, considérons des relations entre deux vecteurs  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{y} = y^k \mathbf{e}_k$  qui s'expriment sous la forme :

$$x^i = \lambda_k^i y^k \quad (2.3.27)$$

et étudions comment se transforment ces relations lors d'un changement de base. On a les formules de transformation des composantes d'un vecteur données par :

$$(a) \quad y^k = A_l^k y'^l \quad ; \quad (b) \quad x'^j = A_i'^j x^i \quad (2.3.28)$$

Substituons les relations (2.3.27) et (2.3.28)(a) dans l'expression (2.3.28)(b), il vient :

$$x'^j = A_i'^j x^i = A_i'^j (\lambda_k^i y^k) = A_i'^j \lambda_k^i (A_l^k y'^l) = (A_i'^j \lambda_k^i A_l^k) y'^l \quad (2.3.29)$$

D'autre part, la forme de la relation (2.3.27) doit être indépendante de la base choisie (afin de représenter une loi physique) et l'on a pour les nouvelles composantes :

$$x'^j = \lambda_l'^j y'^l \quad (2.3.30)$$

Comparant les relations (2.3.29) et (2.3.30), on obtient par identifications des coefficients de  $y'^l$  :

$$\lambda_l'^j = (A_i'^j A_l^k) \lambda_k^i \quad (2.3.31)$$

Les quantités  $\lambda_k^i$  se transforment comme les composantes mixtes d'un tenseur d'ordre deux. Ce type de tenseur permet de caractériser de nombreuses propriétés des matériaux anisotropes.

## 2.4 Exercices résolus

### Exercice 2.1

On effectue un changement de base d'un espace vectoriel  $E_2$ , défini par :

$$\mathbf{e}'_1 = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \quad ; \quad \mathbf{e}'_2 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$$

1. Partant de la définition des composantes covariantes du tenseur fondamental, calculer ses nouvelles composantes  $g'_{ij}$  en fonction des anciennes.
2. Vérifier les résultats en utilisant la formule générale (2.2.2)(b) de changement de base.

### Solutions

1. Les composantes covariantes du tenseur fondamental dans la nouvelle base sont données par :  $g'_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j$ , soit :

$$g'_{11} = \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_1 = (3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)^2 = 9(\mathbf{e}_1)^2 + 6(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) + (\mathbf{e}_2)^2 = 9g_{11} + 6g_{12} + g_{22}$$

$$g'_{12} = -3g_{11} + 5g_{12} + 2g_{22} = g'_{21} \quad ; \quad g'_{22} = g_{11} - 4g_{12} + 4g_{22}$$

2. La formule (1.3.13) de changement de base d'un vecteur :

$$\mathbf{e}'_k = A_k^i \mathbf{e}_i$$

donne dans le cas présent :  $A_1^1 = 3$  ;  $A_1^2 = 1$  ;  $A_2^1 = -1$  ;  $A_2^2 = 2$

La formule de changement de base (2.2.2)(b) d'un tenseur d'ordre deux :

$$t'_{kl} = A_k^i A_l^j t_{ij}$$

nous donne, par exemple :

$$g'_{11} = A_1^1 A_1^1 g_{11} + A_1^1 A_1^2 g_{12} + A_1^2 A_1^1 g_{21} + A_1^2 A_1^2 g_{22} = 9g_{11} + 6g_{12} + g_{22}$$

On vérifie de même les autres expressions de  $g'_{ij}$ .

### Exercice 2.2

On considère un espace vectoriel  $E_3$  à trois dimensions. Partant de la formule (1.5.44) :  $g_{ik} g^{kj} = \delta_{ij}$ , démontrer que pour des vecteurs de base orthogonaux, on a :

$$g^{ik} = \frac{1}{g_{ik}} \quad \text{lorsque } i = k$$

## Solutions

Selon la formule (1.5.44) :  $g_{ik} g^{kj} = \delta_{ij}$ , pour  $i = j = 1$ , on obtient :

$$g_{11} g^{11} + g_{12} g^{21} + g_{13} g^{31} = 1$$

Si les vecteurs de base sont orthogonaux, on a :  $g_{12} = g_{21} = 0$  ;  $g_{13} = g_{31} = 0$  ; il reste donc :

$$g_{11} g^{11} = 1 \quad \text{d'où} \quad g^{11} = \frac{1}{g_{11}}$$

On démontre de même les autres relations :  $g^{22} = \frac{1}{g_{22}}$  ;  $g^{33} = \frac{1}{g_{33}}$

## Exercice 2.3

Soit un espace vectoriel  $E_2$  ayant pour base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ . On considère deux vecteurs :  $\mathbf{x} = 4\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$ .

1. Déterminer les composantes contravariantes du produit tensoriel de  $\mathbf{x}$  par  $\mathbf{y}$ . Écrire la matrice de ce tenseur sur la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ .
2. On effectue un changement de base défini par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}$$

Déterminer les nouvelles composantes contravariantes du produit tensoriel.

3. Écrire la matrice du produit tensoriel pour  $\alpha = \pi/2$ .

## Solutions

1. Les vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  ont pour composantes contravariantes respectives :  $x^1 = 4, x^2 = 3, y^1 = 1, y^2 = 5$ . Notons  $u^{ij} = x^i y^j$  les composantes contravariantes du produit tensoriel de  $\mathbf{x}$  par  $\mathbf{y}$  ; il vient :

$$u^{11} = x^1 y^1 = 4 \quad ; \quad u^{12} = x^1 y^2 = 20 \quad ; \quad u^{21} = x^2 y^1 = 3 \quad ; \quad u^{22} = x^2 y^2 = 15$$

La matrice du produit tensoriel est donnée par :

$$[u^{ij}] = \begin{bmatrix} u^{11} & u^{12} \\ u^{21} & u^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 20 \\ 3 & 15 \end{bmatrix}$$

2. Dans la formule (2.1.18) de transformation des composantes :

$$u'^{kl} = A_i'^k A_j^l u^{ij} \quad (2.4.1)$$

les quantités  $A_i'^k$  sont données par la matrice de changement de base. On a :

$$A_1^{\prime 1} = \cos \alpha \ ; \ A_1^{\prime 2} = -\sin \alpha \ ; \ A_2^{\prime 1} = \sin \alpha \ ; \ A_2^{\prime 2} = \cos \alpha \quad (2.4.2)$$

d'où :

$$u^{\prime 11} = A_1^{\prime 1} A_1^{\prime 1} u^{11} + A_1^{\prime 1} A_2^{\prime 1} u^{12} + A_2^{\prime 1} A_1^{\prime 1} u^{21} + A_2^{\prime 1} A_2^{\prime 1} u^{22} \quad (2.4.3)$$

$$= 4 \cos^2 \alpha + 23 \cos \alpha \sin \alpha + 15 \sin^2 \alpha \quad (2.4.4)$$

$$u^{\prime 12} = 11 \sin \alpha \cos \alpha + 20 \cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha \quad (2.4.5)$$

$$u^{\prime 21} = 11 \sin \alpha \cos \alpha - 20 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha \quad (2.4.6)$$

$$u^{\prime 22} = 4 \sin^2 \alpha - 23 \sin \alpha \cos \alpha + 15 \cos^2 \alpha \quad (2.4.7)$$

3. Si  $\alpha = \pi/2$ , on a :  $\cos \alpha = 0$ ,  $\sin \alpha = 1$ , d'où la matrice du tenseur :

$$[u^{\prime ij}] = \begin{bmatrix} u^{\prime 11} & u^{\prime 12} \\ u^{\prime 21} & u^{\prime 22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -3 \\ -20 & 4 \end{bmatrix}$$

## Exercice 2.4

On considère dans l'espace géométrique ordinaire, de coordonnées cartésiennes  $x, y, z$ , un ellipsoïde centré sur l'origine et dont les axes coïncident avec ceux du référentiel cartésien (Fig.2.1). Si  $a, b, c$  sont les longueurs des demi-axes de l'ellipsoïde, son équation est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

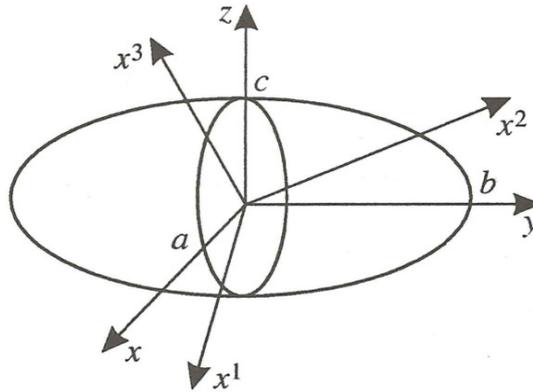


FIGURE 2.1

1. On note  $x^1, x^2, x^3$  les nouvelles coordonnées du référentiel cartésien après une rotation arbitraire autour de l'origine. Montrer que l'équation de l'ellipsoïde, dans ce nouveau repère, peut se mettre sous la forme :

$$a_{ij} x^i x^j = 1$$

avec  $a_{ij} = a_{ji}$  et  $i, j = 1, 2, 3$ .

2. Démontrer que les quantités  $a_{ij}$  sont les composantes covariantes d'un tenseur.

### **Solutions**

1. La rotation du référentiel est équivalent à un changement de base. Notons  $x, y, z$  les composantes d'un vecteur  $\mathbf{OM}$ ; on a, selon la formule (1.3.17) :

$$x = A_k^1 x^k \quad ; \quad y = A_k^2 x^k \quad ; \quad z = A_k^3 x^k$$

L'équation de l'ellipsoïde devient après le changement de référentiel :

$$\frac{(A_k^1 x^k)^2}{a^2} + \frac{(A_k^2 x^k)^2}{b^2} + \frac{(A_k^3 x^k)^2}{c^2} = 1$$

Développons l'expression  $(A_k^1 x^k)^2$  par exemple; il vient :

$$(A_k^1 x^k)^2 = (A_1^1 x^1 + A_2^1 x^2 + A_3^1 x^3)^2$$

$$= (A_1^1 x^1)^2 + (A_2^1 x^2)^2 + (A_3^1 x^3)^2 + 2 A_1^1 x^1 A_2^1 x^2 + 2 A_1^1 x^1 A_3^1 x^3 + 2 A_2^1 x^2 A_3^1 x^3$$

Regroupons tous les termes, on obtient une équation de la forme :

$$a_{ij} x^i x^j = 1 \quad \text{avec, par exemple} \quad a_{11} = (A_1^1/a)^2 + (A_2^1/b)^2 + (A_3^1/c)^2$$

On vérifie aisément que les coefficients sont symétriques, c'est-à-dire tels que :  $a_{ij} = a_{ji}$ .

2. Étudions comment se transforment les coefficients  $a_{ij}$  lors d'un changement quelconque de base. Notons  $x'^j$  les nouvelles composantes d'un vecteur  $\mathbf{OM}$ ; on a :  $x^i = A_k^i x'^k$ . L'équation de l'ellipsoïde s'écrit dans le nouveau système de coordonnées :

$$a_{ij} x^i x^j = a_{ij} A_k^i x'^k A_m^j x'^m = a'_{km} x'^k x'^m = 1$$

Dans le nouveau système d'axes, les coefficients de l'ellipsoïde sont donnés par :

$$a'_{km} = a_{ij} A_k^i A_m^j$$

C'est la formule de transformation (2.2.2) des composantes covariantes d'un tenseur d'ordre deux. On dira que la surface représentée par l'équation  $a_{ij} x^i x^j = 1$  est l'ellipsoïde représentatif du tenseur  $a_{ij}$  (en pratique, on désigne souvent un tenseur par l'expression générale de ses composantes).

## Exercice 2.5

On considère un tétraèdre  $OABC$  (Fig.2.2) constitué d'un milieu continu, fluide ou solide, situé à l'intérieur de ce milieu et supposé en équilibre statique. Chaque face du tétraèdre est soumise à une force interne due au milieu lui-même et proportionnelle à l'aire de sa surface. On note les aires des faces :

$$S_1 = S(OBC) \quad ; \quad S_2 = S(OAC)$$

$$S_3 = S(OAB) \quad ; \quad S_4 = S(ABC)$$

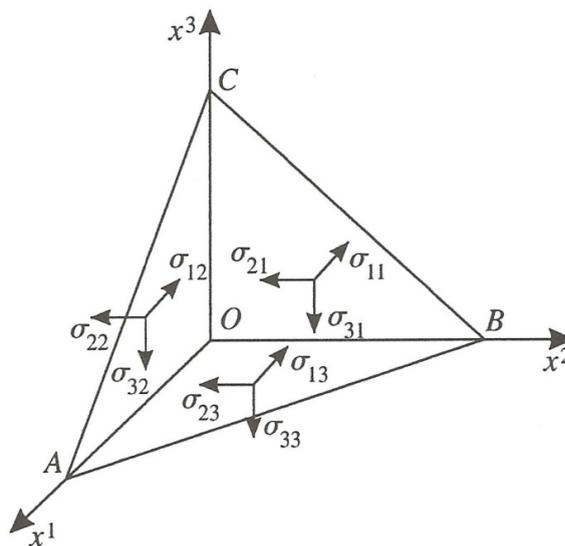


FIGURE 2.2

1. Soit  $\mathbf{n}$  un vecteur unitaire orthogonal à la face  $ABC$ , dirigé de l'intérieur vers l'extérieur du tétraèdre. Déterminer les composantes  $n_j$  du vecteur  $\mathbf{n}$  en fonction des aires des faces du tétraèdre.
2. Notons  $\mathbf{f}_i$  la force qui s'exerce sur une face d'aire  $S_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  ; ses composantes sont notées, suivant les axes orthogonaux  $Ox_i$  :

$$f_{1i} = \sigma_{1i} S_i \quad ; \quad f_{2i} = \sigma_{2i} S_i \quad ; \quad f_{3i} = \sigma_{3i} S_i \quad \text{avec } i = 1, 2, 3$$

Soit  $\mathbf{F}$  la force qui s'exerce par unité d'aire ( $\mathbf{F}$  est appelée **la contrainte**) sur la face  $ABC$  et soit  $F_i$  ses composantes. En écrivant l'équilibre des forces qui s'exercent sur les quatre faces du tétraèdre, montrer qu'on a :

$$F_i = \sigma_{ij} n_j \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3$$

Que peut-on en déduire pour les neuf quantités  $\sigma_{ij}$  ?

## Solutions

1. Les aires  $S_i$  sont égales à la projection de l'aire  $ABC$  sur le  $i^e$  plan. Si l'on note  $\mathbf{S}_T$  le vecteur orthogonal à la surface  $ABC$ , de longueur égale à  $S_T$  et dirigé de l'intérieur du tétraèdre vers l'extérieur, on a :

$$\mathbf{S}_T = S_1 \mathbf{i} + S_2 \mathbf{j} + S_3 \mathbf{k}$$

où  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  sont les vecteurs de base orthonormés. Le vecteur  $\mathbf{n}$  a donc pour composantes :

$$n_1 = S_1/S_T \quad ; \quad n_2 = S_2/S_T \quad ; \quad n_3 = S_3/S_T$$

2. L'équilibre des forces du milieu s'exprime, pour les composantes selon l'axe  $Ox_1$ , par :

$$F_1 S_T = f_{11} + f_{12} + f_{13} = \sigma_{11} S_1 + \sigma_{12} S_2 + \sigma_{13} S_3$$

d'où :  $F_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3$

On obtient de même :

$$F_2 = \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3 \quad ; \quad F_3 = \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3$$

Finalement, on a :

$$F_i = \sigma_{ij} n_j \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3$$

On obtient une relation entre deux vecteurs  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{n}$  de la forme (2.3.27). Nous avons vu que les quantités  $\sigma_{ij}$  se transforment dans ce cas comme les composantes mixtes d'un tenseur d'ordre deux, selon la relation (2.3.31). Pour des vecteurs de base quelconques, les quantités  $\sigma_{ij}$  doivent être écrites  $\sigma_j^i$ . Le tenseur  $\sigma_j^i$  est appelé *le tenseur des contraintes*. Le terme de tenseur vient précisément de l'étude des tensions internes existant au sein des milieux continus.

## Exercice 2.6

L'expression des composantes  $I_{ij}$  du tenseur d'inertie d'une particule de masse  $m$  par rapport à un axe passant par l'origine d'un référentiel cartésien  $K$ , est donnée par la formule (2.3.7).

1. Déterminer l'expression du moment d'inertie  $\mathcal{M}_u$  de la particule par rapport à un axe  $U$  quelconque, caractérisé par le vecteur unité  $\mathbf{u}$ , en fonction des  $I_{ij}$  et des composantes  $u_k$  de  $\mathbf{u}$ .
2. Utilisant l'expression (2.3.7) des composantes  $I_{ij}$ , montrer que  $\mathcal{M}_u$  peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{M}_u = m [\mathbf{r}^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})^2]$$

où  $\mathbf{r}$  est le rayon vecteur partant du point d'origine  $O$  situé sur l'axe  $U$  et aboutissant au point  $M$  où se trouve la particule.

3. Montrer que l'énergie cinétique  $T$  d'une particule en rotation par rapport à un point fixe  $P$ , avec une vitesse angulaire instantanée  $\boldsymbol{\omega}$  est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} \mathcal{M}_u \boldsymbol{\omega}^2$$

où  $\mathcal{M}_u$  est le moment d'inertie de la particule par rapport à l'axe instantané de rotation de direction  $\boldsymbol{\omega}$ . Exprimer  $T$  en fonction des composantes  $I_{ij}$ .

### Solutions

1. Le moment d'inertie de la particule dans un autre référentiel cartésien  $K'$  a la même forme que celui donné par (2.3.6), à savoir :

$$\mathcal{M}_u = a'_i a'_j I_{ij}$$

où les  $a'_k$  sont les cosinus directeurs de la droite portant le vecteur  $\mathbf{u}$ . Mais les  $a'_k$  sont donnés par :

$$a'_k = \mathbf{u} \cdot \mathbf{i}_k = u_k$$

où les vecteurs  $\mathbf{i}_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , sont les vecteurs unitaires de base du référentiel  $K'$ . On a donc :

$$\mathcal{M}_u = u_i u_j I_{ij}$$

2. Notons  $x_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , les composantes de  $\mathbf{r}$ . Les expressions (2.3.6) des composantes  $I_{ij}$ , substituées dans la formule ci-dessus de  $\mathcal{M}_u$ , donnent :

$$\mathcal{M}_u = m [x_k x_k - (x_k u_k)^2]$$

Le carré du rayon vecteur :  $\mathbf{r}^2 = x_k x_k$  ainsi que le produit scalaire :  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} = x_k u_k$  permettent d'écrire l'expression de  $\mathcal{M}_u$  sous la forme demandée :

$$\mathcal{M}_u = m [\mathbf{r}^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})^2]$$

3. Soit  $\mathbf{r}$  le rayon vecteur ayant pour origine le point  $P$  et soit  $\mathbf{v}$  la vitesse instantanée de la particule. Son énergie cinétique est :

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} m (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2$$

Utilisant les propriétés du produit scalaire et du double produit vectoriel, il vient :

$$T = \frac{1}{2} m \boldsymbol{\omega} (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{1}{2} m [\mathbf{r}^2 \boldsymbol{\omega}^2 - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})^2]$$

Le vecteur  $\boldsymbol{\omega}$  ayant un module  $\omega$  égal à la vitesse angulaire, utilisons le vecteur unitaire :

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}$$

Il vient :

$$T = \frac{1}{2} m \omega^2 [\mathbf{r}^2 - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}_0)^2]$$

L'expression du moment d'inertie  $\mathcal{M}_\omega$  apparaît dans l'énergie cinétique ci-dessus, d'où :

$$T = \frac{1}{2} \mathcal{M}_\omega \omega^2$$

L'utilisation de l'expression du moment d'inertie dans le (1) donne alors :

$$T = \frac{1}{2} \mathcal{M}_\omega \omega^2 = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_{0i} \omega_{0j} \omega^2 = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j$$

où les  $\omega_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , sont les composantes de  $\boldsymbol{\omega}$  et les  $I_{ij}$ , les composantes du tenseur d'inertie par rapport au point  $P$ .

## Exercice 2.7

Sous l'effet d'une contrainte, certains cristaux sont le siège d'un moment électrique dont l'intensité est proportionnelle à la contrainte appliquée. C'est *l'effet piézo-électrique direct*. Les calculs suivants sont à effectuer dans des référentiels cartésiens.

1. En général, un état de contrainte est représenté par un tenseur d'ordre deux à neuf composantes (voir exercice 2.5). La polarisation électrique  $\mathbf{P}$  d'un cristal est représentée par un vecteur à trois composantes  $P_i$ . Chaque composante est liée linéairement à toutes les composantes  $\sigma_{ij}$  du tenseur des contraintes. Écrire explicitement la relation entre  $P_1$  et les composantes  $\sigma_{ij}$ .
2. Écrire la relation générale pour les composantes  $P_i$  du vecteur polarisation  $\mathbf{P}$ .
3. Démontrer que les coefficients de proportionnalité entre les composantes de  $\mathbf{P}$  et celles de  $\sigma_{ij}$  forment un tenseur d'ordre trois.

## Solutions

1. Dans un référentiel cartésien, les différents types de composantes des tenseurs sont confondus. La composante  $P_1$  étant liée linéairement à toutes les composantes  $\sigma_{ij}$ , on a une relation de la forme :

$$P_1 = d_{11k} \sigma_{1k} + d_{12k} \sigma_{2k} + d_{13k} \sigma_{3k} ; \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.4.8)$$

où les coefficients  $d_{ijk}$  sont des constantes.

2. Sous une forme plus condensée, la relation (2.4.8) ci-dessus peut s'écrire :

$$P_1 = d_{1jk} \sigma_{jk} \quad (2.4.9)$$

Remplaçant dans la relation (2.4.9), l'indice 1 par un indice quelconque,  $l$  par exemple, valant 1, 2 ou 3, on obtient :

$$P_l = d_{lmn} \sigma_{mn} \quad (2.4.10)$$

3. Notons  $\sigma'_{ij}$  les composantes du tenseur des contraintes dans un nouveau référentiel d'axes  $0x'_k$ . La polarisation devient  $P'$  dans le nouveau système d'axes. La forme générale des équations (2.4.10) est la même, quels que soient les axes de référence, afin de représenter une même loi physique. On peut donc écrire :

$$P'_i = d'_{ijk} \sigma'_{jk} \quad (2.4.11)$$

Les composantes du vecteur polarisation  $\mathbf{P}$  sont liées entre elles dans les deux référentiels, selon la formule (1.3.16), par :

$$P'_i = A_l^i P_l \quad (2.4.12)$$

Lors d'un changement de référentiel, les  $\sigma'_{ij}$  sont liés aux  $\sigma_{kl}$ , selon la formule (2.2.2), par :

$$\sigma_{mn} = A_m^j A_n^k \sigma'_{jk} \quad (2.4.13)$$

Reportant les relations (2.4.10) et (2.4.13) dans l'expression (2.4.12), il vient :

$$P'_i = A_l^i P_l = A_l^i d_{lmn} \sigma_{mn} = A_l^i d_{lmn} A_m^j A_n^k \sigma'_{jk} \quad (2.4.14)$$

Comparant les relations (2.4.11) et (2.4.14), on obtient par identification des coefficients :

$$d'_{ijk} = A_l^i A_m^j A_n^k d_{lmn}$$

On retrouve la propriété de changement de base d'un tenseur d'ordre trois donnée par la formule (2.2.15) en tenant compte du fait que les composantes mixtes, covariantes et contravariantes sont confondues pour des repères cartésiens.

# Chapitre 3

## Algèbre tensorielle

### 3.1 Tenseur d'ordre deux

#### 3.1.1 Introduction

Au cours du chapitre précédent, nous avons utilisé des systèmes de  $n^2$  nombres, créés à partir d'un espace vectoriel  $E_n$ . Lorsque ces nombres vérifient certaines relations de changement de base, on a appelé ces grandeurs, par définition, les composantes d'un tenseur.

Nous avons vu que toute combinaison linéaire de ces composantes constitue les composantes d'autres tenseurs. On peut donc additionner entre elles les composantes des tenseurs ainsi que les multiplier par des scalaires, pour obtenir d'autres composantes de tenseur. Ces propriétés d'addition et de multiplication font que l'on va pouvoir utiliser ces grandeurs tensorielles comme composantes de vecteurs.

D'un point de vue pratique, on pourrait se contenter de définir les tenseurs à partir des relations de transformation de leurs composantes lors d'un changement de base. C'est ce qui est souvent fait en Physique. Cependant, la définition des tenseurs sous forme de vecteurs conduit à une meilleure compréhension de leurs propriétés et les rattache à la théorie générale des vecteurs.

#### 3.1.2 Exemple de tenseur : produit tensoriel de triplets de nombres

Pour préciser comment on définit un tenseur sur une base, étudions le cas d'un produit tensoriel de deux vecteurs constitués par des triplets de nombres. Considérons l'espace vectoriel euclidien  $E_3$ , dont les vecteurs sont des triplets de nombres de la forme :  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . La base orthonormée de  $E_3$  est formée des trois vecteurs :

$$\mathbf{e}_i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \delta_{3i}) \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.1.1)$$

Des vecteurs de  $E_3$  :  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{y} = y^j \mathbf{e}_j$ , permettent de former les neuf quantités  $x^i y^j$  que l'on a appelées, au cours du chapitre précédent, les composantes du produit tensoriel des vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ .

Si l'on effectue tous les produits tensoriels possibles entre vecteurs de  $E_3$ , on obtient des suites de neuf nombres qui peuvent servir à définir les vecteurs suivants :

$$\mathbf{U} = (x^1 y^1, x^1 y^2, x^1 y^3, \dots, x^3 y^3) \quad (3.1.2)$$

éléments d'un espace vectoriel  $E_9$  à neuf dimensions, ayant pour éléments tous les multipléts formés de neuf nombres.

Ces vecteurs peuvent être décomposés, par exemple, sur la base orthonormée :

$$\mathbf{e}_k = (\delta_{1k}, \delta_{2k}, \dots, \delta_{9k}) \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, 9 \quad (3.1.3)$$

Pour écrire les vecteurs  $\mathbf{U}$  sur cette base, renumérons les quantités  $x^i y^j$  selon la place qu'elles occupent dans l'expression (3.1.2), soit :

$$x^i y^j = u^{ij} = u^k \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, 9 \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.1.4)$$

On peut déduire la valeur de  $k$  avec la relation suivante :  $k = i + 3(j - 1)$ . Les vecteurs  $\mathbf{U}$  s'écrivent alors :

$$\mathbf{U} = u^k \mathbf{e}_k \quad (3.1.5)$$

et constituent un exemple de tenseurs d'ordre deux.

En quoi ces tenseurs  $\mathbf{U}$  diffèrent-ils des vecteurs ordinaires ? Ils sont certes identiques à certains vecteurs de  $E_9$  mais ils ont été formés à partir des vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  de  $E_3$ . Pour rappeler ce fait, on les notes :

$$\mathbf{U} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \quad (3.1.6)$$

et ils sont appelés produit tensoriel des vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ . Le symbole  $\otimes$  est donc défini par la manière dont on a formé les quantités  $u^{ij} = x^i y^j$  et l'ordre dans lequel on les a classés pour former le vecteur  $\mathbf{U}$ .

Ainsi qu'on le verra par la suite, tous les vecteurs de  $E_9$  ne sont pas des produits tensoriels mais tous les éléments de  $E_9$  peuvent être mis sous la forme d'une somme de produits tensoriels. On appellera également tenseur les sommes de produits tensoriels.

**Base associée** - Le classement des quantités  $x^i y^j$  que l'on a choisi pour définir le vecteur  $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$  est évidemment arbitraire, mais une fois qu'il a été réalisé, ce classement affecte chaque nombre  $x^i y^j$  à un vecteur de base  $\mathbf{e}_k$  déterminé.

Ainsi,  $x^1 y^1$  constitue la composante du vecteur  $\mathbf{U}$  relative au vecteur de base  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $x^1 y^2$  est celle relative à  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ , etc. Pour rappeler la dépendance entre une quantité  $x^i y^j = u^k$  et le vecteur de base  $\mathbf{e}_k$  auquel il est affecté, renumérotions ces vecteurs en mettant à la place de l'indice  $k$  les deux indices,  $i$  et  $j$ , relatifs aux composantes, soit  $\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{ij}$ , avec  $k = 1$  à  $9$  ;  $i, j = 1$  à  $3$ .

Les indices  $i$  et  $j$  étant ceux des vecteurs de base de  $E_3$ , on peut dire qu'à chaque couple  $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$  on a associé un vecteur  $\mathbf{e}_{ij}$ . Ce dernier peut être noté sous la forme :

$$\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (3.1.7)$$

et est appelé le **produit tensoriel des vecteurs  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{e}_j$**  .

Les vecteurs  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  constituent une base de  $E_9$  qui est appelée **la base associée à la base  $\mathbf{e}_i$** . Dans cet exemple, on a donc :

$$\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \quad ; \quad \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \quad (3.1.8)$$

Les relations (3.1.5) à (3.1.7) nous permettent finalement d'écrire le produit tensoriel des vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sous la forme :

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = x^i y^j \mathbf{e}_{ij} = (x^i \mathbf{e}_i) \otimes (y^j \mathbf{e}_j) = x^i y^j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \quad (3.1.9)$$

**Produit tensoriel d'espaces vectoriels** - L'espace vectoriel  $E_9$  est doté d'une structure plus précise que celle de simple espace vectoriel de dimension 9 lorsqu'on définit les produits tensoriels  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  comme constituant la base de  $E_9$ . On dit que  $E_9$  est doté **d'une structure de produit tensoriel**.

Afin de bien mettre en évidence cette structure, on écrit cet espace, identique à  $E_9$ , sous la forme  $E_3 \otimes E_3$  et il est appelé **le produit tensoriel de l'espace  $E_3$ , par l'espace  $E_3$** . Tous les éléments de  $E_3 \otimes E_3$  sont appelés des tenseurs.

### 3.1.3 Propriétés du produit tensoriel

Étudions, à partir de l'exemple précédent, les propriétés du produit tensoriel de deux vecteurs résultant de la relation (3.1.9), à savoir :

$$(x^i \mathbf{e}_i) \otimes (y^j \mathbf{e}_j) = x^i y^j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \quad (3.1.10)$$

On a les propriétés suivantes :

**PT1** - Distributivité, à gauche et à droite, par rapport à l'addition des vecteurs :

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \otimes \mathbf{z} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{z} + \mathbf{y} \otimes \mathbf{z} \quad (3.1.11)$$

$$\mathbf{x} \otimes (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} + \mathbf{x} \otimes \mathbf{z} \quad (3.1.12)$$

La démonstration de ces propriétés est simple compte tenu de la relation (3.1.10) : on a par exemple :

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \otimes \mathbf{z} &= (x^i \mathbf{e}_i + y^i \mathbf{e}_i) \otimes z^k \mathbf{e}_k = (x^i + y^i) \mathbf{e}_i \otimes z^k \mathbf{e}_k = (x^i + y^i) z^k (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \\ &= x^i z^k (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) + y^i z^k (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) = \mathbf{x} \otimes \mathbf{z} + \mathbf{y} \otimes \mathbf{z} \end{aligned}$$

**PT2** - Associativité avec la multiplication par une grandeur scalaire :

$$(\lambda \mathbf{x}) \otimes \mathbf{y} = \mathbf{x} \otimes \lambda \mathbf{y} = \lambda (\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) \quad (3.1.13)$$

On a en effet :

$$(\lambda \mathbf{x}) \otimes \mathbf{y} = (\lambda x^i \mathbf{e}_i) \otimes y^j \mathbf{e}_j = \lambda x^i y^j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \lambda (\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) \quad (3.1.14)$$

### 3.1.4 Définition du produit tensoriel de deux espaces vectoriels

De même qu'on a défini les espaces vectoriels, au cours du premier chapitre, uniquement à partir des propriétés opératoires entre vecteurs, on va définir le produit tensoriel de deux espaces vectoriels à partir des propriétés précédentes.

Pour cela, donnons-nous deux espaces vectoriels  $E_n$  et  $F_m$  de dimensions respectives  $n$  et  $m$ . Notons  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$  les vecteurs de  $E_n$  et  $\mathbf{y}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots$  les vecteurs de  $F_m$  de bases respectives  $(\mathbf{e}_i)$  et  $(\mathbf{f}_j)$ .

Choisissons arbitrairement un autre espace vectoriel  $E_{nm}$  de dimension  $nm$  dont les vecteurs de base sont  $\mathbf{e}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, nm$ . À tout couple de vecteurs  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  faisons lui correspondre un élément de  $E_{nm}$  noté  $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ , tel que cette loi de correspondance vérifie les propriétés suivantes :

**PT1** - Elle est distributive, à gauche et à droite, par rapport à l'addition vectorielle :

$$(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \otimes \mathbf{y} = \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{y} + \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{y} \quad (3.1.15)$$

$$\mathbf{x} \otimes (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}_1 + \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}_2 \quad (3.1.16)$$

**PT2** - Elle est associative par rapport à la multiplication par un scalaire :

$$(\lambda \mathbf{x}) \otimes \mathbf{y} = \mathbf{x} \otimes \lambda \mathbf{y} = \lambda (\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) \quad (3.1.17)$$

**PT3** - Lorsqu'on a choisi une base dans chacun des espaces vectoriels,  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  pour  $E_n$ ,  $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m)$  pour  $F_m$ , les  $nm$  éléments de  $E_{nm}$  que l'on note  $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j)$ , forment une base de  $E_{nm}$ .

Lorsqu'il en est ainsi, l'espace vectoriel  $E_{nm}$ , muni de cette loi de correspondance, est noté  $E_n \otimes E_m$  et appelé **produit tensoriel des espaces vectoriels  $E_n$  et  $F_m$** . L'élément  $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$  de  $E_n \otimes E_m$  est appelé **le produit tensoriel des vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$** . La base formée par les vecteurs  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j$  est **la base associée** aux bases  $(\mathbf{e}_i)$  et  $(\mathbf{f}_j)$ . L'exemple du produit tensoriel de triplets de nombres, donné précédemment, montre que le produit tensoriel que l'on vient de définir existe. En pratique, on n'utilisera plus le mode de construction détaillé dans cet exemple mais uniquement les propriétés du produit tensoriel et de ses composantes.

**Remarque** - De par sa qualité d'espace vectoriel,  $E_n \otimes F_m$  se confond en tant qu'ensemble d'éléments avec l'espace vectoriel  $E_{nm}$ , mais il s'en distingue en tant qu'espace doté d'une structure associative supplémentaire. De ce point de vue, on dit que  $E_{nm}$  constitue le support de  $E_n \otimes F_m$ .

On va voir par la suite que tous les éléments de  $E_n \otimes F_m$  ne sont pas des produits tensoriels mais, dans ce cas, qu'ils sont nécessairement des sommes de produits tensoriels qui constituent des tenseurs.

La définition du produit tensoriel de deux espaces vectoriels s'applique aussi bien aux espaces de dimension finie qu'infinie. En particulier, l'un des espaces peut être de dimension infinie et l'autre finie.

On va montrer que les éléments  $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ , définis par les axiomes ci-dessus, s'expriment nécessairement en fonction des composantes respectives des vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ , sous la forme (3.1.10), ce qui a priori est évident puisque les propriétés de définition de  $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$  sont précisément celles de la relation (3.1.10).

### 3.1.5 Expression analytique du produit tensoriel de deux vecteurs

Recherchons une expression de  $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$  en fonction des composantes de chacun des vecteurs. Choisissons dans les espaces vectoriels  $E_n, F_m$  et  $E_n \otimes F_m$  des bases quelconques  $(\mathbf{e}_i), (\mathbf{f}_j)$  et  $(\mathbf{e}_{ij})$ , où l'indice  $i$  prend les valeurs de 1 à  $n$  et l'indice  $j$  des valeurs de 1 à  $m$ . Par suite de la propriété **PT3**, on peut poser :  $\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j$ .

Choisissons d'autre part deux vecteurs quelconques :  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$  de  $E_n$  et  $\mathbf{y} = y^j \mathbf{f}_j$  de  $F_m$ , et effectuons le produit tensoriel de ces deux vecteurs en tenant compte des axiomes de définition (3.1.15) à (3.1.17), il vient :

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = (x^i \mathbf{e}_i) \otimes (y^j \mathbf{f}_j) = x^i y^j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j) = x^i y^j \mathbf{e}_{ij} \quad (3.1.18)$$

avec  $i = 1$  à  $n$  ;  $j = 1$  à  $m$ . Les quantités  $x^i y^j$  sont nécessairement les composantes du produit tensoriel  $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$  décomposé sur la base formé des vecteurs  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j$ .

Réciproquement, la loi de composition des vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  donné par (3.1.18) vérifie les propriétés **PT1** et **PT2**. En est-il de même pour la propriété **PT3**?

**Bases associées** - Pour vérifier la propriété **PT3**, il faut démontrer que si l'on a choisi une base  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_k$  de l'espace produit tensoriel  $E_n \otimes F_m$ , où les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{f}_k$  constitue respectivement des bases de  $E_n$  et  $F_m$ , toute autre base quelqconque  $(\mathbf{e}'_i)$  de  $E_n$  et  $(\mathbf{f}'_k)$  de  $F_m$  permet d'obtenir également une base de  $E_n \otimes F_m$ .

Pour le démontrer, décomposons les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{f}_k$  sur ces nouvelles bases, soit :

$$\mathbf{e}_i = A_i^{lk} \mathbf{e}'_k \quad ; \quad \mathbf{f}_k = B_j^{ll} \mathbf{f}'_l \quad (3.1.19)$$

avec  $i, k = 1$  à  $n$  et  $j, l = 1$  à  $m$ . Les vecteurs  $\mathbf{U}$  de l'espace produit tensoriel  $E_n \otimes F_m$  s'écrivent sous la forme :

$$\mathbf{U} = u^{ij} (A_i^{lk} \mathbf{e}'_k) \otimes (B_j^{ll} \mathbf{f}'_l) = u^{ij} A_i^{lk} B_j^{ll} (\mathbf{e}'_k \otimes \mathbf{f}'_l) \quad (3.1.20)$$

Le vecteur  $\mathbf{U}$  s'exprime comme une combinaison linéaire des éléments  $(\mathbf{e}'_k \otimes \mathbf{f}'_l)$ . Si  $\mathbf{U} = \mathbf{0}$ , les composantes  $u^{ij}$  sont toutes nulles et la relation (3.1.20) montre que les  $nm$  éléments  $(\mathbf{e}'_k \otimes \mathbf{f}'_l)$  sont linéairement indépendants. Les vecteurs  $(\mathbf{e}'_k \otimes \mathbf{f}'_l)$  constituent donc une nouvelle base de  $E_n \otimes F_m$  ; ces vecteurs forment la base associée aux bases  $(\mathbf{e}'_i)$  et  $(\mathbf{f}'_j)$ .

### 3.1.6 Éléments d'un espace produit tensoriel

Précisons de nouveau que l'espace  $E_n \otimes F_m$  est formé, par définition, de tous les vecteurs qui appartiennent à l'espace support  $E_{nm}$  qui a été muni d'une structure d'espace tensoriel. Tous les vecteurs de  $E_n \otimes F_m$  sont-ils des produits tensoriels? En d'autres termes, étant donné un vecteur  $\mathbf{U} = u^k \mathbf{e}_k$  de  $E_n \otimes F_m$ , peut-on trouver deux vecteurs  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$  de  $E_n$  et  $\mathbf{y} = y^j \mathbf{f}_j$  de  $F_m$  tels que :  $\mathbf{U} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ .

**Système incompatible :** Pour étudier ce problème, numérotions différemment les composantes du vecteur  $\mathbf{U}$  en écrivant :

$$\mathbf{U} = u^k \mathbf{e}_k = u^{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j) \quad (3.1.21)$$

avec  $k = 1$  à  $nm$ ;  $i = 1$  à  $n$ ;  $j = 1$  à  $m$ . Pour vérifier la relation :

$$\mathbf{U} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = x^i y^j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j) = u^{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j) \quad (3.1.22)$$

il faut déterminer les  $(n + m)$  inconnues  $x^i$  et  $y^j$  à partir des  $nm$  équations :

$$x^i y^j = u^{ij} \quad (3.1.23)$$

ce qui est en général impossible car on aura plus d'équations que d'inconnues.

Examinons par exemple, le cas  $n = m = 2$ . On a quatre inconnues et quatre équations de la forme (3.1.23) avec  $i, j = 1, 2$ . Effectuons le rapport entre deux de ces équations, on obtient par exemple :

$$\frac{y^1}{y^2} = \frac{u^{11}}{u^{12}} = \frac{u^{21}}{u^{22}} \quad (3.1.24)$$

Ces relations imposent une condition de compatibilité entre les  $u^{ij}$ , condition qui ne sera pas vérifiée en général pour un vecteur quelconque de  $E_n \otimes F_m$ .

En conclusion, il existe d'autres vecteurs de  $E_n \otimes F_m$  qui ne sont pas des produits tensoriels de deux vecteurs et nous allons voir que ce sont des sommes de produits tensoriels.

**Somme de produits tensoriels -** Tous les vecteurs  $\mathbf{U}$  de l'espace  $E_n \otimes F_m$  peuvent s'écrire sous la forme (3.1.21). Utilisant la définition du produit tensoriel, on a :

$$\mathbf{U} = u^{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j) = (u^{ij} \mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{f}_j \quad (3.1.25)$$

avec  $i = 1$  à  $n$ ,  $j = 1$  à  $m$ . Les  $m$  termes  $u^{ij} \mathbf{e}_i$  représentent  $m$  vecteurs de  $E_n$  tels que  $\mathbf{x}_j = u^{ij} \mathbf{e}_i$ . Tout vecteur  $\mathbf{U}$  de  $E_n \otimes F_m$  peut donc s'écrire sous la forme d'une somme de  $m$  termes :

$$\mathbf{U} = \mathbf{x}_j \otimes \mathbf{f}_j \quad (3.1.26)$$

**Tous les éléments de  $E_n \otimes F_m$  sont donc des sommes d'au plus  $m$  produits tensoriels de deux vecteurs de la forme (3.1.26) et ses éléments sont appelés des tenseurs d'ordre deux.**

### 3.1.7 Produit tensoriel de deux espaces vectoriels identiques

En pratique, on a très souvent à utiliser des tenseurs formés à partir de vecteurs appartenant à des espaces vectoriels  $E_n$  identiques. Dans ce cas, les produits tensoriels d'ordre deux sont formés à partir des vecteurs  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{y} = y^j \mathbf{e}_j$  de  $E_n$  et s'écrivent sous la forme :

$$\mathbf{U} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = x^i y^j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \quad (3.1.27)$$

où les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  sont les vecteurs de base de  $E_n$ . Le produit tensoriel de  $E_n$  par lui-même est noté  $E_n \otimes E_n$  ou encore  $E_n^{(2)}$ .

**Non-commutativité du produit tensoriel** - Si l'on considère deux espaces vectoriels  $E_n$  et  $F_m$  identiques, les produits tensoriels  $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$  sont des vecteurs de base de l'espace  $E_n \otimes E_n$  et il en est de même pour  $(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i)$ . Deux vecteurs de base ne pouvant être identiques, il en résulte que **le produit tensoriel des vecteurs  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{e}_j$  n'est pas commutatif.**

Il en est de même pour tout produit tensoriel de deux vecteurs quelconques  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{y} = y^j \mathbf{e}_j$  de  $E_n$ . Les produits tensoriels suivants :

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = x^i y^j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \quad \text{et} \quad \mathbf{y} \otimes \mathbf{x} = y^j x^i (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) \quad (3.1.28)$$

sont différents puisqu'on a par exemple :

$$x^1 y^2 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) \neq y^2 x^1 (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) \quad (3.1.29)$$

par suite de la non-commutativité du produit tensoriel des vecteurs  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$ .

**Changement de base** - En tant qu'éléments d'un espace  $E_n \otimes E_n$ , un tenseur  $\mathbf{U}$  est un vecteur de la forme générale :

$$\mathbf{U} = u^{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \quad (3.1.30)$$

Étudions ses propriétés vis-à-vis d'un changement de base de  $E_n$  tel que :

$$(a) \quad \mathbf{e}_i = A_i^k \mathbf{e}'_k \quad ; \quad (b) \quad \mathbf{e}'_k = A_k^i \mathbf{e}_i \quad (3.1.31)$$

Lors d'un tel changement, la base  $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$  associée à  $\mathbf{e}_i$  devient une autre base  $(\mathbf{e}'_k \otimes \mathbf{e}'_l)$  associée à  $\mathbf{e}'_k$ , savoir :

$$\mathbf{e}'_k \otimes \mathbf{e}'_l = (A_k^i \mathbf{e}_i) \otimes (A_l^j \mathbf{e}_j) = (A_k^i A_l^j) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (3.1.32)$$

Par suite, le produit tensoriel  $\mathbf{U}$  donné par (3.1.5) a pour composantes dans la nouvelle base :

$$\mathbf{U} = u'^{kl} (\mathbf{e}'_k \otimes \mathbf{e}'_l) = u'^{kl} A_k^i A_l^j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = u^{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \quad (3.1.33)$$

On obtient donc par identification :

$$u'^{ij} = A_k^i A_l^j u'^{kl} \quad (3.1.34)$$

Les composantes  $u^{ij}$  vérifient la relation (2.2.2)(a) de transformation des composantes lors d'un changement de base. On retrouve la même formule de transformation mais en partant des expressions de changement de base des vecteurs de base de l'espace produit tensoriel.

## 3.2 Tenseurs d'ordre quelconque

### 3.2.1 Produit tensoriel de plusieurs vecteurs

Ayant défini le produit tensoriel de deux vecteurs, on peut passer, de proche en proche, au produit tensoriel d'un nombre quelconque de vecteurs.

**Associativité du produit tensoriel** - Considérons trois vecteurs  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$  appartenant respectivement à des espaces vectoriels  $E_n, F_m$  et  $G_p$ . Un premier produit tensoriel entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  nous donne l'élément  $\mathbf{U} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$  de l'espace vectoriel  $E_n \otimes F_m$ . On peut ensuite multiplier tensoriellement  $\mathbf{U}$  par  $\mathbf{z}$  et l'on obtient un nouveau vecteur  $\mathbf{V}$ , tel que :

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} \otimes \mathbf{z} = (\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) \otimes \mathbf{z} \quad (3.2.1)$$

D'autre part, on peut également former le produit tensoriel  $(\mathbf{y} \otimes \mathbf{z})$  puis multiplier tensoriellement  $\mathbf{x}$  par  $(\mathbf{y} \otimes \mathbf{z})$ ; on obtient un vecteur  $\mathbf{x} \otimes (\mathbf{y} \otimes \mathbf{z})$ . Pour avoir l'égalité :

$$(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) \otimes \mathbf{z} = \mathbf{x} \otimes (\mathbf{y} \otimes \mathbf{z}) \quad (3.2.2)$$

il faut supposer que le **produit tensoriel est associatif**, ce que l'on pose comme axiome supplémentaire pour la définition des tenseurs d'ordre quelconque.

Le produit tensoriel de trois vecteurs est alors noté  $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \otimes \mathbf{z}$  et représente la valeur commune des deux membres de la relation (3.2.2).

**Décomposition sur une base** - Si l'on a  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{y} = y^j \mathbf{f}_j$ ,  $\mathbf{z} = z^k \mathbf{g}_k$ , le produit tensoriel de ces trois vecteurs qui est à présent associatif, s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \otimes \mathbf{z} &= (\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) \otimes \mathbf{z} = x^i y^j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j) \otimes (z^k \mathbf{g}_k) = x^i y^j z^k (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j) \otimes \mathbf{g}_k \\ &= x^i y^j z^k (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j \otimes \mathbf{g}_k) \end{aligned}$$

Il suffit d'imposer l'associativité du produit tensoriel des vecteurs de base pour assurer l'associativité du produit tensoriel de vecteurs quelconques.

**Produit tensoriel d'un nombre quelconque de vecteurs** - De proche en proche, compte tenu de l'associativité du produit tensoriel, on peut considérer  $p$  vecteurs  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p$  appartenant chacun à des espaces vectoriels différents  $E_{n_1}, E_{n_2}, \dots, E_{n_p}$ . Si l'on a :  $\mathbf{x}_1 = x^{i_1} \mathbf{e}_{i_1}$ ,  $\mathbf{x}_2 = x^{i_2} \mathbf{e}_{i_2}, \dots$ , on peut former le produit tensoriel :

$$\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_p = x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_p} (\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p}) \quad (3.2.3)$$

avec  $i_1 = 1 \text{ à } n_1, i_2 = 1 \text{ à } n_2, \dots, i_p = 1 \text{ à } n_p$ .

On obtient des produits tensoriels d'ordre  $p$  appartenant à l'espace vectoriel  $E_{n_1} \otimes$

$E_{n_2} \otimes \dots \otimes E_{n_p}$ , espace qui est muni d'une structure de produit tensoriel. Les éléments de cet espace constituent des tenseurs d'ordre  $p$ .

### 3.2.2 Produit tensoriel d'espaces identiques

En pratique, on a souvent à utiliser des tenseurs formés à partir de vecteurs appartenant à des espaces vectoriels  $E_n$  identiques.

**Produit tensoriel de  $p$  vecteurs** - De manière générale, on pourra former l'espace  $E_n^{(p)}$  correspondant à  $p$  fois la multiplication tensorielle de l'espace  $E_n$  par lui-même, soit :

$$E_n^{(p)} = E_n \otimes E_n \otimes \dots \otimes E_n \quad (3.2.4)$$

Si l'on note à présent  $p$  vecteurs de  $E_n$  sous la forme :  $\mathbf{x}_1 = x^{i_1} \mathbf{e}_{i_1}$ ,  $\mathbf{x}_2 = x^{i_2} \mathbf{e}_{i_2}, \dots$ , les produits tensoriels de  $E_n^{(p)}$  sont des tenseurs d'ordre  $p$  de la forme :

$$\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_p = x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_p} (\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p}) \quad (3.2.5)$$

avec  $i_1, i_2, \dots, i_p = 1$  à  $n$ .

**Somme de produits tensoriels** - Tous les éléments d'un espace produit tensoriel  $E_n^{(2)}$  ne sont pas des produits tensoriels ainsi qu'on l'a vu précédemment. On peut généraliser la décomposition que l'on a faite pour les tenseurs d'ordre deux, selon les formules (3.1.21) et (3.1.22), pour des tenseurs d'ordre quelconque. Tous les vecteurs  $\mathbf{U}$  de l'espace  $E_n^{(p)}$  peuvent s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{U} = u^{i_1 i_2 \dots i_p} (\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p}) = (u^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_1}) \otimes (\mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p}) \quad (3.2.6)$$

avec  $i_1, i_2, \dots, i_p = 1, 2, \dots, n$ .

On a  $n^{p-1}$  termes de la forme  $(u^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_1})$  si l'on considère toutes les valeurs possibles pour les  $(p-1)$  indices  $i_2, i_3, \dots, i_p$ . Ces termes sont des vecteurs de  $E_n$  de la forme :

$$\mathbf{U}_{i_2 \dots i_p} = u^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \quad (3.2.7)$$

Tout vecteur de  $E_n^{(p)}$  peut donc s'écrire sous la forme d'une somme de  $n^{p-1}$  produits tensoriels, soit :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_{i_2 \dots i_p} \otimes (\mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p}) \quad (3.2.8)$$

La sommation s'effectuant sur les  $(p-1)$  indices  $i_2, i_3, \dots, i_p$ . Tous les éléments de  $E_n^{(p)}$  sont donc des sommes d'au plus  $n^{p-1}$  produits tensoriels de  $p$  vecteurs. La notation générale, pour des tenseurs d'ordre  $p$ , étant assez lourde, on se contentera par la suite de considérer des espaces  $E_n^{(2)}$  ou  $E_n^{(3)}$ , la généralisation étant souvent évidente pour des espaces d'ordre plus élevé.

### 3.2.3 Classification des tenseurs

Tous les tenseurs sont des éléments d'un espace vectoriel muni d'une structure de produit tensoriel. Ce sont donc des vecteurs. La création d'une structure de produit tensoriel met en jeu un certain nombre  $p$  d'espaces vectoriels plus "élémentaires". C'est ce nombre  $p$  qui détermine l'ordre d'un tenseur.

Afin d'unifier la classification, les espaces vectoriels élémentaires, non munis d'une structure de produit tensoriel, peuvent être considérés comme ayant pour éléments **des tenseurs d'ordre un**. En général, on appellera ces éléments des vecteurs réservant le nom de tenseurs à des éléments d'espaces tensoriels d'ordre égal ou supérieur à deux.

Il est commode d'appeler **tenseurs d'ordre zéro** les grandeurs scalaires.

## 3.3 Produit scalaire

Les espaces produits tensoriels  $E_n^{(p)}$ , étant des espaces vectoriels, tous les résultats obtenus au chapitre Premier leur sont applicables. En particulier, les espaces produits tensoriels deviennent pré-euclidiens lorsqu'on les munit d'un produit scalaire ainsi qu'on va le faire maintenant.

### 3.3.1 Produit scalaire d'un produit tensoriel par un vecteur de base

On suppose que l'espace vectoriel  $E_n$  est pré-euclidien ; sur ses vecteurs de base  $\mathbf{e}_i$  est défini un produit scalaire noté :  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ij}$ . Il en résulte que les composantes contravariantes  $x^i$  et covariantes  $x_i$  d'un vecteur quelconque  $\mathbf{x}$  de  $E_n$  sont liées par la relation (1.5.12) :

$$x_j = x^i g_{ij} \quad (3.3.1)$$

Considérons à présent le cas d'un espace tensoriel  $E_n^{(2)}$  pour la suite des démonstrations, la généralisation à un espace  $E_n^{(p)}$  se faisant ensuite facilement. Soit deux vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  de  $E_n$  et un produit tensoriel  $\mathbf{U} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$  de  $E_n^{(2)}$ . Les composantes du produit tensoriel sont notées :

$$u^{ij} = x^i y^j \quad (3.3.2)$$

Définissons le produit scalaire de  $\mathbf{U}$  par un vecteur de base  $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$  de  $E_n^{(2)}$  par la relation suivante :

$$\mathbf{U} \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = x_i y_j \quad (3.3.3)$$

où les quantités  $x_i$  et  $y_j$  sont les composantes covariantes respectivement des vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ . Les axiomes du produit scalaire, posés au chapitre Premier à partir des propriétés PS1 à PS4, sont manifestement vérifiées par la définition (3.3.3). Remarquons que le produit scalaire ainsi défini pour les produits tensoriels de  $E_n^{(2)}$

est lui-même tributaire de la définition que l'on se donne du produit scalaire sur  $E_n$  puisqu'on a, d'après la définition des composantes covariantes de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  :

$$x_i y_j = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i) (\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_j) \quad (3.3.4)$$

Développant l'expression (3.3.3), il vient compte tenu de l'expression (3.3.2) des composantes du produit tensoriel :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) &= [u^{kl} (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)] \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = [x^k y^l (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)] \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \\ &= x^k y^l [(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)] \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

D'autre part, substituons l'expression (3.3.1) des composantes covariantes dans la définition (3.3.3), on obtient :

$$\mathbf{U} \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = (x^k g_{ki}) (y^l g_{lj}) = x^k y^l g_{ki} g_{lj} \quad (3.3.6)$$

Puisque les vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont arbitraires, l'égalité entre les relations (3.3.5) et (3.3.6) nécessite que l'on ait :

$$(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = g_{ki} g_{lj} \quad (3.3.7)$$

Cette dernière expression montre que la relation (3.3.3) constitue bien une définition du produit scalaire puisque ceci revient à poser la relation fondamentale (3.3.7) que l'on peut encore écrire :

$$(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i) (\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_j) \quad (3.3.8)$$

### 3.3.2 Produit scalaire d'un tenseur par un vecteur de base

Tout tenseur  $\mathbf{U}$  de  $E_n^{(2)}$  s'écrit sous forme d'une somme de produits tensoriels donnée par l'expression (3.1.26), soit :

$$\mathbf{U} = \mathbf{x}_j \otimes \mathbf{f}_j \quad (3.3.9)$$

où les  $\mathbf{x}_j$  sont des vecteurs de  $E_n$  que l'on peut écrire sous la forme :

$$\mathbf{x}_j = u^{jk} \mathbf{e}_k \quad (3.3.10)$$

Formons le produit scalaire du tenseur  $\mathbf{U}$  par un vecteur de base de  $E_n^{(2)}$  en utilisant les relations (3.3.9) et (3.3.10), il vient :

$$\mathbf{U} \cdot (\mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m) = (\mathbf{x}_j \otimes \mathbf{f}_j) \cdot (\mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m) = u^{jk} (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_j) \cdot (\mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m) \quad (3.3.11)$$

Compte tenu de la relation (3.3.7), on obtient :

$$\mathbf{U} \cdot (\mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m) = u^{jk} g_{kl} g_{jm} \quad (3.3.12)$$

### 3.3.3 Produit scalaire de deux tenseurs de même ordre

Considérons deux tenseurs de l'espace  $E_n^{(2)}$  :

$$\mathbf{U} = u^{jk} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) \ ; \ \mathbf{V} = v^{lm} (\mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m) \quad (3.3.13)$$

et formons le produit scalaire  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$ . il vient en utilisant les relations (3.3.13) :

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = [u^{jk} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)] \cdot [v^{lm} (\mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m)] = u^{jk} v^{lm} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) \cdot (\mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m) \quad (3.3.14)$$

Cette dernière expression devient, compte tenu de la relation (3.3.7) :

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = u^{jk} v^{lm} g_{jl} g_{km} \quad (3.3.15)$$

On retrouve l'expression générale du produit scalaire de deux vecteurs donnée par la relation (1.4.4), où la numérotation des composantes doit être convenablement adaptée. Les quantités  $(g_{jl} g_{km})$  représentent les produits scalaires des vecteurs de base de l'espace  $E_n^{(2)}$ .

L'espace produit tensoriel  $E_n^{(2)}$ , ainsi pourvu d'un produit scalaire, devient un espace produit tensoriel pré-euclidien. Ses éléments sont **des tenseurs pré-euclidiens**.

### 3.3.4 Composantes d'un tenseur pré-euclidien

**Composantes contravariantes** - Soit une base  $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$  de l'espace tensoriel pré-euclidien  $E_n^{(2)}$ . Les tenseurs pré-euclidiens  $\mathbf{U}$  de  $E_n^{(2)}$  s'écrivent sous la forme générale suivante :

$$\mathbf{U} = u^{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \quad (3.3.16)$$

Les composantes  $u^{ij}$  sont appelées les composantes contravariantes du tenseur  $\mathbf{U}$ . Au chapitre Premier, on a vu que, pour les vecteurs pré-euclidiens, ces composantes se transforment, lors d'un changement de base, selon des relations qui sont le contraire de celles des vecteurs de base. On verra qu'il en est évidemment de même pour les composantes contravariantes des tenseurs pré-euclidiens.

**Composantes covariantes** - Rappelons que les composantes covariantes  $x_j$  d'un vecteur quelconque  $\mathbf{x}$  sont définies de manière générale, par la relation (1.5.7) :

$$x_j = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j \quad (3.3.17)$$

Par suite, la relation (3.3.12), qui donne la valeur du produit scalaire d'un tenseur  $\mathbf{U}$  par un vecteur de base, soit :

$$\mathbf{U} \cdot (\mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m) = u^{jk} g_{jl} g_{km} \quad (3.3.18)$$

représente l'expression de la composante covariante  $u_{lm}$  du tenseur  $\mathbf{U}$ . On a donc :

$$u_{lm} = u^{jk} g_{jl} g_{km} \quad (3.3.19)$$

On verra que les composantes covariantes se transforment, lors d'un changement de base, de même manière que les vecteurs de base.

**Composantes mixtes** - On a vu, au chapitre 2, qu'apparaissent également les composantes mixtes des tenseurs. On définit, par exemple, la composante mixte  $u_j^i$ , à partir de ses composantes contravariantes, par :

$$u_j^i = g_{ik} u^{kj} \quad (3.3.20)$$

Cependant, on verra que l'étude des bases auxquelles sont rapportées les différentes composantes permet de mieux comprendre comment s'introduisent les composantes mixtes.

### 3.3.5 Expression du produit scalaire

L'expression (3.3.15) représente le produit scalaire de deux tenseurs euclidiens en fonction de leurs composantes contravariantes, soit :

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = u^{jk} v^{lm} g_{jl} g_{km} \quad (3.3.21)$$

Les composantes covariantes du tenseur  $\mathbf{V}$  sont données par l'expression (3.3.19), à savoir  $v_{lm} = v^{jk} g_{jl} g_{km}$ , que l'on substitue dans la relation (3.3.21). On obtient l'expression du produit scalaire de deux tenseurs sous la forme :

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = u^{jk} v_{jk} \quad (3.3.22)$$

On retrouve l'expression (1.5.17) du produit scalaire de deux vecteurs en fonction de leurs composantes contravariantes et covariantes.

### 3.3.6 Tenseurs euclidiens d'ordre quelconque

Les résultats précédents se généralisent pour des tenseurs d'ordre quelconque. Soit un espace tensoriel  $E_n^{(p)}$  dont les vecteurs de base notés :  $(\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p})$ , la relation (3.3.7) devient :

$$(\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p}) \cdot (\mathbf{e}_{j_1} \otimes \mathbf{e}_{j_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_p}) = g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \dots g_{i_p j_p} \quad (3.3.23)$$

Le produit scalaire de deux tenseurs  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  de  $E_n^{(p)}$  s'écrit, en généralisant la relation (3.3.15) :

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = u^{i_1 i_2 \dots i_p} v^{j_1 j_2 \dots j_p} g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \dots g_{i_p j_p} \quad (3.3.24)$$

Les relations entre les composantes covariantes et contravariantes, données par (3.3.19), s'écrivent pour un tenseur d'ordre  $p$  :

$$v_{i_1 i_2 \dots i_p} = v^{j_1 j_2 \dots j_p} g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \dots g_{i_p j_p} \quad (3.3.25)$$

La généralisation de la relation (3.3.22) donne également l'expression du produit scalaire en fonction des composantes contravariantes et covariantes ; on a la relation :

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = u^{i_1 i_2 \dots i_p} v_{i_1 i_2 \dots i_p} \quad (3.3.26)$$

Le produit scalaire de deux vecteurs est donné par la somme des produits de leurs composantes contravariantes et covariantes.

## 3.4 Bases d'un espace produit tensoriel

### 3.4.1 Bases réciproques

La notion de bases réciproques a été définie au cours du premier chapitre. Les espaces tensoriels ayant pour base des vecteurs, on va pouvoir généraliser la notion de bases réciproques aux espaces produits tensoriels pré-euclidiens. On va alors retrouver les mêmes propriétés de décomposition des tenseurs sur les bases réciproques que celles que l'on a mises en évidence pour les vecteurs.

**Produits tensoriels de vecteurs réciproques** - Choisissons une base  $(\mathbf{e}_i)$  de l'espace vectoriel  $E_n$  dont la base réciproque est notée  $(\mathbf{e}^j)$ . La décomposition des vecteurs  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{e}^j$  sur leur base réciproque est donnée par les relations (1.5.32) et (1.5.33), à savoir :

$$(a) \quad \mathbf{e}_i = g_{ik} \mathbf{e}^k \quad ; \quad (b) \quad \mathbf{e}^k = g^{ik} \mathbf{e}_i \quad (3.4.1)$$

Si les vecteurs  $\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  forment une base de  $E_n^{(2)}$ , il en est de même pour les vecteurs  $\mathbf{e}^{ij} = \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$  puisque les vecteurs  $\mathbf{e}^k$  sont des vecteurs de base de  $E_n$  et par suite de l'axiome **PT3** du produit tensoriel.

On va montrer que les systèmes de vecteurs  $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$  et  $(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j)$  sont réciproques ; pour cela formons leur produit scalaire en utilisant l'expression (3.4.1)(b), il vient :

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot (\mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^l) = g^{km} g^{lp} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_p) \quad (3.4.2)$$

Les relations (3.3.7) et (1.5.44) :  $g^{km} g_{im} = \delta_{ki}$ , nous donnent par substitution dans le produit scalaire précédent :

$$\mathbf{e}_{ij} \cdot \mathbf{e}^{kl} = g^{km} g^{lp} g_{im} g_{jp} = (g^{km} g_{im})(g^{lp} g_{jp}) = \delta_{ki} \delta_{lj} \quad (3.4.3)$$

On obtient la relation de définition (1.5.27) d'un système de vecteurs réciproques, la notation indicielle devant naturellement être adaptée par rapport à la relation (1.5.27). Tous les vecteurs  $\mathbf{e}_{ij}$  sont orthogonaux aux vecteurs  $\mathbf{e}^{kl}$ , sauf pour  $i = k$ ,  $l = j$ .

Les relations entre les vecteurs réciproques sont donc identiques à celles obtenues au chapitre Premier. On a par exemple, en substituant la relation (3.4.1)(a) dans l'expression des vecteurs de base  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  :

$$\mathbf{e}_{ij} = (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = (g_{ik} \mathbf{e}^k) \otimes (g_{jl} \mathbf{e}^l) = g_{ik} g_{jl} \mathbf{e}^{kl} \quad (3.4.4)$$

**Produits tensoriels mixtes** - On peut former d'autres bases de l'espace  $E_n^{(2)}$  en effectuant des combinaisons des bases réciproques  $(\mathbf{e}_i)$  et  $(\mathbf{e}^j)$  de  $E_n$ . On obtient ainsi deux autres types de vecteurs de base de  $E_n^{(2)}$  de la forme :

$$\mathbf{e}_i^j = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \quad ; \quad \mathbf{e}^i_j = \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j \quad (3.4.5)$$

Ces deux bases sont différentes puisque le produit tensoriel n'est pas commutatif. L'ordre des indices est donc important pour la notation puisqu'il indique l'ordre dans lequel est effectué le produit tensoriel des vecteurs de base de  $E_n$ . Montrons que les systèmes de vecteurs donnés par la relation (3.4.5) sont réciproques. Effectuons le produit scalaire des vecteurs  $\mathbf{e}_i^j$  et  $\mathbf{e}^k_l$  en utilisant la relation (3.4.1)(b), il vient :

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j) \cdot (\mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}_l) = g^{jm} g^{kp} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m) \cdot (\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_l) \quad (3.4.6)$$

Les relations (3.3.7) et (1.5.44) substituées dans (3.4.6), donnent :

$$\mathbf{e}_i^j \cdot \mathbf{e}^k_l = g^{jm} g^{kp} g_{ip} g_{ml} = (g^{jm} g_{ml}) (g^{kp} g_{ip}) = \delta_{jl} \delta_{ki} \quad (3.4.7)$$

Les systèmes  $\mathbf{e}_i^j$  et  $\mathbf{e}^k_l$  constituent deux bases réciproques de  $E_n^{(2)}$ .

Les vecteurs des différentes bases de  $E_n^{(2)}$  peuvent s'exprimer en fonction les uns des autres. On a par exemple :

$$\mathbf{e}_i^j = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j = g_{ik} (\mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^j) = g_{ik} \mathbf{e}^{kj} \quad (3.4.8)$$

On remarque que le passage d'un type de vecteur à un autre s'effectue toujours par multiplication par des quantités  $g_{ik}$  ou  $g^{ik}$  et sommation. L'abaissement d'un seul indice (relation (3.4.8) par exemple) de la position supérieure contravariante à la position inférieure covariante, ne nécessite qu'une seule quantité  $g_{ik}$ . Par contre l'abaissement de deux indices (relation (3.4.4) par exemple), fait intervenir des produits de la forme  $g_{ik} g_{jl}$ .

### 3.4.2 Composantes des tenseurs pré-euclidiens

**Composantes contravariantes et covariantes** - Comme pour les vecteurs, la notion de contravariance et de covariance est relative au choix de la base que l'on considère comme étant celle de référence. En particulier les composantes covariantes relativement à une base deviennent contravariantes dans la base réciproque. Considérons la base notée  $\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  comme étant la base de référence de  $E_n^{(2)}$ . On note  $\mathbf{e}^{ij} = \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$  sa base réciproque.

La décomposition d'un tenseur  $\mathbf{U}$  de  $E_n^{(2)}$  s'écrit sur ces bases :

$$\mathbf{U} = u^{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = u_{kl} (\mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^l) \quad (3.4.9)$$

avec  $u_{kl} = \mathbf{U} \cdot (\mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^l)$ . Les quantités  $u^{ij}$  sont les composantes contravariantes de  $\mathbf{U}$  par rapport à la base  $\mathbf{e}_{ij}$ ; on peut également dire que ces composantes  $u^{ij}$  sont deux fois contravariantes par rapport à la base  $\mathbf{e}_i$  de  $E_n$ .

Les quantités  $u_{kl}$  sont les composantes covariantes de  $\mathbf{U}$  par rapport à la base  $\mathbf{e}_{ij}$  ; on peut dire également que ces composantes sont deux fois covariantes par rapport à la base  $\mathbf{e}_i$  de  $E_n$ . Dans la formule (3.4.9) les composantes  $u_{kl}$  apparaissent également comme les composantes contravariantes dans la base  $\mathbf{e}^{ij}$  ; les quantités  $u_{kl}$  sont également deux fois contravariantes par rapport à la base  $\mathbf{e}^i$ .

On va retrouver la relation (3.3.19) entre les composantes contravariantes et covariantes. Substituons dans (3.4.9) l'expression (3.4.4), il vient :

$$\mathbf{U} = u^{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = u^{ij} [g_{ik} g_{jl} (\mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^l)] = u_{kl} (\mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^l) \quad (3.4.10)$$

Identifiant les composantes relatives à un même vecteur de base, on obtient la relation (3.3.19) entre composantes contravariantes et covariantes :

$$u_{kl} = u^{ij} g_{ik} g_{jl} \quad (3.4.11)$$

ce qui permet le calcul des composantes covariantes connaissant les composantes contravariantes.

Inversement, on peut obtenir l'expression des composantes contravariantes en fonction des covariantes en résolvant le système algébrique de  $n^2$  équations (3.4.11). Plus simplement, l'utilisation de l'expression (3.4.1)(b) permet d'écrire la relation (3.4.9) sous la forme :

$$\mathbf{U} = u_{kl} (\mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^l) = u_{kl} (g^{ki} \mathbf{e}_i \otimes g^{lj} \mathbf{e}_j) = u_{kl} g^{ki} g^{lj} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = u^{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \quad (3.4.12)$$

L'identification des composantes du tenseur  $\mathbf{U}$  nous donne :

$$u^{ij} = u_{kl} g^{ki} g^{lj} \quad (3.4.13)$$

Connaissant les composantes covariantes, on peut déduire de la relation (3.4.13) les composantes contravariantes de  $\mathbf{U}$ .

**Composantes mixtes** - Lorsqu'un tenseur  $\mathbf{U}$  est décomposé sur une base mixte  $\mathbf{e}_i^j$  sous la forme :

$$\mathbf{U} = u_j^i (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j) \quad (3.4.14)$$

les composantes  $u_j^i$  sont appelées composantes mixtes. On dit que  $u_j^i$  est une composante une fois contravariante et une fois covariante par rapport à la base  $\mathbf{e}_i$ , ce qui justifie le terme de composante mixte.

Les composantes mixtes s'expriment en fonction des autres types de composantes. Pour obtenir ces diverses expressions, il suffit de transformer les vecteurs de base  $\mathbf{e}_i$  ou  $\mathbf{e}^i$  en utilisant les relations (3.4.1). On a par exemple :

$$\mathbf{U} = u_j^i (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j) = u_j^i (g_{ik} \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^j) = u_j^i g_{ik} (\mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^j) = u_{kj} (\mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^j) \quad (3.4.15)$$

Par identification des composantes de l'expression précédente, il vient :

$$u_{kj} = u_j^i g_{ik} \quad (3.4.16)$$

Inversement on a, en utilisant (3.4.1)(b) :

$$u_{kj} (\mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^j) = u_{kj} (g^{ki} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j) = u_{kj} g^{ki} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j) = u_j^i (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j) \quad (3.4.17)$$

soit en identifiant les composantes de l'expression précédente :

$$u_j^i = u_{kj} g^{ki} \quad (3.4.18)$$

### 3.4.3 Tenseurs d'ordre quelconque

Les formules précédentes, pour les bases et les composantes des tenseurs de  $E_n^{(2)}$ , se généralisent pour des tenseurs d'ordre  $p$  quelconque. Les bases d'un espace tensoriel  $E_n^{(p)}$  seront des combinaisons des vecteurs réciproques  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{e}^j$  de  $E_n$ .

La base suivante  $(\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p})$ , donne la décomposition d'un tenseur  $\mathbf{U}$  de  $E_n^{(p)}$  sous la forme :

$$\mathbf{U} = u^{i_1 i_2 \dots i_p} (\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p}) \quad (3.4.19)$$

Les quantités  $u^{i_1 i_2 \dots i_p}$  sont les composantes  $p$  fois contravariantes par rapport à la base  $\mathbf{e}_i$ . On dira plus simplement que ce sont les composantes contravariantes de  $\mathbf{U}$  par rapport à la base  $(\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p})$ .

La base réciproque de  $(\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p})$  est notée  $(\mathbf{e}^{i_1} \otimes \mathbf{e}^{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{i_p})$  et le tenseur  $\mathbf{U}$  se décompose sur cette base sous la forme :

$$\mathbf{U} = u_{i_1 i_2 \dots i_p} (\mathbf{e}^{i_1} \otimes \mathbf{e}^{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{i_p}) \quad (3.4.20)$$

Les quantités  $u_{i_1 i_2 \dots i_p}$  sont les composantes  $p$  fois covariantes par rapport à la base  $\mathbf{e}_i$ . On dira que ce sont les composantes covariantes du tenseur  $\mathbf{U}$  par rapport à la base  $(\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p})$ .

Les bases mixtes sont obtenues en combinant diversement des vecteurs  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{e}^j$ . Par exemple, la base mixte  $(\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}^{i_2} \otimes \mathbf{e}^{i_3} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p})$  donne la décomposition suivante d'un tenseur  $\mathbf{U}$  :

$$\mathbf{U} = u^{i_1 i_3 \dots i_p}_{i_2} (\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}^{i_2} \otimes \mathbf{e}_{i_3} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p}) \quad (3.4.21)$$

Les quantités  $u^{i_1 i_3 \dots i_p}_{i_2}$  sont les composantes mixtes d'un tenseur  $\mathbf{U}$ . Ces composantes sont une fois covariante et  $(p-1)$  fois contravariantes par rapport à la base  $\mathbf{e}_i$ .

Les diverses relations entre les composantes de type différent se généralisent. On a par exemple, pour les composantes covariantes en fonction des composantes contravariantes :

$$u_{i_1 i_2 \dots i_p} = g_{i_1 k_1} g_{i_2 k_2} \dots g_{i_p k_p} u^{k_1 k_2 \dots k_p} \quad (3.4.22)$$

Inversement, les composantes contravariantes s'expriment en fonction des composantes covariantes sous la forme :

$$u^{i_1 i_2 \dots i_p} = g^{i_1 k_1} g^{i_2 k_2} \dots g^{i_p k_p} u_{k_1 k_2 \dots k_p} \quad (3.4.23)$$

La composante mixte  $u_{i_1}^{i_2 \dots i_p}$ , une fois covariante et  $(p-1)$  fois contravariantes, s'obtient à partir des composantes contravariantes par :

$$u_{i_1}^{i_2 \dots i_p} = g_{i_1 k_1} u^{k_1 i_2 \dots i_p} \quad (3.4.24)$$

La composante mixte  $u_{i_1 i_2}^{i_3 \dots i_p}$ , deux fois covariantes et  $(p-2)$  fois contravariantes, s'obtient à partir des composantes contravariantes par :

$$u_{i_1 i_2}^{i_3 \dots i_p} = g_{i_1 k_1} g_{i_2 k_2} u^{k_1 k_2 i_3 \dots i_p} \quad (3.4.25)$$

La composante mixte  $u_{i_2 \dots i_p}^{i_1}$ , une fois contravariante et  $(p-1)$  fois covariantes, s'obtient à partir des composantes covariantes par :

$$u_{i_2 \dots i_p}^{i_1} = g^{i_1 k_1} u_{k_1 i_2 \dots i_p} \quad (3.4.26)$$

**On voit que, par multiplication par une quantité  $g^{ij}$  ou  $g_{ij}$  et sommation, on peut placer chacun des indices d'un tenseur en position soit contravariante, soit covariante.**

### 3.4.4 Changement de base

On a vu, au chapitre II, les propriétés de changement de base des composantes des tenseurs d'ordre deux. Ces propriétés ont servi, au cours du chapitre II, à définir les composantes d'un tenseur d'ordre deux à partir de  $n^2$  quantités données. On va retrouver maintenant ces propriétés de changement de base comme conséquences de la définition des espaces tensoriels donnée dans le présent chapitre.

Considérons un espace vectoriel  $E_n$  rapporté aux bases  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{e}'_j$  telles que :

$$(a) \quad \mathbf{e}_i = A_i^k \mathbf{e}'_k ; \quad (b) \quad \mathbf{e}'_k = A_k^i \mathbf{e}_i \quad (3.4.27)$$

Choisissons, à titre d'exemple, le cas d'un espace tensoriel euclidien  $E_n^{(3)}$  dont la base associée à  $\mathbf{e}_i$  est constituée par les vecteurs  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$  et celle associée à  $\mathbf{e}'_j$  est  $\mathbf{e}'_1 \otimes \mathbf{e}'_m \otimes \mathbf{e}'_r$ . Substituant les relations (3.4.27) dans chaque base associée et compte tenu des propriétés du produit tensoriel, on obtient :

$$(a) \quad \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k = (A_i^l A_j^m A_k^r) \mathbf{e}'_l \otimes \mathbf{e}'_m \otimes \mathbf{e}'_r \quad (3.4.28)$$

$$(b) \quad \mathbf{e}'_1 \otimes \mathbf{e}'_m \otimes \mathbf{e}'_r = (A_l^i A_m^j A_r^k) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \quad (3.4.29)$$

**Composantes contravariantes** - Soit un tenseur  $\mathbf{U}$  de l'espace tensoriel  $E_n^{(3)}$  dont la décomposition rapportée à chacune des bases précédentes est :

$$\mathbf{U} = u^{ijk} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) = u'^{lmr} (\mathbf{e}'_l \otimes \mathbf{e}'_m \otimes \mathbf{e}'_r) \quad (3.4.30)$$

Substituons la relation (3.4.28) dans l'expression (3.4.30), il vient :

$$\mathbf{U} = u^{ijk} (A_i^l A_j^m A_k^r) \mathbf{e}'_l \otimes \mathbf{e}'_m \otimes \mathbf{e}'_r \quad (3.4.31)$$

Comparant les composantes relatives aux mêmes vecteurs de base  $\mathbf{e}'_l \otimes \mathbf{e}'_m \otimes \mathbf{e}'_r$  des relations précédentes, on obtient :

$$u'^{lmr} = (A_i^l A_j^m A_k^r) u^{ijk} \quad (3.4.32)$$

C'est l'expression reliant les composantes contravariantes d'un tenseur d'ordre trois d'une base dans une autre. Cette formule se généralise à un tenseur d'ordre quelconque. Inversement, on a :

$$u^{ijk} = (A_i^l A_j^m A_k^r) u'^{lmr} \quad (3.4.33)$$

On vérifie que les composantes contravariantes  $u^{ijk}$  se transforment selon des formules contraires de celles des vecteurs de base de  $E_n^{(3)}$ .

**Composantes covariantes** - Les composantes covariantes d'un tenseur euclidien  $\mathbf{U}$  sont données, dans chaque base, par le produit scalaire :

$$(a) \quad \mathbf{U} \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) = u_{ijk} \quad ; \quad (b) \quad \mathbf{U} \cdot (\mathbf{e}'_l \otimes \mathbf{e}'_m \otimes \mathbf{e}'_r) = u'_{lmr} \quad (3.4.34)$$

Substituons dans la relation (3.4.34)(a) la formule de changement de base (3.4.28), il vient :

$$u_{ijk} = \mathbf{U} \cdot [(A_i^l A_j^m A_k^r) \mathbf{e}'_l \otimes \mathbf{e}'_m \otimes \mathbf{e}'_r] = (A_i^l A_j^m A_k^r) u'_{lmr} \quad (3.4.35)$$

C'est l'expression reliant les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre trois d'une base dans une autre et cette formule se généralise à des tenseurs d'ordre quelconque. Inversement, on a :

$$u'_{lmr} = (A_i^l A_j^m A_k^r) u_{ijk} \quad (3.4.36)$$

Les composantes covariantes  $u_{ijk}$  se transforment de la même manière que les vecteurs de base de  $E_n^{(3)}$ .

**Composantes mixtes** - Considérons deux systèmes de vecteurs réciproques ; d'une part  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{e}^j$  et d'autre part  $\mathbf{e}'_l$  et  $\mathbf{e}'^m$ . Ces bases sont liées entre elles par les relations (3.4.27) et les vecteurs réciproques sont tels que :

$$\mathbf{e}^j = A_m^j \mathbf{e}'^m \quad ; \quad \mathbf{e}'^m = A_j^m \mathbf{e}^j \quad (3.4.37)$$

Soient deux bases associées de  $E_n^{(3)}$  telles que  $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k)$  et  $(\mathbf{e}'_l \otimes \mathbf{e}'^m \otimes \mathbf{e}'^r)$  ; on a les relations suivantes entre les bases :

$$(a) \quad \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k = (A_i^{l'} A_m^j A_k^{r'}) \mathbf{e}'_l \otimes \mathbf{e}'^m \otimes \mathbf{e}'_r \quad (3.4.38)$$

$$(b) \quad \mathbf{e}'_l \otimes \mathbf{e}'^m \otimes \mathbf{e}'_r = (A_l^i A_j^m A_r^k) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k \quad (3.4.39)$$

Considérons un tenseur  $\mathbf{U}$  de  $E_n^{(3)}$  dont la décomposition sur ces bases nous donne :

$$\mathbf{U} = u_j^{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k = u_m^{l'r} \mathbf{e}'_l \otimes \mathbf{e}'^m \otimes \mathbf{e}'_r \quad (3.4.40)$$

Substituons dans la relation précédente les expressions (3.4.38) et (3.4.39), il vient :

$$\mathbf{U} = u_j^{ik} (A_i^{l'} A_m^j A_k^{r'}) \mathbf{e}'_l \otimes \mathbf{e}'^m \otimes \mathbf{e}'_r = u_m^{l'r} (A_l^i A_j^m A_r^k) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k \quad (3.4.41)$$

Comparant les composantes d'un même vecteur de base dans les relations (3.4.40), on obtient :

$$u_j^{ik} = u_m^{l'r} (A_l^i A_j^m A_r^k) \quad ; \quad u_m^{l'r} = u_j^{ik} (A_i^{l'} A_m^j A_k^{r'}) \quad (3.4.42)$$

Ce sont les relations liant les composantes mixtes d'un tenseur d'ordre trois d'une base dans une autre où l'on voit apparaître la règle de formation des formules de changement de base pour des tenseurs d'ordre quelconque.

### 3.4.5 Critère de tensorialité

Réciproquement, donnons-nous un système de  $n^3$  quantités, par exemple  $u^{ijk}$ , et rattachons ces quantités à une base  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$ . Si l'on effectue un changement de base tel que  $\mathbf{e}'_l \otimes \mathbf{e}'^m \otimes \mathbf{e}'_r$  défini par les relations (3.4.28) et (3.4.29), et si les quantités  $u^{ijk}$  se transforment dans ce changement de base selon les formules (3.4.35) et (3.4.36), alors on peut faire correspondre un tenseur  $\mathbf{U}$  à ces  $n^3$  quantités  $u^{ijk}$  qui constituent les composantes contravariantes de ce tenseur. Ces composantes définissent le même tenseur  $\mathbf{U}$  par rapport à n'importe quelle base puisqu'elles vérifient les lois de transformation.

On peut faire les mêmes remarques en ce qui concerne les composantes covariantes et les composantes mixtes. De plus, ces remarques sont valables pour des tenseurs d'ordre quelconque.

On a donc le théorème suivant : **Pour qu'une suite de  $n^3$  quantités, rapportées à une base d'un espace tensoriel  $E_n^{(3)}$ , puisse être considérée comme composantes d'un tenseur, il faut et il suffit que ces quantités soient liées entre elles, dans deux bases différentes de  $E_n^{(3)}$ , par les formules précédentes de transformation des composantes.**

Cette conclusion se généralise à  $n^p$  quantités pouvant constituer les composantes d'un tenseur d'un espace tensoriel  $E_n^{(p)}$ . Ce théorème peut servir de définition des composantes d'un tenseur ainsi qu'on l'a fait au chapitre 2.

## 3.5 Opérations sur les tenseurs

### 3.5.1 Addition de tenseurs du même ordre

Les tenseurs vont suivre la règle classique d'addition des vecteurs. Si l'on se donne deux tenseurs  $\mathbf{U} = u^{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$  et  $\mathbf{V} = v^{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$ , l'addition leur fait correspondre un autre tenseur  $\mathbf{T}$  dont les composantes contravariantes sont la somme des composantes contravariantes des tenseurs  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$ , soit :

$$\mathbf{T} = \mathbf{U} + \mathbf{V} = (u^{ijk} + v^{ijk}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \quad (3.5.1)$$

Pour s'additionner, les tenseurs doivent évidemment être rapportés à une même base. La somme des composantes covariantes de deux tenseurs donne les composantes covariantes de leur somme. Il en est de même pour les composantes mixtes relatives à une même base.

### 3.5.2 Multiplication tensorielle

Les espaces produits tensoriels étant également des espaces vectoriels, ils peuvent être utilisés pour former d'autres espaces produits tensoriels.

Soit, par exemple, un tenseur  $\mathbf{U}$  appartenant à un espace  $E_n^{(2)}$  et un autre  $\mathbf{V}$ , élément d'un autre espace  $E_n^{(3)}$ . La multiplication tensorielle va leur faire correspondre un tenseur d'ordre cinq. Soient  $u^{ij}$  et  $v^{klm}$  leurs composantes respectives ; le produit tensoriel  $\mathbf{T} = \mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$  aura pour composantes :

$$w^{ijklm} = u^{ij} v^{klm} \quad (3.5.2)$$

Le produit tensoriel  $\mathbf{T}$  est un tenseur de l'espace produit tensoriel  $E_n^{(5)} = E_n^{(2)} \otimes E_n^{(3)}$ . Si l'on considère que les grandeurs scalaires sont des tenseurs d'ordre zéro, la multiplication d'un tenseur par un scalaire apparaît alors comme un cas particulier de la multiplication tensorielle.

### 3.5.3 Contraction des indices

En dehors des opérations d'addition et de multiplication tensorielle, il existe une opération qui permet, à partir d'un tenseur donné, d'en obtenir d'autres : c'est l'**opération de contraction des indices**.

**Exemple : produit scalaire** - Considérons le produit tensoriel de deux vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  de composantes respectives contravariantes  $x^i$  et covariantes  $y_j$ . Les composantes mixtes du produit tensoriel  $\mathbf{V}$  de ces deux vecteurs sont :

$$v_j^i = x^i y_j \quad (3.5.3)$$

Effectuons l'addition des différentes composantes du tenseur  $\mathbf{V}$  telles que  $i = j$ , soit :

$$v = x^i y_i \quad (3.5.4)$$

On obtient l'expression du produit scalaire des vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  ; la quantité  $v$  est un scalaire ou tenseur d'ordre zéro. Une telle addition des indices de variance différente constitue, par définition, l'**opération de contraction des indices du tenseur  $\mathbf{V}$** . Cette opération a permis de passer d'un tenseur d'ordre deux à un tenseur d'ordre zéro ; le tenseur  $\mathbf{V}$  a été amputé d'une covariance et d'une contravariance.

**Exemple : tenseur d'ordre trois** - Prenons l'exemple d'un tenseur  $\mathbf{U}$  dont les composantes mixtes sont  $u_k^{ij}$ . Considérons certaines de ses composantes telles que  $j = k$ , à savoir les quantités  $u_j^{ij}$  et effectuons l'addition de ces dernières ; on obtient :

$$v^i = u_1^{i1} + u_2^{i2} + \dots + u_n^{in} = \delta_j^k u_k^{ij} \quad (3.5.5)$$

Ces nouvelles quantités  $v^i$  forment les composantes d'un tenseur  $\mathbf{V}$  d'ordre un (vecteur) ainsi qu'on va le vérifier. Les quantités  $v^i$  constituent **des composantes contractées du tenseur  $\mathbf{U}$** .

Vérifions que les quantités  $v^i$  satisfont bien aux formules de changement de base des vecteurs. Pour cela, supposons que les composantes  $u_k^{ij}$  du tenseur  $\mathbf{U}$  aient été définies sur une base  $\mathbf{e}_i$  et choisissons une autre base  $\mathbf{e}'_k$  telle que :

$$(a) \mathbf{e}_i = A_i^k \mathbf{e}'_k ; (b) \mathbf{e}'_k = A_k^i \mathbf{e}_i \quad (3.5.6)$$

Dans la base  $\mathbf{e}'_k$ , le tenseur  $\mathbf{U}$  a comme nouvelles composantes contractées :

$$v'^l = \delta_m^h u_h^{lm} \quad (3.5.7)$$

où les nouvelles composantes  $u_h^{lm}$  ont pour expression :  $u_h^{lm} = A_i^l A_j^m A_h^k u_k^{ij}$ .

On obtient alors pour expression des composantes contractées données par la relation (3.5.5) :

$$v'^l = \delta_m^h A_i^l A_j^m A_h^k u_k^{ij} = A_i^l (\delta_m^h A_j^m A_h^k) u_k^{ij} = A_i^l (A_j^m A_m^k) u_k^{ij} \quad (3.5.8)$$

Avec la relation suivante :  $A_j^m A_m^k = \delta_j^k$ , l'expression (3.5.8) devient :

$$v'^l = A_i^l \delta_j^k u_k^{ij} = A_i^l v^i \quad (3.5.9)$$

On obtient la formule de transformation des composantes d'un tenseur d'ordre un. On dit que **le tenseur  $\mathbf{V}$  est le tenseur contracté, en  $j$  et  $k$ , du tenseur  $\mathbf{U}$** .

La contraction des composantes mixtes d'un tenseur ampute simultanément ces composantes d'une covariance et d'une contravariance. Dans l'exemple précédent, on est ainsi passé d'un tenseur d'ordre trois à un tenseur d'ordre un.

**Tenseur d'ordre quelconque - L'opération de contraction consiste donc, après avoir choisi deux indices, l'un covariant, l'autre contravariant, à les égaier et à sommer par rapport à cet indice deux fois répété.**

Si l'on part de l'expression des composantes contravariantes ou covariantes d'un tenseur, on peut abaisser ou élever l'un des indices par multiplication par  $g_{ij}$  ou  $g^{ij}$  et sommation, afin d'obtenir des composantes mixtes sur lesquelles on effectue l'opération de contraction.

Considérons un tenseur euclidien  $\mathbf{U}$  de composantes contravariantes  $u^{i_1 i_2 \dots i_p}$ . Écrivons les composantes mixtes de  $\mathbf{U}$  en abaissant à la position covariante l'indice  $i_1$  par exemple, soit :

$$u_{j_1}^{i_2 \dots i_p} = g_{i_1 j_1} u^{i_1 i_2 \dots i_p} \quad (3.5.10)$$

Choisissons par exemple l'indice  $i_2$  et effectuons la contraction avec l'indice  $j_1$ , posons  $i_2 = j_1 = k$  ; il vient :

$$v^{i_3 i_4 \dots i_p} = u_k^{k i_3 \dots i_p} = g_{i_1 k} u^{i_1 k i_3 \dots i_p} \quad (3.5.11)$$

On obtient un tenseur d'ordre  $(p - 2)$ . Par suite de la symétrie des quantités  $g_{ij}$ , ce tenseur est identique à celui que l'on obtient en abaissant à la position covariante l'indice  $i_2$  puis en effectuant la contraction avec l'indice  $i_1$ , soit :

$$v^{i_3 i_4 \dots i_p} = u_k^{k i_3 \dots i_p} = g_{i_2 k} u^{k i_2 i_3 \dots i_p} \quad (3.5.12)$$

De manière générale, la contraction d'un tenseur permet de former un tenseur d'ordre  $(p - 2)$  à partir d'un tenseur d'ordre  $p$ . On peut naturellement répéter l'opération de contraction. Ainsi, un tenseur d'ordre pair,  $2p$ , deviendra un scalaire après  $p$  contractions et un tenseur d'ordre impair,  $2p + 1$ , deviendra un vecteur.

### 3.5.4 Multiplication contractée

L'utilisation successive de la multiplication tensorielle puis de la contraction d'indices s'appelle **la multiplication contractée**.

L'exemple précédent (3.5.3) du produit tensoriel de deux vecteurs puis de la contraction du tenseur (3.5.4) donnant un produit scalaire, est un exemple de multiplication contractée des tenseurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  d'ordre un.

Considérons les composantes de deux tenseurs,  $u^{ijk}$  et  $v_{lmrs}$  par exemple. Leur produit tensoriel donne un nouveau tenseur  $\mathbf{W}$  d'ordre sept, de composantes :

$$w_{lmrs}^{ijk} = u^{ijk} v_{lmrs} \quad (3.5.13)$$

Effectuons une contraction du produit tensoriel sur les indices  $i$  et  $l$ , par exemple ; on obtient l'un des produits contractés possibles à partir du tenseur  $\mathbf{W}$ , formant un tenseur d'ordre cinq :

$$t^{jk}_{mrs} = u^{ijk} v_{imrs} \quad (3.5.14)$$

L'opération de contraction peut être répétée encore deux fois sur ce même tenseur, aboutissant à un tenseur d'ordre un.

### 3.5.5 Critères de tensorialité

On a vu, jusqu'à présent, deux manières de reconnaître le caractère tensoriel d'une suite de quantités.

**La première consiste à démontrer que ces quantités sont formées par le produit tensoriel des composantes de vecteurs ou par une somme de produits tensoriels. Ce critère résulte directement de la définition même des tenseurs.**

**La deuxième consiste à étudier la manière dont ces quantités se transforment lors d'un changement de base et à vérifier la conformité des formules de transformation.**

**La multiplication contractée va nous permettre d'obtenir un autre critère de tensorialité qui peut être d'un maniement plus facile et plus rapide que les précédents.** Les démonstrations vont être effectuées sur des exemples mais elles se généralisent à des tenseurs d'ordre quelconque.

**Produit complètement contracté** - Considérons la suite des  $n^3$  quantités  $u_k^{ij}$ , attachées à une base  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$  et cherchons un moyen de déterminer si elles peuvent constituer les composantes d'un tenseur.

Soit d'autre part, des vecteurs  $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}^i$ ,  $\mathbf{y} = y_j \mathbf{e}^j$ ,  $\mathbf{z} = z^k \mathbf{e}_k$ . Si la suite  $u_k^{ij}$  est tensorielle, alors le produit contracté :

$$\alpha = u_k^{ij} x_i y_j z^k \quad (3.5.15)$$

constitue une quantité scalaire, invariante par changement de base, selon les propriétés du produit contracté.

Réciproquement, supposons qu'un tel produit soit un scalaire et démontrons alors que les quantités  $u_k^{ij}$  qui figurent dans ce produit, sont tensorielles. Appelons respectivement  $x'_l, y'_m$  et  $z'^r$ , les composantes des vecteurs  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$  dans une nouvelle base  $\mathbf{e}'_l$  telle que :

$$(a) \mathbf{e}_j = A_j^{lm} \mathbf{e}'_m ; (b) \mathbf{e}'_l = A_l^i \mathbf{e}_i \quad (3.5.16)$$

Les composantes du tenseur sont notées  $u'^{lm}$  dans la nouvelle base  $\mathbf{e}'_l$ . Écrivons que le produit (3.5.15) est un scalaire indépendant de la base, soit, en tenant compte des formules de changement de base des composantes :

$$u_r^{lm} x'_l y'_m z'^r = u_k^{ij} x_i y_j z^k = u_k^{ij} (A_i^l A_j^m A_r^k) x'_l y'_m z'^r \quad (3.5.17)$$

Puisque le choix des vecteurs  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$  est arbitraire, cette dernière égalité doit être assurée quelles que soient les quantités  $x'_l, y'_m$  et  $z'^r$ , ce qui implique :

$$u_r^{lm} = u_k^{ij} (A_i^l A_j^m A_r^k) \quad (3.5.18)$$

ce qui montre le caractère tensoriel des quantités  $u_k^{ij}$ .

En généralisant, on aboutit à la conclusion suivante : **pour qu'un ensemble de  $n^{p+q}$  quantités, comportant  $p$  indices supérieurs et  $q$  indices inférieurs, soit tensoriel, il faut et il suffit que leur produit complètement contracté par les composantes covariantes de  $p$  vecteurs quelconques et les composantes contravariantes de  $q$  vecteurs quelconques, soit une quantité qui demeure invariante par changement de base.**

**Critère général de tensorialité** - Lorsque le produit n'est pas complètement contracté, on obtient un critère de tensorialité qui généralise le précédent.

Considérons toujours l'exemple des quantités  $u_k^{ij}$  et soit le produit contracté sur l'indice  $k$ , pour un vecteur  $\mathbf{z}$  arbitraire :

$$v^{ij} = u_k^{ij} z^k \quad (3.5.19)$$

Si  $u_k^{ij}$  est une suite tensorielle, on a vu que le produit contracté  $v^{ij}$  est tensoriel.

Réciproquement, si  $v^{ij}$  est une suite tensorielle, alors la quantité  $v^{ij} x_i y_j$ , étant un produit contracté, est un scalaire, pour des choix arbitraires des vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ . Dans ce cas, la quantité  $u_k^{ij} x_i y_j z^k$  (égale à  $v^{ij} x_i y_j$ ) est un scalaire, pour des choix arbitraires des vecteurs  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$ . C'est précisément le critère de tensorialité des quantités  $u_k^{ij}$  qui a été démontré précédemment.

Ce critère de tensorialité est donc le suivant : **pour que  $n^3$  quantités  $u_k^{ij}$ , attachées à une base, soient les composantes d'un tenseur, il faut et il suffit que, quel que soit le tenseur d'ordre un de composantes  $z^k$ , les  $n^2$  quantités  $u_k^{ij} z^k$  soient les composantes d'un tenseur.**

Ce critère se généralise à des tenseurs d'ordre quelconque. On peut énoncer de manière condensée le critère général de tensorialité :

**Si un produit contracté d'une quantité U avec tout tenseur arbitraire est lui-même un tenseur, alors U est aussi un tenseur.**

## 3.6 Tenseurs particuliers

### 3.6.1 Tenseur symétrique

Considérons un tenseur  $\mathbf{U}$  d'ordre deux de composantes contravariantes  $u^{ij}$ . Supposons que, suivant une base particulière  $(\mathbf{e}_i)$ , toutes les composantes satisfassent aux relations :

$$u^{ij} = u^{ji} \quad (3.6.1)$$

Sur une autre base  $\mathbf{e}'_l$ , liée à la précédente par les relations (3.5.6), les nouvelles composantes  $u'^{lm}$  vérifient la relation :

$$u'^{lm} = A_i^l A_j^m u^{ij} = A_i^l A_j^m u^{ji} = u'^{ml} \quad (3.6.2)$$

La propriété  $u^{ij} = u^{ji}$  est donc une caractéristique intrinsèque du tenseur  $\mathbf{U}$ , indépendante de la base. On dit que le tenseur est symétrique.

La propriété de symétrie se vérifie également pour les composantes covariantes d'un tenseur symétrique puisqu'on a :

$$u_{lk} = g_{li} g_{kj} u^{ij} = g_{li} g_{kj} u^{ji} = u_{kl} \quad (3.6.3)$$

Réciproquement, la symétrie des composantes covariantes entraîne celle des composantes contravariantes.

Pour des tenseurs d'ordre plus élevé, la symétrie peut être partielle, portant sur deux indices covariants ou deux indices contravariants. Ainsi, un tenseur d'ordre quatre, de composantes mixtes  $u_l^{ijk}$  peut être partiellement symétrique en  $i$  et  $j$ , par exemple, soit :

$$u_l^{ijk} = u_l^{jik} \quad (3.6.4)$$

On vérifie, de même que ci-dessus, qu'une telle propriété est intrinsèque.

Un tenseur sera dit complètement symétrique si toute transposition de deux indices de même variance, change la composante correspondante en elle-même. Par exemple, pour un tenseur d'ordre trois  $u^{ijk}$ , complètement symétrique, on a les composantes suivantes qui sont égales entre elles :

$$u^{ijk} = u^{jik} = u^{kji} = u^{ikj} \quad (3.6.5)$$

### 3.6.2 Quadrique représentative d'un tenseur symétrique

On peut obtenir une représentation géométrique des valeurs des composantes d'un tenseur symétrique d'ordre deux.

Pour cela, considérons, dans l'espace géométrique ordinaire de coordonnées  $x^i$ , l'équation suivante :

$$a_{ij} x^i y^j = 1 \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.6.6)$$

où les  $a_{ij}$  sont des coefficients donnés. Supposons que ces coefficients soient tels que :  $a_{ij} = a_{ji}$ . L'équation précédente s'écrit alors :

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{23} x_2 x_3 + 2a_{31} x_3 x_1 = 1 \quad (3.6.7)$$

C'est l'équation générale d'une surface du second degré ou quadrique rapportée à un système d'axes dont l'origine est en son centre. Ces surfaces sont des ellipsoïdes ou des hyperboloïdes, selon les valeurs des quantités  $a_{ij}$ .

Étudions comment se transforment les quantités  $a_{ij}$  lorsqu'on effectue un changement de coordonnées tel que :

$$(a) \quad x'^k = A_i'^k x^i \quad ; \quad (b) \quad x^i = A_k^i x'^k \quad (3.6.8)$$

L'équation de la quadrique (3.6.6) s'écrit dans ce nouveau système de coordonnées :

$$a_{ij} x^i y^j = a_{ij} A_k^i A_m^j x'^k x'^m = a'_{km} x'^k x'^m = 1 \quad (3.6.9)$$

d'où l'expression des coefficients dans le nouveau système d'axes :

$$a'_{km} = A_k^i A_m^j a_{ij} \quad (3.6.10)$$

Les coefficients  $a_{ij}$  se transforment comme les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre deux. Réciproquement, si les quantités  $a_{ij}$  sont les composantes d'un tenseur symétrique, ces composantes définissent les coefficients d'une quadrique. Il existe donc une certaine équivalence entre un tenseur symétrique et les coefficients d'une quadrique. On dira que la surface d'équation (3.6.7) est la quadrique représentative d'un tenseur symétrique.

**Composantes principales d'un tenseur symétrique** - Il existe un système de coordonnées orthonormées par rapport auquel l'équation d'une quadrique prend la forme simple :

$$b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 = 1 \quad (3.6.11)$$

Dans ce cas, les vecteurs de base sont portés par les axes principaux de la quadrique. Dans ce système de coordonnées, les composantes du tenseur  $a_{ij}$  se réduisent à :  $a_{11} = b_1$ ,  $a_{22} = b_2$ ,  $a_{33} = b_3$ ,  $a_{ij} = 0$  pour les autres composantes. Les quantités  $b_i$  sont appelées les composantes principales du tenseur  $a_{ij}$ .

Si les quantités  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ , sont positives, la surface est un ellipsoïde ; si deux quantités sont strictement positives et la troisième strictement négative, on a un hyperboloïde à une nappe ; si deux quantités sont strictement négatives et la troisième strictement positive, on a un hyperboloïde à deux nappes. La comparaison de l'équation (3.6.11) avec l'équation classique :

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1 \quad (3.6.12)$$

où  $a, b, c$  sont les longueurs des demi-axes d'un ellipsoïde, montre que l'on a :

$$a = 1/(b_1)^{1/2} ; \quad b = 1/(b_2)^{1/2} ; \quad c = 1/(b_3)^{1/2} \quad (3.6.13)$$

### 3.6.3 Le tenseur fondamental

**Composantes covariantes** - Nous avons vu au chapitre 2 la définition des composantes covariantes  $g_{ij}$  du tenseur fondamental, à savoir :

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (3.6.14)$$

Ces quantités interviennent entre autres, dans l'expression du produit scalaire de deux vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ , de composantes contravariantes  $x^i$  et  $y^j$ , donnée par la relation (1.4.4), soit :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = g_{ij} x^i y^j \quad (3.6.15)$$

Utilisons le critère général de tensorialité pour mettre en évidence le caractère tensoriel des  $g_{ij}$ . L'expression  $g_{ij} x^i y^j$  est un produit complètement contracté des quantités contravariantes  $x^i y^j$  d'un tenseur arbitraire. **Comme le produit scalaire est une quantité invariante par rapport aux changements de base**, il en résulte que les  $n^2$  quantités  $g_{ij}$  sont les composantes covariantes d'un tenseur.

Ce tenseur est symétrique par suite de la symétrie du produit scalaire des vecteurs de base ; on a :

$$g_{ij} = g_{ji} \quad (3.6.16)$$

**Composantes contravariantes** - Les quantités  $g^{ik}$  ont été définies précédemment par la relation (1.5.14) à partir de laquelle on a obtenu la relation (1.5.41), à savoir :

$$g^{jk} = \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}^k \quad (3.6.17)$$

Montrons que les quantités  $g^{jk}$  sont les composantes contravariantes du tenseur fondamental. Appelons  $u^{ij}$  ces formules et utilisons la formule (3.4.13) donnant la relation entre les composantes covariantes et contravariantes d'un tenseur, il vient :

$$u^{ij} = u_{kl} g^{ki} g^{jl} = g_{kl} g^{ki} g^{jl} \quad (3.6.18)$$

La relation (1.5.44) :  $g_{kl} g^{ki} = \delta_l^i$ , nous donne :

$$u^{ij} = g^{jl} \delta_l^i = g^{ji} \quad (3.6.19)$$

Les quantités  $g^{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$  constituent donc les composantes contravariantes du tenseur fondamental. Ce sont des quantités symétriques :  $g^{ij} = g^{ji}$ .

**Composantes mixtes** - Notons  $g_j^i$  les composantes mixtes du tenseur fondamental. La formule (3.4.18), exprimant les composantes mixtes d'un tenseur en fonction de ses composantes contravariantes, nous donne :

$$g_j^i = g^{ik} g_{jk} \quad (3.6.20)$$

La relation (1.5.44) donne alors :

$$g_j^i = \delta_j^i \quad (3.6.21)$$

### 3.6.4 Tenseur antisymétrique

Lorsque les composantes contravariantes  $u^{ij}$ , d'un tenseur d'ordre deux, vérifient les relations :

$$u^{ij} = -u^{ji} \quad (3.6.22)$$

on dit que le tenseur est antisymétrique. C'est une propriété intrinsèque du tenseur qui se démontre comme pour les tenseurs symétriques, au signe moins près. Un tenseur antisymétrique a des composantes telles que :

$$u^{11} = u^{22} = \dots = u^{nn} = 0 \quad (3.6.23)$$

Si les composantes contravariantes d'un tenseur sont antisymétriques, ses composantes covariantes le sont également.

Un tenseur  $u_l^{ijk}$  sera partiellement antisymétrique si l'on a, par exemple :

$$u_l^{ijk} = -u_l^{jik} \quad (3.6.24)$$

Il sera complètement antisymétrique si toute transposition d'indice de même variance change la composante correspondante en son opposée.

Tout tenseur  $u^{ij}$  peut être mis sous la forme d'une somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique. On a en effet :

$$u^{ij} = \frac{1}{2}(u^{ij} + u^{ji}) + \frac{1}{2}(u^{ij} - u^{ji}) \quad (3.6.25)$$

Le premier terme de la somme ci-dessus est un tenseur symétrique et le second, un tenseur antisymétrique.

**Base des tenseurs antisymétriques** - Un tenseur antisymétrique  $\mathbf{U}$  d'ordre deux, élément de  $E_n^{(2)}$ , peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{U} = u^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \sum_{i < j} u^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \sum_{i \geq j} u^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (3.6.26)$$

Échangeant, dans la dernière somme de la relation ci-dessus, le nom des indices et en tenant compte de  $u^{ij} = -u^{ji}$ , on obtient :

$$\mathbf{U} = \sum_{i < j} u^{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) \quad (3.6.27)$$

Les éléments  $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i)$  qui apparaissent dans l'expression (3.6.27) sont linéairement indépendants puisque les vecteurs  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  le sont également. Ces éléments constituent donc une base sur laquelle les tenseurs antisymétriques peuvent être décomposés.

Le nombre de vecteurs  $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i)$  est égal au nombre de combinaisons  $C_n^2 = (n-1)n/2 < n^2$ ; ces vecteurs engendrent un sous-espace vectoriel de  $E_n^{(2)}$  de dimension  $C_n^2$ . Tout tenseur antisymétrique de  $E_n^{(2)}$  est un élément de ce sous-espace vectoriel.

### 3.6.5 Produit extérieur de deux vecteurs

Soient deux vecteurs  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{y} = y^j \mathbf{e}_j$  d'un espace vectoriel  $E_n$ ; formons les quantités antisymétriques suivantes :

$$u^{ij} = x^i y^j - x^j y^i \quad (3.6.28)$$

Ce sont les composantes d'un tenseur antisymétrique  $\mathbf{U}$ , noté  $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ , dont la décomposition sur la base  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  s'écrit :

$$\mathbf{U} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = (x^i y^j - x^j y^i) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} - \mathbf{y} \otimes \mathbf{x} \quad (3.6.29)$$

Le tenseur  $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$  est appelé le produit extérieur des vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ ; on dit encore que ce tenseur est un bivecteur.

**Propriétés du produit extérieur** - Le produit extérieur est un tenseur antisymétrique qui vérifie les propriétés suivantes :

- anticommutativité :  $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = -\mathbf{y} \wedge \mathbf{x}$ ; il en résulte que :

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{x} = 0 \quad (3.6.30)$$

- distributivité à droite et à gauche pour l'addition vectorielle :

$$\mathbf{x} \wedge (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{z} \quad (3.6.31)$$

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \wedge \mathbf{z} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{z} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{z} \quad (3.6.32)$$

- associativité pour la multiplication par un scalaire :

$$\alpha \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{x} \wedge \alpha \mathbf{y} = \alpha (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \quad (3.6.33)$$

- les  $C_n^2$  produits extérieurs :

$$\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \quad (3.6.34)$$

constituent une base de l'ensemble des bivecteurs.

**Composantes strictes d'un produit extérieur** - Parmi les  $n^2$  composantes d'un produit extérieur,  $n$  composantes sont nulles et les  $n(n - 1)$  autres composantes ont des valeurs opposées deux à deux. On peut donc considérer que la moitié de ces dernières composantes suffit pour caractériser le tenseur et on dira que le produit extérieur possède  $n(n - 1)/2$  composantes strictes.

On remarque que pour  $n = 3$ , le nombre de composantes strictes du produit extérieur de deux vecteurs est aussi égal à 3. Ceci permet de former avec les composantes strictes du bivecteur  $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ , les composantes du produit vectoriel  $\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ .

Pour cela, on pose :

$$\begin{aligned} u^{23} &= x^2 y^3 - x^3 y^2 = z^1 \\ u^{31} &= x^3 y^1 - x^1 y^3 = z^2 \\ u^{12} &= x^1 y^2 - x^2 y^1 = z^3 \end{aligned} \tag{3.6.35}$$

Un produit vectoriel n'existe donc que pour des espaces à trois dimensions et l'on sait qu'il ne se transforme comme un vecteur que pour certains changements de base ; c'est un vecteur axial. On dit que le vecteur  $\mathbf{z}$  constitue **le tenseur adjoint** du tenseur  $\mathbf{U}$ . C'est un exemple particulier de tenseur adjoint d'un tenseur antisymétrique.

## 3.7 Groupes ponctuels de symétrie

### 3.7.1 Symétrie d'un cristal et de ses propriétés physiques

Nombre de propriétés physiques des cristaux, représentées par des tenseurs, ont des éléments de symétrie qui doivent inclure ceux de leur structure cristalline. La connaissance des éléments de symétrie des cristaux permettra donc de déterminer la forme générale des tenseurs de la physique cristalline. Nous allons donner un aperçu de ce problème mettant en oeuvre géométrie et théorie des tenseurs.

Tous les cristaux sont isotropes pour quelques-unes de leurs propriétés, la masse volumique par exemple, mais en général la plupart des propriétés varieront avec la direction dans laquelle elles sont mesurées et elles seront représentées par des tenseurs. Un postulat fondamental relie la symétrie d'un cristal à la symétrie de ses propriétés physiques. Ce postulat est appelé **le principe de Neumann** et on peut l'énoncer ainsi :

**Les éléments de symétrie de toute propriété physique d'un cristal doivent comporter, au moins, tous les éléments de symétrie du groupe ponctuel de symétrie de ce cristal.**

### 3.7.2 Effet de la symétrie sur les tenseurs

Connaissant les opérations de symétrie du groupe d'un cristal donné, on peut les utiliser pour déterminer l'expression générale du tenseur qui traduit une certaine propriété physique. Pour cela, on applique les opérations de symétrie aux équations qui définissent le tenseur : puisque ces opérations font coïncider le cristal avec lui-même, elles doivent laisser invariantes ces équations. Voyons un exemple.

**Axe binaire de symétrie** - Considérons un cristal qui possède un axe binaire de symétrie, noté  $C_2$ , c'est-à-dire tel qu'une rotation de  $\pi$  amène le cristal en coïncidence avec lui-même. Étudions, dans le système de base orthonormée, l'expression d'un tenseur d'ordre deux défini par les équations :

$$D_i = \alpha_{ij} E_j \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.7.1)$$

où  $D_i$  et  $E_j$  sont les composantes de deux vecteurs représentant des grandeurs physiques. Faisons coïncider l'axe binaire  $C_2$  avec la direction des composantes  $D_3$  et  $E_3$ . Lors d'une rotation  $C_2$ , les composantes  $E_1, E_2, D_1$  et  $D_2$  changent de signe alors que  $E_3$  et  $D_3$  restent invariantes. Les équations (3.7.1) deviennent donc après rotation d'un angle  $\pi$  :

$$\begin{aligned} -D_1 &= -\alpha_{11} E_1 - \alpha_{12} E_2 + \alpha_{13} E_3 \\ -D_2 &= -\alpha_{21} E_1 - \alpha_{22} E_2 + \alpha_{23} E_3 \\ D_3 &= -\alpha_{31} E_1 - \alpha_{32} E_2 + \alpha_{33} E_3 \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

Supposons que les composantes  $E_i$  puissent avoir des valeurs arbitraires, ce que l'on peut réaliser si le vecteur  $\mathbf{E}$  est une grandeur physique appliquée de l'extérieur au cristal (un gradient de température par exemple). Les équations (3.7.1) devant être invariantes vis-à-vis de la rotation  $C_2$ , leur comparaison avec (3.7.2) montre qu'on doit avoir :

$$\alpha_{13} = \alpha_{23} = \alpha_{31} = \alpha_{32} = 0 \quad (3.7.3)$$

Les tenseurs d'ordre deux représentant des propriétés physiques des cristaux sont généralement symétriques ; supposons qu'il en soit ainsi, soit  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ . La matrice du tenseur peut finalement s'écrire sous la forme :

$$[\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix} \quad (3.7.4)$$

Le tenseur symétrique, satisfaisant à la propriété de symétrie du cristal, possède cinq composantes non nulles dont quatre sont indépendantes :

$$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{33} \quad (3.7.5)$$

**Nombre de composantes d'un tenseur** - La théorie des groupes permet de calculer aisément le nombre de composantes indépendantes non nulles d'un tenseur

associé à une propriété physique d'un cristal. Ce nombre est égal au nombre de fois que la représentation totalement symétrique du groupe de symétrie apparaît dans la représentation tensorielle de ce groupe. On peut ainsi déterminer a priori le nombre de composantes indépendantes non nulles des tenseurs de tous les ordres pour les 32 classes cristallines. Nous renvoyons le lecteur à la théorie des groupes pour l'étude des diverses applications.

## 3.8 Exercices résolus

### Exercice 3.1

Soit  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  une base d'un espace vectoriel  $E_2$  et soient deux vecteurs de  $E_2$  :

$$\mathbf{X} = 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 \quad ; \quad \mathbf{Y} = 5\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$$

1. On note  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  les vecteurs de base d'un espace  $E_4 = E_2 \otimes E_2$ . Déterminer l'expression du produit tensoriel  $\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$ .
2. Le tenseur suivant :

$$\mathbf{U} = 11\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 8\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + 20\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + 12\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$$

est-il le produit tensoriel de deux vecteurs de  $E_2$  ?

3. Montrer que le tenseur  $\mathbf{U}$  est la somme du produit tensoriel  $\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$  et d'un autre tenseur  $\mathbf{W}$  que l'on déterminera. Ce dernier est-il un produit tensoriel et lequel ?

### *Solutions*

1. La propriété de distributivité du produit tensoriel par rapport à l'addition vectorielle nous donne :

$$\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y} = (2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2) \otimes (5\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2)$$

$$= 2\mathbf{e}_1 \otimes 5\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_1 \otimes 3\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_2 \otimes 5\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 \otimes 3\mathbf{e}_2$$

L'associativité du produit tensoriel par rapport à la multiplication par un scalaire nous donne :

$$\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y} = 10\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + 20\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + 12\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$$

2. Notons  $\mathbf{U}$  le tenseur donné :

$$\mathbf{U} = 11\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 8\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + 20\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + 12\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$$

Développons cette expression et identifions au tenseur  $\mathbf{U}$  donné ; il vient pour les composantes :

$$x^1 y^1 = 11 \quad ; \quad x^1 y^2 = 8 \quad ; \quad x^2 y^1 = 20 \quad ; \quad x^2 y^2 = 12$$

Le rapport entre les composantes nous donne :  $\frac{y^1}{y^2} = \frac{11}{8}$  et  $\frac{y^1}{y^2} = \frac{20}{12}$

Ces valeurs étant différentes, le tenseur  $\mathbf{U}$  ne peut pas être le produit tensoriel de deux vecteurs.

3. Le tenseur  $\mathbf{W}$  est égal à :  $\mathbf{W} = \mathbf{U} - \mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$ , d'où :  $\mathbf{W} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 2 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2$ .

Si l'on cherche  $\mathbf{W}$  sous forme d'un produit tensoriel,  $\mathbf{W} = v^i u^j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ , on obtient par identification :

$$v^1 u^1 = 1 \quad ; \quad v^1 u^2 = 2 \quad ; \quad v^2 u^1 = 0 \quad ; \quad v^2 u^2 = 0$$

Puisque  $u^1$  et  $u^2$  ne peuvent être nuls, selon les premières égalités, on a  $v^2=0$ . Il reste deux équations pour trois inconnues, d'où une certaine indétermination. Prenons  $v^1 = 1$ , d'où  $u^1 = 1$  et  $u^2 = 2$ ; on obtient ainsi le produit tensoriel :

$$\mathbf{W} = \mathbf{e}_1 \otimes (\mathbf{e}_1 + 2 \mathbf{e}_2)$$

### Exercice 3.2

Les composantes mixtes  $t_{jk}^i$  d'un tenseur  $\mathbf{T}$ , appartenant à l'espace produit tensoriel  $E_2^{(3)}$ , sont les suivantes :

$$t_{11}^1 = 0 \quad , \quad t_{12}^1 = 2 \quad , \quad t_{21}^1 = -1 \quad , \quad t_{22}^1 = 3 \quad , \quad t_{11}^2 = 1 \quad , \quad t_{12}^2 = -1 \quad , \quad t_{21}^2 = 0 \quad , \quad t_{22}^2 = -2$$

1. Calculer les composantes contractées  $u_k = t_{ik}^i$  du tenseur  $\mathbf{T}$ . Écrire l'expression du tenseur  $\mathbf{U}$  de composantes  $u_k$ .
2. On se donne une base  $\{\mathbf{e}_i\}$  de  $E_2$  dans laquelle le tenseur fondamental  $g_{ij}$  a pour matrice :

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Déterminer les composantes covariantes  $t_{ijk}$  du tenseur  $\mathbf{T}$ .

3. Déterminer les composantes contravariantes  $g^{ij}$  du tenseur fondamental.
4. Calculer les composantes mixtes  $t_k^{ij}$  du tenseur  $\mathbf{T}$ .

### Solutions

1. Les composantes contractées sont :  $u_k = t_{ik}^i = t_{1k}^1 + t_{2k}^2$  soit :

$$u_1 = t_{11}^1 + t_{21}^2 = 0 \quad ; \quad u_2 = t_{12}^1 + t_{22}^2 = 0$$

Le tenseur  $\mathbf{U}$  de composantes  $u_k$  est le vecteur nul :  $\mathbf{U} = \mathbf{0}$ .

2. Les composantes covariantes sont :  $t_{ijk} = g_{li} t_{jk}^l$ , d'où :

$$t_{111} = g_{11} t_{11}^1 + g_{21} t_{11}^2 = -3 ; t_{112} = 7 ; t_{121} = -2 ; t_{122} = 12 ; t_{211} = 1$$

$$t_{212} = -7 ; t_{221} = 3 ; t_{222} = -11$$

3. Calcul des composantes contravariantes  $g^{ij}$  du tenseur fondamental. La formule (1.5.44) nous donne :

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_{ij} \text{ avec } g^{ij} = g^{ji}$$

On obtient trois équations qui nous donnent :

$$g^{11} = -\frac{1}{7} ; g^{21} = g^{12} = -\frac{3}{7} ; g^{22} = -\frac{2}{7}$$

4. Les composantes mixtes  $t_k^{ij}$  du tenseur  $\mathbf{T}$  ont pour expression :

$$t_k^{ij} = g^{lj} t_{lk}^i$$

d'où :

$$t_1^{11} = g^{11} t_{11}^1 + g^{21} t_{21}^1 = \frac{3}{7} ; t_2^{11} = -\frac{11}{7} ; t_1^{12} = \frac{2}{7} ; \text{etc.}$$

### Exercice 3.3

En utilisant le critère général de tensorialité, montrer que, pour  $i, j = 1$  à  $n$  :

1. Les  $n^2$  quantités  $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$  constituent les composantes covariantes d'un tenseur.
2. Les  $n^2$  quantités  $\delta_i^j$  constituent les composantes mixtes d'un tenseur.

### Solutions

1. Formons le produit tensoriel des quantités  $g_{ij}$  avec les composantes contravariantes  $v^k$  d'un tenseur  $\mathbf{V}$  d'ordre un ; on obtient :

$$g_{ij} v^k ; i, j, k = 1, \dots, n$$

La contraction sur les indices  $j$  et  $k$  nous donne l'expression des composantes covariantes du tenseur  $\mathbf{V}$ , soit :

$$g_{ij} v^j = v_i$$

On obtient ainsi un tenseur d'ordre un et, selon le critère général de tensorialité, les  $g_{ij}$  sont donc les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre deux.

2. Le produit tensoriel des quantités  $\delta_i^j$  par les composantes covariantes  $v_k$  d'un tenseur d'ordre un, nous donne les quantités :  $\delta_j^i v_k$  ;  $i, j, k = 1$  à  $n$ .

La contraction sur les indices  $j$  et  $k$  donne les  $n$  quantités :

$$\delta_i^j v_j = v_i$$

Les quantités  $v_i$  étant les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre un, les quantités  $\delta_i^j$  sont, selon le critère général de tensorialité, les composantes mixtes d'un tenseur d'ordre deux.

### Exercice 3.4

Notons  $h_i$   $i = 1, 2, 3$ , les quantités de chaleur qui traversent l'unité d'aire d'un matériau durant l'unité de temps, dans des directions respectivement normales aux axes  $0x_i$ . Cette chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température  $T$ . Les quantités  $h_i$  forment les composantes d'un vecteur noté  $\mathbf{h}$ . Dans un matériau anisotrope, la conduction thermique obéit à la loi de Fourier :

$$h_i = -k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (3.8.1)$$

1. Démontrer que les coefficients  $k_{ij}$  sont les composantes d'un tenseur appelé *tenseur de conductivité thermique*.
2. En régime permanent, l'écoulement de la chaleur à travers un matériau est conservatif, c'est-à-dire qu'on a :

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0 \quad (3.8.2)$$

Déterminer l'équation donnant la distribution des températures  $T(x, y, z)$  à l'intérieur d'un matériau anisotrope. On supposera que les coefficients  $k_{ij}$  sont des constantes.

3. Déterminer l'expression de l'équation obtenue à la question (2) dans le système d'axes principaux du tenseur  $k_{ij}$ .
4. Trouver un changement de variables qui permet de mettre l'équation obtenue à la question précédente sous forme d'une équation de Laplace :

$$(k_1 k_2 k_3)^{1/3} \Delta T = 0 \quad (3.8.3)$$

où les  $k_i$  sont les composantes non nulles du tenseur dans son système d'axes principaux.

### Solutions

1. Les composantes du vecteur  $\mathbf{grad} T$  qui figurent dans l'équation (3.8.1) forment un produit contracté avec les quantités  $k_{ij}$  pour donner les composantes d'un vecteur. Selon le critère général de tensorialité, les coefficients  $k_{ij}$  forment donc les composantes d'un tenseur d'ordre deux.

2. Reportons l'expression de  $h_i$  donné par (3.8.1) dans l'équation de conservation (3.8.2) qu'on peut écrire sous forme indicielle :

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.8.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( -k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (3.8.5)$$

C'est l'équation des distributions des température en régime stationnaire. En général, les  $k_{ij}$  varient très faiblement dans un intervalle de température relativement important et on peut alors écrire l'équation (3.8.5) sous la forme :

$$k_{ij} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad (3.8.6)$$

3. Dans un système d'axes principaux, le tenseur de conductivité thermique prend la forme :  $k_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ ,  $k_1 = k_{11}$ ,  $k_2 = k_{22}$ ,  $k_3 = k_{33}$ . L'équation (3.8.6) se réduit alors à :

$$k_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + k_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + k_3 \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} = 0 \quad (3.8.7)$$

4. Le changement de variable suivant :

$$x_1 = \frac{k_1^{1/2}}{(k_1 k_2 k_3)^{1/6}} X_1 ; x_2 = \frac{k_2^{1/2}}{(k_1 k_2 k_3)^{1/6}} X_2 ; x_3 = \frac{k_3^{1/2}}{(k_1 k_2 k_3)^{1/6}} X_3 \quad (3.8.8)$$

transforme l'équation (3.8.7) sous la forme :

$$(k_1 k_2 k_3)^{1/3} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial X_3^2} \right) = 0 \quad (3.8.9)$$

On obtient une équation de Laplace correspondant à un écoulement dans un milieu isotrope de conductivité  $(k_1 k_2 k_3)^{1/3}$ . On peut ainsi résoudre plus aisément l'équation (3.8.7) et obtenir ensuite la distribution des températures dans un milieu anisotrope.

### Exercice 3.5

Soit  $T_{ik}$  un tenseur du second ordre. On se propose de trouver tous les vecteurs  $\mathbf{A}$ , de composantes  $A_k$   $k = 1, 2, 3$ , qui ne changent pas d'orientation lorsqu'on effectue leur produit contracté avec le tenseur  $T_{ik}$ , c'est-à-dire tous les vecteurs tels que :

$$T_{ik} A_k = \lambda A_i \quad (3.8.10)$$

où  $\lambda$  est un scalaire quelconque. De tels vecteurs, s'ils existent, sont appelés *les vecteurs propres* du tenseur et leurs directions sont *les directions principales* de  $T_{ik}$ . Les valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles l'équation (3.8.10) a des solutions s'appellent *les*

valeurs propres du tenseur ; ce sont les valeurs des composantes  $T_{ik}$  dans le système de coordonnées déterminé par les directions principales.

A titre d'exercice, nous allons déterminer les vecteurs et valeurs propres d'un tenseur  $T_{ik}$  pour un système physique à deux dimensions. C'est le cas, par exemple, du tenseur d'inertie d'une ou plusieurs particules se mouvant dans un plan. Le tenseur possède ainsi quatre composantes :

$$T_{11} \quad T_{12} \quad T_{21} \quad T_{22} \quad (3.8.11)$$

Supposons de plus que le tenseur soit symétrique :  $T_{12} = T_{21}$ , afin de simplifier les calculs.

1. Écrire de manière développée les équations (3.8.10).
2. Déterminer les valeurs propres du tenseur.
3. Si  $T_{12} = 0$ , les axes initiaux sont précisément les axes principaux. On suppose par la suite que  $T_{12} \neq 0$ . Déterminer les pentes des axes principaux portant les vecteurs propres.
4. Soient  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  les angles respectifs entre l'axe initial  $Ox_1$  et les axes principaux du tenseur  $T_{ik}$ . Calculer  $\tan \varphi_1$  et  $\tan \varphi_2$  et montrer que les axes principaux sont orthogonaux entre eux.
5. Quelles sont les valeurs des composantes des vecteurs  $\mathbf{A}$  dans le système d'axes principaux du tenseur ?
6. Déterminer les valeurs  $T'_{ik}$  des composantes du tenseur dans son système d'axes principaux.
7. Déterminer la courbe représentée par l'équation :

$$T'_{11} (x'_1)^2 + T'_{22} (x'_2)^2 = 1 \quad (3.8.12)$$

dans un système de coordonnées  $x'_1, x'_2$ , correspondant aux axes principaux.

8. Démontrer que les grandeurs  $C_1 = T_{11} + T_{22}$  et  $C_2 = T_{11} T_{22} - T_{12}^2$  sont des invariants pour tout changement de système d'axes.
9. Donner une interprétation géométrique de  $C_2$ .

### **Solutions**

1. Si le vecteur  $\mathbf{A}$  est porté par l'un des axes principaux du tenseur  $T_{ik}$ , alors ses composantes  $A_j$  doivent vérifier les équations suivantes :

$$\begin{aligned} T_{11} A_1 + T_{12} A_2 &= \lambda A_1 \\ T_{21} A_1 + T_{22} A_2 &= \lambda A_2 \end{aligned} \quad (3.8.13)$$

2. Le système d'équations (3.8.13) possède une solution différente de zéro si et seulement si le déterminant du système est nul, soit :

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} \\ T_{12} & T_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.8.14)$$

Le développement du déterminant conduit à l'équation :

$$\lambda^2 - \lambda(T_{11} + T_{22}) + (T_{11}T_{22} - T_{12}^2) = 0 \quad (3.8.15)$$

dont les solutions sont les suivantes :

$$\lambda_{\pm} = \frac{T_{11} + T_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{T_{11} - T_{22}}{2}\right)^2 + T_{12}^2} \quad (3.8.16)$$

Les valeurs  $\lambda_+$  et  $\lambda_-$  sont les valeurs propres du tenseur.

3. Posons  $\lambda_+ = \lambda_1$  et  $\lambda_- = \lambda_2$ ; Si  $T_{12} \neq 0$ , alors  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . On a donc deux axes principaux distincts déterminés par les vecteurs notés  $\mathbf{A}^{(1)}$  et  $\mathbf{A}^{(2)}$  et correspondent respectivement à  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Les équations (3.8.13) permettent d'obtenir les pentes des axes principaux :

$$\tan \varphi_1 = \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = \frac{\lambda_1 - T_{11}}{T_{12}} = \frac{T_{12}}{\lambda_1 - T_{22}} \quad (3.8.17)$$

$$\tan \varphi_2 = \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = \frac{\lambda_2 - T_{11}}{T_{12}} = \frac{T_{12}}{\lambda_2 - T_{22}} \quad (3.8.18)$$

Les angles  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont respectivement les angles entre l'axe  $Ox_1$  et les axes principaux du tenseur  $T_{ik}$ .

4. Substituant les valeurs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  données par (3.8.16) dans les expressions (3.8.17) et (3.8.18), on obtient :

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{2 \tan \varphi_1}{1 - \tan^2 \varphi_1} = \frac{2T_{12}}{T_{11} - T_{22}} = \tan 2\varphi_2 \quad (3.8.19)$$

En conséquence :

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \frac{\pi}{2} \quad (3.8.20)$$

Les axes principaux sont orthogonaux entre eux.

5. Les vecteurs  $\mathbf{A}^{(1)}$  et  $\mathbf{A}^{(2)}$  étant portés par les axes principaux, leurs composantes, dans ce système d'axes, sont tels que :

$$A_1^{(1)} \neq 0 ; A_2^{(1)} = 0 ; A_1^{(2)} = 0 ; A_2^{(2)} \neq 0 \quad (3.8.21)$$

6. Les équations (3.8.13) s'écrivent, pour  $\lambda = \lambda_1$ , compte tenu de (3.8.19) :

$$T'_{11} A_1'^{(1)} = \lambda_1 A_1'^{(1)} \quad ; \quad T'_{21} A_1'^{(1)} = \lambda_1 A_2'^{(1)} = 0 \quad (3.8.22)$$

d'où :

$$T'_{11} = \lambda_1 \quad ; \quad T'_{21} = 0 \quad (3.8.23)$$

Pour  $\lambda = \lambda_2$ , on obtient :

$$T'_{12} A_2'^{(2)} = \lambda_2 A_1'^{(2)} \quad ; \quad T'_{22} A_2'^{(2)} = \lambda_2 A_2'^{(2)} \quad (3.8.24)$$

d'où :

$$T'_{12} = 0 \quad ; \quad T'_{22} = \lambda_2 \quad (3.8.25)$$

Dans son système d'axes principaux, le tenseur  $T_{ik}$  a pour représentation matricielle :

$$[T'_{ik}] = \begin{bmatrix} T'_{11} & 0 \\ 0 & T'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

7. Dans le système d'axes principaux, les valeurs des composantes du tenseur permettent d'écrire l'équation (3.8.12) sous la forme :

$$\lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2 = 1 \quad (3.8.26)$$

soit encore :

$$\frac{(x_1')^2}{1/\lambda_1} + \frac{(x_2')^2}{1/\lambda_2} = 1 \quad (3.8.27)$$

C'est l'équation d'une ellipse dont les demi-axes ont pour longueur  $1/\sqrt{\lambda_1}$  et  $1/\sqrt{\lambda_2}$ . C'est l'ellipse représentative du tenseur  $T_{ik}$ .

8. Les nombres  $\lambda$  et  $\lambda^2$  qui figurent dans l'équation(3.8.15) sont des scalaires ; les racines  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de l'équation donnent les valeurs  $1/\lambda_1$  et  $1/\lambda_2$  qui sont les longueurs des demi-axes de l'ellipse du tenseur. Par suite, ces nombres sont indépendants du système d'axes choisi et il en est de même de leurs coefficients dans l'équation (3.8.15). Les quantités :

$$C_1 = T_{11} + T_{22} \quad ; \quad C_2 = T_{11} T_{22} - T_{12}^2 \quad (3.8.28)$$

sont donc des invariants du tenseur  $T_{ik}$ .

9. Dans le système d'axes principaux, la valeur de  $C_2$  est égale à  $C_2 = \lambda_1 \lambda_2$ . D'autre part, la surface  $S$  d'une ellipse de demi-axes  $a$  et  $b$ , est donnée par :

$$S = \pi a b \quad (3.8.29)$$

Dans le cas présent, on a :  $a = 1/\sqrt{\lambda_1}$ ,  $b = 1/\sqrt{\lambda_2}$ , d'où :

$$S = \pi \sqrt{\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}} = \pi \sqrt{\frac{1}{C_2}} \quad (3.8.30)$$

Ainsi l'invariance de  $C_2$  exprime le fait que la surface de l'ellipse représentative du tenseur est constante dans tous les systèmes de coordonnées.

**Remarque :** Dans le cas d'un tenseur d'ordre deux d'un espace à trois dimensions, on obtient un ellipsoïde de représentation du tenseur (voir exercice 2.6).

### Exercice 3.6

La construction suivante, due à Otto Mohr (1835-1918), est utile pour l'étude des tenseurs symétriques de rang deux. Elle est employée, par exemple, par les ingénieurs dans l'analyse des déformations et des contraintes.

1. Soit un système d'axes  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$ . Une rotation du système d'un angle  $\alpha$  autour de l'axe  $Ox_3$  donne les nouveaux axes  $Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3$ . Déterminer la matrice de passage des  $x_i$  aux  $x'_j$ .
2. Considérons un tenseur  $S_{ij}$  ayant pour axes principaux  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$ . Dans ce système d'axes, le tenseur a pour seules composantes non nulles  $S_1 = S_{11}$ ,  $S_2 = S_{22}$ ,  $S_3 = S_{33}$ . Déterminer les expressions des composantes  $S'_{ij}$  de ce tenseur dans le système d'axes  $Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3$  en fonction des composantes  $S_k$ .
3. Écrire les expressions des  $S'_{ij}$  en fonction de l'angle  $2\alpha$ . On rappelle les relations suivantes :

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad ; \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (3.8.31)$$

4. On suppose que  $S_1 < S_2$  et que ces composantes sont positives. Sur l'axe des abscisses d'un graphique, on place deux points  $P$  et  $Q$  situés à des distances  $S_1$  et  $S_2$  de l'origine  $O$ . On trace le cercle centré sur l'axe des abscisses et de diamètre égal à  $PQ$ . Démontrer que les valeurs des composantes  $S'_{ij}$  du tenseur sont les coordonnées de deux points opposés sur le cercle, appelé cercle de Mohr.
5. Réciproquement, si on se donne les valeurs  $S'_{ij}$ , montrer que le cercle de Mohr permet de trouver les composantes principales  $S_{ij}$  du tenseur ainsi que la direction des axes principaux.
6. La construction du cercle de Mohr reste valable si l'axe de rotation  $Ox_3$  n'est plus un axe principal du tenseur. Si on considère une section centrale arbitraire de l'ellipsoïde représentative du tenseur, on obtient une conique ; soit alors  $Ox_1$  et  $Ox_2$  les axes principaux de cette section. Par rapport aux axes  $Ox_1, Ox_2$  et  $Ox_3$  normal à la section considérée, le tenseur prend la forme :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & 0 & S_{31} \\ 0 & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (3.8.32)$$

Déterminer les composantes  $S'_{ij}$  du tenseur après une rotation d'un angle  $\alpha$  autour de l'axe  $Ox_3$ . Montrer que la construction du cercle de Mohr s'applique également dans ce cas.

### Solutions

1. Ce calcul a déjà été réalisé au cours de l'exercice 1.10. On obtient :

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8.33)$$

2. Le changement de référentiel donne pour expression des composantes  $S'_{kl}$  dans le référentiel  $Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3$ , selon la formule (2.1.12) :

$$S'_{kl} = A_i'^k A_j'^l S_{ij} \quad (3.8.34)$$

Les référentiels étant orthogonaux, les composantes contravariantes et covariantes sont identiques. La matrice de passage (3.8.33) donne pour expression des nouvelles composantes :

$$S'_{11} = A_1'^1 A_1'^1 S_{11} + A_2'^1 A_2'^1 S_{22} = S_1 \cos^2 \alpha + S_2 \sin^2 \alpha \quad (3.8.35)$$

$$S'_{22} = S_1 \sin^2 \alpha + S_2 \cos^2 \alpha \quad (3.8.36)$$

$$S'_{12} = S'_{21} = (-S_1 + S_2) \sin \alpha \cos \alpha \quad (3.8.37)$$

$$S'_{33} = S_3 \quad (3.8.38)$$

Les autres composantes  $S'_{ij}$  du tenseur sont nulles. Le tenseur transformé a donc pour matrice :

$$\begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & 0 \\ S'_{12} & S'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix} \quad (3.8.39)$$

3. Compte tenu des relations (3.8.31), les expressions (3.8.33) s'écrivent sous la forme :

$$S'_{11} = \frac{1}{2}(S_1 + S_2) - (S_2 - S_1) \cos 2\alpha$$

$$S'_{22} = \frac{1}{2}(S_1 + S_2) + (S_2 - S_1) \cos 2\alpha$$

$$S'_{12} = \frac{1}{2}(S_2 - S_1) \sin 2\alpha \quad (3.8.40)$$

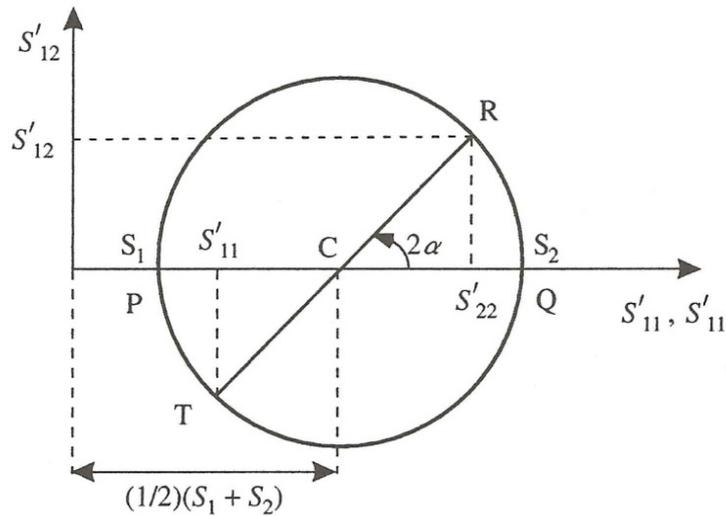


FIGURE 3.1

4. La figure 3.1 montre le cercle de centre  $C$  centré sur l'axe des abscisses. On trace le diamètre  $TCR$ , tel que  $CR$  fasse avec  $CQ$  un angle  $2\alpha$  mesuré dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Puisque  $OC = (1/2)(S_1 + S_2)$  et que  $CR = (1/2)(S_2 - S_1)$ , les équations (3.8.40) montrent que les coordonnées du point  $R$ , par rapport aux axes du graphique, sont égales à  $S'_{22}$  et  $S'_{12}$ . D'autre part, le point  $T$  a pour abscisse  $S'_{11}$ . Le cercle de Mohr montre ainsi comment les composantes  $S'_{11}$ ,  $S'_{22}$  et  $S'_{12}$  varient lors d'une rotation des axes de référence.

La construction du cercle de Mohr reste évidemment valable lorsque  $S_1$  et  $S_2$  sont négatifs ou s'ils sont de signes opposés.

5. Si l'on se donne les valeurs  $S'_{11}$ ,  $S'_{22}$  et  $S'_{12}$ , on peut déterminer les points  $R$  et  $T$  sur un graphique, leurs coordonnées étant :

$$R = (S'_{22}, S'_{12}) ; \quad T = (S'_{11}, -S'_{12}) \quad (3.8.41)$$

Les points  $R$  et  $T$  permettent de déterminer le centre du cercle et son diamètre. Le tracé du cercle donne les points d'intersection  $P$  et  $Q$  avec l'axe des abscisses, ces points donnant les valeurs  $S_1$  et  $S_2$  des composantes principales du tenseur. D'autre part, l'angle  $\alpha$  est donné par :

$$\tan 2\alpha = \frac{2 S'_{12}}{S'_{22} - S'_{11}} \quad (3.8.42)$$

6. La matrice de rotation (3.8.33) subsiste mais les axes  $Ox_i$  considérés à présent ne sont plus les axes principaux. Le changement de référentiel par rotation transforme les composantes selon la formule générale (3.8.34). On obtient :

$$S'_{11} = S_{11} \cos^2 \alpha + S_{22} \sin^2 \alpha ; \quad S'_{22} = S_{11} \sin^2 \alpha + S_{22} \cos^2 \alpha$$

$$S'_{12} = S'_{21} = (-S_{11} + S_{22}) \sin \alpha \cos \alpha \quad ; \quad S'_{33} = S_{33}$$

$$S'_{23} = -S_{13} \sin \alpha + S_{23} \cos \alpha \quad ; \quad S'_{31} = S_{13} \cos \alpha + S_{23} \sin \alpha \quad (3.8.43)$$

En ce qui concerne tout au moins  $S'_{11}$ ,  $S'_{22}$ ,  $S'_{12}$ , on obtient les mêmes formules qu'en (3.8.38) et la construction du cercle de Mohr s'applique également.

### Exercice 3.7

Soient deux opérateurs linéaires  $A$  et  $B$  agissant respectivement sur les vecteurs des espaces vectoriels  $\varepsilon_p$  et  $\varepsilon_q$ . On note  $\Psi$  les vecteurs de  $\varepsilon_p$  et  $\Phi$  ceux de  $\varepsilon_q$ ; l'espace produit tensoriel de  $\varepsilon_p$  et  $\varepsilon_q$  est noté  $\varepsilon_{pq} = \varepsilon_p \otimes \varepsilon_q$ . Par définition, l'opérateur noté :

$$A \otimes B = C \quad (3.8.44)$$

est l'opérateur qui, agissant sur un vecteur  $\Psi \otimes \Phi$  de l'espace  $\varepsilon_{pq}$ , donne le vecteur :

$$C(\Psi \otimes \Phi) = (A \otimes B)(\Psi \otimes \Phi) = A\Psi \otimes B\Phi \quad (3.8.45)$$

L'opérateur  $A \otimes B$  est appelé le produit tensoriel des opérateurs  $A$  et  $B$ .

1. Soient les produits d'opérateurs  $A_1 A_2$  et  $B_1 B_2$  agissant respectivement dans les espaces  $\varepsilon_p$  et  $\varepsilon_q$ . Montrer qu'on a :

$$A_1 A_2 \otimes B_1 B_2 = (A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) \quad (3.8.46)$$

2. Montrer que l'opérateur  $A^{-1} \otimes B^{-1}$  est l'opérateur inverse de  $A \otimes B$ .
3. On note  $\Psi$  un vecteur propre d'un opérateur  $A$  agissant dans  $\varepsilon_p$ , c'est-à-dire un vecteur tel que :

$$A\Psi = \alpha\Psi \quad (3.8.47)$$

où  $\alpha$  est un nombre appelé valeur propre associée à  $\Psi$ . De même, on considère un vecteur  $\Phi$  qui est vecteur propre de l'opérateur  $B$  agissant dans  $\varepsilon_q$ , associé à la valeur propre  $\beta$ . Montrer que les vecteurs  $\Psi \otimes \Phi$  sont des vecteurs propres des opérateurs  $A \otimes \mathbb{1}_q$  et  $\mathbb{1}_p \otimes B$ , où  $\mathbb{1}_q$  et  $\mathbb{1}_p$  sont des opérateurs unité agissant respectivement dans  $\varepsilon_p$  et  $\varepsilon_q$ . Déterminer les valeurs propres respectives de ces opérateurs.

4. Déterminer les vecteurs propres et valeurs propres des opérateurs  $(A \otimes \mathbb{1}_q)^2$  et  $(\mathbb{1}_p \otimes B)^2$ .
5. Soient  $\{\Psi_i\}$  et  $\{\Phi_j\}$  des bases respectives de  $\varepsilon_p$  et  $\varepsilon_q$ . Les éléments matriciels respectifs  $a_{ki}$  et  $b_{lj}$  des opérateurs  $A$  et  $B$  sont définis par :

$$A\Psi_i = \sum_k a_{ki} \Psi_k \quad ; \quad B\Phi_j = \sum_l b_{lj} \Phi_l \quad (3.8.48)$$

Déterminer les éléments matriciels de l'opérateur  $A \otimes B$ .

## Solutions

1. La définition (3.8.45) nous donne :

$$(A_1 A_2 \otimes B_1 B_2) = [A_1 (A_2 \Psi)] \otimes [B_1 (B_2 \Phi)] \quad (3.8.49)$$

Utilisant la définition (3.8.45) en sens inverse, on obtient :

$$[A_1 (A_2 \Psi)] \otimes [B_1 (B_2 \Phi)] = (A_1 \otimes B_1) (A_2 \Psi \otimes B_2 \Phi) \quad (3.8.50)$$

$$= (A_1 \otimes B_1) (A_2 \otimes B_2) (\Psi \otimes \Phi) \quad (3.8.51)$$

Les vecteurs  $\Psi$  et  $\Phi$  étant quelconques, les relations (3.8.49) et (3.8.51) donnent :

$$(A_1 A_2 \otimes B_1 B_2) = (A_1 \otimes B_1) (A_2 \otimes B_2) \quad (3.8.52)$$

2. La relation (3.8.52) permet d'écrire :

$$(A \otimes B) (A^{-1} \otimes B^{-1}) = (A A^{-1}) \otimes (B B^{-1}) = \mathbf{1}_p \otimes \mathbf{1}_q \quad (3.8.53)$$

Selon la définition (3.8.45), on obtient :

$$(\mathbf{1}_p \otimes \mathbf{1}_q) (\Psi \otimes \Phi) = \mathbf{1}_p \Psi \otimes \mathbf{1}_q \Phi = \Psi \otimes \Phi \quad (3.8.54)$$

L'opérateur  $\mathbf{1}_p \otimes \mathbf{1}_q$  est donc l'opérateur unité agissant dans  $\varepsilon_p \otimes \varepsilon_q$ , d'où :

$$(A \otimes B) (A^{-1} \otimes B^{-1}) = \mathbf{1}_{pq} \quad (3.8.55)$$

En conséquence, l'opérateur  $(A^{-1} \otimes B^{-1})$  est l'opérateur inverse de  $A \otimes B$  :

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1} \quad (3.8.56)$$

3. La définition (3.8.45) du produit tensoriel de deux opérateurs ainsi que la relation (3.8.47), nous donnent :

$$(A \otimes \mathbf{1}_q) (\Psi \otimes \Phi) = A \Psi \otimes \mathbf{1}_q \Phi = (\alpha \Psi) \otimes \Phi = \alpha (\Psi \otimes \Phi) \quad (3.8.57)$$

Les vecteurs  $\Psi \otimes \Phi$  de  $\varepsilon_p \otimes \varepsilon_q$  sont des vecteurs de  $(A \otimes \mathbf{1}_q)$  associés à la valeur propre  $\alpha$ . Une démonstration analogue montre que les vecteurs  $\Psi \otimes \Phi$  sont des vecteurs propres de  $\mathbf{1}_p \otimes B$  associés à la valeur propre  $\beta$ .

4. L'application de l'opérateur  $(A \otimes \mathbf{1}_q)^2$  aux vecteurs  $\Psi \otimes \Phi$  donne, selon (3.8.57) :

$$(A \otimes \mathbf{1}_q)^2 (\Psi \otimes \Phi) = (A \otimes \mathbf{1}_q) \alpha (\Psi \otimes \Phi) = \alpha^2 (\Psi \otimes \Phi) \quad (3.8.58)$$

Les vecteurs  $\Psi \otimes \Phi$  sont des vecteurs propres de l'opérateur  $(A \otimes \mathbf{1}_q)^2$  associés à la valeur propre  $\alpha^2$ . On montre de même que les vecteurs  $\Psi \otimes \Phi$  sont également des vecteurs propres de l'opérateur  $(\mathbf{1}_p \otimes B)^2$  associés à la valeur propre  $\beta^2$ .

5. Utilisant la propriété de distributivité (3.1.16) du produit tensoriel ainsi que l'associativité (3.1.17) par rapport à la multiplication par un scalaire, on obtient :

$$\begin{aligned} A \otimes B (\Psi_i \otimes \Phi_j) &= (A \Psi_i) \otimes (B \Phi_j) \\ &= \left( \sum_k a_{ki} \Psi_k \right) \otimes \left( \sum_l b_{lj} \Phi_l \right) \\ &= \sum_{kl} (a_{ki} b_{lj}) (\Psi_k \otimes \Phi_l) \end{aligned} \tag{3.8.59}$$

# Chapitre 4

## Espaces ponctuels

### 4.1 Espace ponctuel pré-euclidien

#### 4.1.1 Exemple d'espace ponctuel

L'étude des phénomènes physiques recourt à leur représentation dans l'espace de la géométrie classique à trois dimensions ou dans celui de la relativité à quatre dimensions. Les vecteurs et les tenseurs peuvent en effet être attachés à chacun des points de l'espace et former des champs de vecteurs et de tenseurs, ce qui nécessite **la définition mathématique d'espaces formés de points ou espaces ponctuels**.

De plus, des espaces plus abstraits peuvent être imaginés pour décrire des phénomènes physiques, ce qui conduit à introduire des espaces ponctuels à un nombre quelconque de dimensions. C'est le cas, par exemple, de l'espace de phases utilisé en Physique statistique.

La définition précise d'espace ponctuel va être faite à partir de la notion d'espace vectoriel. Voyons tout d'abord l'exemple de l'espace ponctuel formé par des triplets de nombres qui est issu directement de l'espace de la géométrie classique.

**Espace ponctuel formé de triplets de nombres** - Donnons-nous des triplets de nombres réels notés  $A = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $B = (b_1, b_2, b_3)$ , etc. Appelons  $E'_3$  l'ensemble de tous les éléments  $A, B$ , etc., formés par des triplets de nombres. À tout couple  $(A, B)$  de deux éléments de  $E'_3$ , pris dans cet ordre, on peut faire correspondre un vecteur  $\mathbf{x}$  noté  $\mathbf{AB}$ , en définissant celui-ci par un triplet de nombres tel que  $x_i = b_i - a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . On a donc  $\mathbf{x} = \mathbf{AB} = (x_1, x_2, x_3)$ .

Ainsi qu'on l'a déjà vu au chapitre Premier, c'est un élément d'un espace vectoriel  $E_3$  lorsqu'on a défini l'addition et la multiplication par un scalaire sur ces éléments.

La correspondance que l'on établit ainsi, entre tout couple  $(A, B)$  de deux éléments de  $E'_3$  et un vecteur d'un espace vectoriel  $E_3$ , vérifie manifestement les propriétés suivantes :

**EP1 :  $\mathbf{AB} = -\mathbf{BA}$**

**EP2 : Associativité par rapport à l'addition :  $\mathbf{AB} = \mathbf{AC} + \mathbf{CB}$**

**EP3 : Si  $O$  est un élément arbitraire choisi dans  $E'_3$ , à tout vecteur  $\mathbf{x}$  de  $E_3$ , il correspond un point  $M$  et un seul tel que  $\mathbf{OM} = \mathbf{x}$ .**

Lorsqu'on a muni l'ensemble  $E'_3$  de cette loi de correspondance, vérifiant les trois propriétés précédentes, on dit que **l'ensemble des triplets de nombres constitue un espace ponctuel, noté  $\varepsilon_3$** . Les éléments de  $\varepsilon_3$  sont appelés des points.

**Remarque** - Formellement, il ne semble pas y avoir de différences entre un point  $A = (a_1, a_2, a_3)$ , défini par un triplet de nombres, et un vecteur  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , défini également de la même manière. Pour établir une distinction entre ces éléments, il faut revenir à la remarque que l'on a faite au chapitre Premier, lors de la généralisation de la notion de vecteur.

Au départ, on se donne un ensemble  $E'_3$  d'éléments constitués par des triplets de nombres. Cet ensemble  $E'_3$  ne comporte pas a priori de structure ; ses éléments seuls le définissent.

Rappelons que pour former un espace vectoriel  $E_3$ , on définit sur les éléments de  $E'_3$  deux lois de composition interne qui constituent la structure du nouvel ensemble  $E_3$  ; les éléments de  $E_3$  sont alors appelés des vecteurs.

La méthode est analogue pour former l'espace ponctuel  $\varepsilon_3$ . On définit sur les couples d'éléments de  $E'_3$  une loi de correspondance qui constitue la structure du nouvel ensemble  $\varepsilon_3$  ; ses éléments sont alors appelés des points. Cet espace ponctuel  $\varepsilon_3$  se confond en tant qu'ensemble d'éléments avec l'ensemble  $E'_3$  mais il s'en distingue en tant qu'espace ponctuel qui constitue un ensemble structuré par la loi de correspondance que l'on se donne. De même, les espaces  $E_3$  et  $\varepsilon_3$  sont distincts par suite de leur structure différente et on peut établir une distinction entre les éléments de chacun de ces espaces. On dit que  $E'_3$  constitue le support des espaces  $E_3$  et  $\varepsilon_3$ .

#### 4.1.2 Définition d'un espace ponctuel

On peut généraliser à un support quelconque  $E'_n$  la notion précédente d'espace ponctuel. Pour cela, on considère un ensemble  $E'_n$  d'éléments, notés  $A, B$ , etc., et on suppose qu'à tout couple  $(A, B)$  d'éléments de  $E'_n$ , pris dans cet ordre, on puisse faire correspondre un vecteur  $\mathbf{x}$ , noté  $\mathbf{AB}$ , d'un espace vectoriel  $E_n$ , à  $n$  dimensions. Si la correspondance ainsi réalisée vérifie les axiomes EP1, EP2 et EP3 précédents, on dit que l'ensemble  $E'_n$  muni de cette structure constitue un espace ponctuel à  $n$  dimensions que l'on note  $\varepsilon_n$ . Les éléments de  $\varepsilon_n$  sont appelés des points.

L'espace vectoriel  $E_n$  est appelé l'espace associé à  $\varepsilon_n$ . **Lorsque l'espace vectoriel associé est un espace pré-euclidien, on dit que  $\varepsilon_n$  est un espace ponctuel pré-euclidien.**

### 4.1.3 Repères d'un espace ponctuel pré-euclidien

Considérons un point  $O$  quelconque d'un espace ponctuel pré-euclidien  $\varepsilon_n$ , et une base  $(\mathbf{e}_i)$  de l'espace vectoriel associé  $E_n$ . On appelle repère de l'espace  $\varepsilon_n$  l'ensemble du point  $O$  et de la base  $(\mathbf{e}_i)$ . Ce repère sera noté  $(O, \mathbf{e}_i)$ ; le point  $O$  est appelé l'origine du repère.

**Coordonnées d'un point** - Par définition, les coordonnées d'un point  $M$  d'un espace ponctuel pré-euclidien  $\varepsilon_n$ , par rapport au repère  $(O, \mathbf{e}_i)$  sont les composantes  $x^i$  du vecteur  $\mathbf{x} = \mathbf{OM}$  de l'espace  $E_n$ , par rapport à la base  $(\mathbf{e}_i)$ .

Soient deux points  $M$  et  $M'$  de  $\varepsilon_n$ , définis par leurs coordonnées  $x^i$  et  $x'^i$ , on a :  $\mathbf{OM} = x^i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{OM}' = x'^i \mathbf{e}_i$ . Utilisant les axiomes EP1 et EP2, il vient :

$$\mathbf{MM}' = \mathbf{MO} + \mathbf{OM}' = -\mathbf{OM} + \mathbf{OM}' = (-x^i + x'^i) \mathbf{e}_i \quad (4.1.1)$$

On en déduit que les composantes du vecteur  $\mathbf{MM}'$ , par rapport à la base  $(\mathbf{e}_i)$ , sont les  $n$  quantités  $(x'^i - x^i)$ , différences des coordonnées des points  $M'$  et  $M$ .

**Changement de repère** - Soient  $(O, \mathbf{e}_i)$  et  $(O', \mathbf{e}'_j)$  deux repères quelconques de  $\varepsilon_n$ . Les bases sont liées entre elles par les relations :

$$(a) \mathbf{e}_i = A_i^k \mathbf{e}'_k ; (b) \mathbf{e}'_k = A_k^i \mathbf{e}_i \quad (4.1.2)$$

Cherchons les relations entre les coordonnées d'un point  $M$  de  $\varepsilon_n$  par rapport à ces deux repères. Pour cela, exprimons les vecteurs  $\mathbf{OO}'$  et  $\mathbf{O}'\mathbf{O}$  sur chacune des bases de  $E_n$  :

$$(a) \mathbf{OO}' = \alpha^i \mathbf{e}_i ; (b) \mathbf{O}'\mathbf{O} = \alpha'^j \mathbf{e}'_j \quad (4.1.3)$$

ainsi que les vecteurs  $\mathbf{OM}$  et  $\mathbf{O}'\mathbf{M}$ , soit :

$$(a) \mathbf{OM} = x^i \mathbf{e}_i ; (b) \mathbf{O}'\mathbf{M} = x'^j \mathbf{e}'_j \quad (4.1.4)$$

On a d'autre part :

$$\begin{aligned} \mathbf{OM} &= \mathbf{OO}' + \mathbf{O}'\mathbf{M} \\ &= \alpha^i \mathbf{e}_i + x'^j \mathbf{e}'_j = \alpha^i \mathbf{e}_i + x'^j A_j^i \mathbf{e}_i = (\alpha^i + x'^j A_j^i) \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Identifiant les composantes par rapport au vecteur  $\mathbf{e}_i$  dans les expressions (4.1.4) et (4.1.5), on obtient :

$$x^i = \alpha^i + A_j^i x'^j \quad (4.1.6)$$

En exprimant de façon analogue le vecteur  $\mathbf{O}'\mathbf{M}$  sur la base  $(\mathbf{e}'_j)$ , il vient :

$$x'^j = \alpha'^j + A_i^j x^i \quad (4.1.7)$$

#### 4.1.4 Distance entre deux points

Soit  $\varepsilon_n$  un espace ponctuel pré-euclidien et  $M$  et  $M'$  deux points de cet espace. Par définition, la norme du vecteur  $\mathbf{MM}'$  s'appelle la distance des deux points  $M$  et  $M'$ . On a :

$$\text{distance } MM' = \text{norme } \mathbf{MM}' \quad (4.1.8)$$

Si les deux points  $M$  et  $M'$  ont respectivement pour coordonnées  $x^i$  et  $x'^i$ , par rapport à un repère  $(O, \mathbf{e}_i)$ , la relation (4.1.1) montre que le vecteur  $\mathbf{MM}'$  a pour composantes les quantités  $(x'^i - x^i)$ . Le carré de la distance est donnée par :

$$(\text{distance } MM')^2 = g_{ij} (x'^i - x^i)(x'^j - x^j) \quad (4.1.9)$$

Si le point  $M'$  est infiniment proche du point  $M$ , ses coordonnées sont notées  $(x^i + dx^i)$  et le vecteur  $\mathbf{MM}' = d\mathbf{M}$  a pour composantes les quantités  $dx^i$ . Notons  $ds$  la distance entre les points  $M$  et  $M'$ . La relation (4.1.9) donne l'expression du carré de la distance entre ces points sous la forme :

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (4.1.10)$$

Pour un espace ponctuel euclidien et des vecteurs de base  $\mathbf{e}_i$  orthonormés, on a :  $g_{ij} = \delta_{ij}$  et l'expression (4.1.10) devient alors :

$$ds^2 = dx^i dx^i \quad (4.1.11)$$

On obtient une expression qui généralise, à  $n$  dimensions, le carré de la distance élémentaire, par rapport à un repère cartésien, dans l'espace de la géométrie classique.

#### 4.1.5 Dérivée d'un vecteur

Les vecteurs que l'on utilise en Physique sont généralement des fonctions de une ou plusieurs variables, celles-ci pouvant être des variables d'espace ou du temps. Lorsqu'en chaque point  $M$  d'un espace ponctuel  $\varepsilon_n$ , on attache un tenseur, défini par ses composantes par rapport à un repère  $(O, \mathbf{e}_i)$ , on dira que l'on s'est donné un champ de tenseurs.

Pour des vecteurs à  $n$  dimensions, la notion de dérivée d'un vecteur à trois dimensions se généralise et l'on obtient toutes les formules classiques relatives aux dérivées.

**Vecteurs d'un espace vectoriel** - Considérons un vecteur  $\mathbf{x}$  appartenant à un espace euclidien  $E_n$  dont les composantes, sur une base  $(\mathbf{e}_i)$ , sont des fonctions d'un paramètre quelconque  $\alpha$ ; on note ce vecteur  $\mathbf{x}(\alpha)$  et l'on a :

$$\mathbf{x}(\alpha) = x^i(\alpha) \mathbf{e}_i \quad (4.1.12)$$

Par définition, la dérivée du vecteur  $\mathbf{x}$  est un vecteur noté  $\mathbf{x}'(\alpha)$  dont les composantes sont les dérivées, par rapport au paramètre  $\alpha$ , des fonctions  $x^i(\alpha)$  :

$$\mathbf{x}'(\alpha) = \frac{dx^i(\alpha)}{d\alpha} \mathbf{e}_i \quad (4.1.13)$$

On appelle **différentielle** de  $\mathbf{x}$  le vecteur, noté  $d\mathbf{x}$ , tel que :

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}'(\alpha) d\alpha \quad (4.1.14)$$

où  $d\alpha$  est la différentielle du paramètre  $\alpha$ . La dérivée d'un vecteur peut donc être notée :  $\mathbf{x}'(\alpha) = d\mathbf{x}/d\alpha$ .

Les différentes formules de dérivation des vecteurs à trois dimensions relatives à la somme de vecteurs, au produit d'un vecteur par un scalaire, au produit scalaire de deux vecteurs, sont aisément transposables aux vecteurs à  $n$  dimensions.

Si un vecteur  $\mathbf{x}$  de  $E_n$  dépend de plusieurs paramètres indépendants,  $\alpha, \beta, \gamma$ , la dérivée partielle du vecteur  $\mathbf{x}(\alpha, \beta, \gamma)$  par rapport à la variable  $\alpha$ , par exemple, est un vecteur, noté  $\partial\mathbf{x}/\partial\alpha$ , dont les composantes sont les dérivées partielles des composantes de  $\mathbf{x}$ , soit :

$$\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\alpha} = \frac{\partial x^i}{\partial\alpha} \mathbf{e}_i \quad (4.1.15)$$

La différentielle du vecteur  $\mathbf{x}(\alpha, \beta, \gamma)$  s'écrit :

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\alpha} d\alpha + \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\beta} d\beta + \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\gamma} d\gamma \quad (4.1.16)$$

**Vecteurs d'un espace vectoriel associé à un espace ponctuel** - Considérons à présent un espace vectoriel  $E_n$  associé à un espace ponctuel  $\varepsilon_n$ . Dans un repère  $(O, \mathbf{e}_i)$ , tout point  $M$  de  $\varepsilon_n$  est associé à un vecteur  $\mathbf{x}$  de  $E_n$  tel que  $\mathbf{x} = \mathbf{OM}$ . Si le vecteur  $\mathbf{x}$  dépend d'un paramètre  $\alpha$  et admet une dérivée  $\mathbf{x}'(\alpha)$ , il en est de même de  $\mathbf{OM}$ .

Montrons que le vecteur dérivé  $\mathbf{x}'(\alpha)$  ne dépend pas du point origine  $O$  mais seulement du point  $M$  considéré. En effet, si  $O'$  est un autre point origine, on a :

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OO}' + \mathbf{O}'M \quad (4.1.17)$$

et puisque le vecteur  $\mathbf{OO}'$  est fixe et ne dépend que de  $\alpha$ , on a  $d\mathbf{OO}'/d\alpha = \mathbf{0}$ , d'où :

$$\frac{d\mathbf{OM}}{d\alpha} = \frac{d\mathbf{O}'M}{d\alpha} = \mathbf{x}'(\alpha) \quad (4.1.18)$$

On peut donc noter la dérivée du vecteur  $\mathbf{OM}$  en mentionnant seulement le point  $M$  et l'on écrira :

$$\mathbf{x}'(\alpha) = \frac{d\mathbf{M}}{d\alpha} = \mathbf{M}'(\alpha) \quad (4.1.19)$$

La différentielle de  $\mathbf{OM}$  s'écrit alors :  $d\mathbf{M} = \mathbf{M}'(\alpha) d\alpha$ .

Si un point  $M$  de  $\varepsilon_n$  est associé, par rapport à un repère  $(O, \mathbf{e}_i)$ , à un vecteur  $\mathbf{x}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{OM}$ , les dérivées partielles de  $\mathbf{OM}$  ne dépendront que du point  $M$  et l'on écrira, par exemple :

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha} \quad (4.1.20)$$

### 4.1.6 Notation des dérivées

Afin d'alléger les expressions des dérivées partielles des fonctions dépendant de  $n$  variables, on va utiliser par la suite les notations indicielles suivantes. Si  $f(y^1, y^2, \dots, y^n)$  est une fonction des  $n$  variables  $y^i$ , on notera les dérivées partielles sous la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = \partial_i f \quad (4.1.21)$$

Les dérivées secondes par rapport aux variables  $y^i$  et  $y^k$  s'écriront :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^i \partial y^k} = \partial_{ik} f \quad (4.1.22)$$

Lorsque  $\mathbf{x}$  est un vecteur tel que  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ , dont les composantes sont des fonctions de  $n$  variables  $y^k$ , soit :  $x^i = x^i(y^1, y^2, \dots, y^n)$ , les dérivées partielles du vecteur seront notées, en utilisant la convention de sommation :

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y^k} = \partial_k \mathbf{x} = \partial_k (x^i \mathbf{e}_i) = (\partial_k x^i) \mathbf{e}_i \quad (4.1.23)$$

## 4.2 Coordonnées curvilignes

### 4.2.1 Systèmes de coordonnées

Les notions classiques de systèmes de coordonnées peuvent être généralisées à des espaces ponctuels à  $n$  dimensions. On appelle système de coordonnées dans  $\varepsilon_n$ , tout mode de définition d'un point  $M$  de cet espace en fonction de  $n$  scalaires  $u^i$  qui sont appelées coordonnées de  $M$  dans le système considéré.

Par exemple, dans l'espace  $\varepsilon_3$  de la géométrie ordinaire, les coordonnées sont des scalaires généralement notés  $x, y, z$ . Le système de coordonnées sphériques comporte trois paramètres notés  $r, \theta, \varphi$ .

Pour un système donné de coordonnées, on appelle **ligne coordonnée** le lieu des points  $M$  lorsqu'une seule coordonnée varie, les autres étant égales à des constantes.

En un point  $M$  donné se croisent  $n$  lignes coordonnées.

Ainsi dans l'espace  $\varepsilon_3$ , rapporté à un repère fixe, on obtient des lignes coordonnées qui sont des droites lorsque l'on pose, par exemple,  $y = \text{cte}$ ,  $z = \text{cte}$  et que l'on fait varier  $x$ .

Étudions tout d'abord la généralisation d'un système de coordonnées relatives à un repère fixe.

## 4.2.2 Coordonnées rectilignes

Les lignes coordonnées sont dans ce cas des droites et pour cette raison, ces coordonnées sont appelées des coordonnées rectilignes.

## 4.2.3 Coordonnées sphériques

Considérons, à titre d'exemple, un système de coordonnées de l'espace  $\varepsilon_3$ , de la géométrie ordinaire. Les points de cet espace peuvent être repérés à l'aide d'un système de coordonnées  $u^1, u^2, u^3$ , appelées **coordonnées sphériques**, celles-ci étant généralement notées  $u^1 = r, u^2 = \theta, u^3 = \varphi$ . Ces coordonnées sont définies à partir d'un repère fixe cartésien de  $\varepsilon_3$ , que l'on va noter  $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  et les coordonnées rectilignes d'un point  $M$  de  $\varepsilon_3$  sont notées  $x^i, i = 1, 2, 3$ . Les coordonnées sphériques sont définies par les relations suivantes :

$$x^1 = r \sin \theta \cos \varphi ; \quad x^2 = r \sin \theta \sin \varphi ; \quad x^3 = r \cos \theta \quad (4.2.1)$$

Les lignes coordonnées sont obtenues en maintenant constant deux paramètres et en faisant varier le troisième. Pour  $r$  variable, on obtient des droites passant par le point  $O$  et dont la direction est déterminée par les valeurs fixées des angles  $\theta$  et  $\varphi$ . Les variations de  $\theta$  font décrire au point  $M$  un cercle centré sur  $O$ , de rayon  $r$  et situé dans le plan défini par l'angle  $\varphi$ . Les variations de  $\varphi$  donnent un cercle centré sur l'axe  $Ox^3$  et situé dans un plan parallèle au plan  $x^1Ox^2$ . En un point donné se croisent trois lignes coordonnées.

Les coordonnées rectilignes  $x^i$  sont des fonctions  $x^i(r, \theta, \varphi)$  continûment dérivables par rapport aux coordonnées  $r, \theta, \varphi$  (sauf pour  $x^1 = x^2 = 0$ ). Le jacobien de la transformation est différent de zéro, ce qui assure la biunivocité de la correspondance entre un point  $M$  et ses coordonnées sphériques. On obtient inversement les relations :

$$\begin{aligned} r &= [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]^{1/2} ; \quad \varphi = \arctan(x^2/x^1) \\ \theta &= \arccos\left(\frac{x^3}{[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]^{1/2}}\right) \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Les coordonnées sphériques constituent un exemple de système de coordonnées dites curvilignes dans l'espace  $\varepsilon_3$  (valables seulement sur l'espace privé d'une droite).

## 4.2.4 Coordonnées curvilignes

Considérons à présent un espace ponctuel  $\varepsilon_n$  et un repère  $(O, \mathbf{e}^{0i})$  de cet espace. Soit  $x^i$  les coordonnées rectilignes d'un point  $M$  de  $\varepsilon_n$  par rapport à ce repère.

Un système de coordonnées quelconques  $u^k$ ,  $k = 1$  à  $n$ , est obtenu en se donnant  $n$  fonctions arbitraires  $f^i$  des paramètres  $u^k$ , telles que :

$$x^i = f^i(u^1, u^2, \dots, u^n); \quad i = 1, \dots, n \quad (4.2.3)$$

On supposera par la suite que les  $n$  fonctions  $f^i$  satisfont aux propriétés suivantes :

**1-** Elles sont continûment dérivables jusqu'à un certain ordre supérieur ou égal à 2. Cette hypothèse implique, en tout point où elle est satisfaite, que l'on a la permutabilité des dérivations :

$$\partial_{kl} f^i = \partial_{lk} f^i \quad (4.2.4)$$

**2-** Ces fonctions sont telles qu'on peut résoudre le système de  $n$  équations (4.2.3) par rapport aux variables  $u^k$  et les exprimer en fonction des  $x^i$ , soit :

$$u^k = g^k(x^1, x^2, \dots, x^n); \quad k = 1, \dots, n \quad (4.2.5)$$

**3-** Lorsque les variables  $u^k$  varient dans un domaine  $\Delta$ , les variables  $x^i$  varient dans un domaine  $\Delta'$ . Le jacobien des fonctions  $x^i = f^i(u^1, u^2, \dots, u^n)$ , donné par :

$$D(\partial_k x^i) = \begin{bmatrix} \partial_1 x^1 & \partial_1 x^2 & \dots & \partial_1 x^n \\ \partial_2 x^1 & \partial_2 x^2 & \dots & \partial_2 x^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_n x^1 & \partial_n x^2 & \dots & \partial_n x^n \end{bmatrix} \quad (4.2.6)$$

sera supposé différent de zéro dans le domaine  $\Delta$  ainsi que le jacobien  $D(\partial_i u^k)$  des fonctions  $u^k = g^k(x^1, x^2, \dots, x^n)$  qui est l'inverse du jacobien  $D(\partial_k x^i)$ . Si les jacobiens existent, ils sont non nuls comme conséquence de l'hypothèse (2) ci-dessus.

Si l'on fixe  $(n - 1)$  paramètres  $u^k$  en faisant varier un seul paramètre,  $u^1$  par exemple, on obtient les coordonnées  $x^i_{(1)}$  d'un ensemble de points  $M$  de  $\varepsilon_n$  qui constituent une ligne coordonnée. **En général, les lignes coordonnées ne sont pas des droites mais des courbes ; ces coordonnées  $u^k$  sont appelées pour cette raison des coordonnées curvilignes.** En un point  $M$  de  $\varepsilon_n$  se croisent  $n$  lignes coordonnées.

## 4.3 Repère naturel

### 4.3.1 Définitions

**Repère cartésien** - Tout espace vectoriel pré-euclidien  $E_n$  possédant une base orthonormée  $\mathbf{e}_i^0$ , considérons en un point origine  $O$  un repère  $(O, \mathbf{e}_i^0)$  de l'espace

ponctuel  $\varepsilon_n$ . On dira que ce repère est un repère cartésien. On pourra, en particulier, attacher à chaque point  $M$  de  $\varepsilon_n$  un repère cartésien  $(M, \mathbf{e}_i^0)$  dont les vecteurs seront identiques en chaque point.

On note  $x^i$  les coordonnées des vecteurs  $\mathbf{OM}$  dans un repère cartésien.

**Base naturelle** - On a vu que les dérivées et les différentielles d'un vecteur  $\mathbf{OM}$  de  $\varepsilon_n$  sont indépendants du point  $O$  d'un repère donné. Si  $\varepsilon_n$  est rapporté à un système de coordonnées curvilignes  $u^k$ , on peut donc écrire, en appelant  $\mathbf{e}_k$  les vecteurs suivants :

$$\mathbf{e}_k = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial u^k} = \partial_k \mathbf{M} \quad (4.3.1)$$

Soient  $u^1, u^2, \dots, u^n$  les coordonnées curvilignes du point  $M$  par rapport à un repère cartésien  $(O, \mathbf{e}_i^0)$ . Dans ce repère, on a :  $\mathbf{OM} = x^i \mathbf{e}_i^0$ , où les coordonnées cartésiennes sont des fonctions  $x^i = x^i(u^1, u^2, \dots, u^n)$ . Le vecteur  $\mathbf{e}_k$  défini par (4.3.1) a pour expression :

$$\mathbf{e}_k = \partial_k (x^i \mathbf{e}_i^0) = (\partial_k x^i) \mathbf{e}_i^0 \quad (4.3.2)$$

À partir des composantes  $\partial_k x^i$  du vecteur  $\mathbf{e}_k$ , on peut former un déterminant  $D(\partial_k x^i)$  qui est précisément le jacobien (4.2.6) des fonctions  $x^i$ . Puisque ce déterminant est différent de zéro, il en résulte que les  $n$  vecteurs  $\mathbf{e}_k$  sont linéairement indépendants.

Ces  $n$  vecteurs, définis par la relation (4.3.1) sont appelés **la base naturelle** au point  $M$  de l'espace vectoriel associé  $E_n$ . Ils sont colinéaires aux tangentes des  $n$  lignes coordonnées qui se coupent en point  $M$  où ils sont définis.

**Repère naturel** - Associons au point  $M$  de  $\varepsilon_n$  un repère formé par le point  $M$  et par les vecteurs de la base naturelle. Ce repère est appelé **le repère naturel** en  $M$  du système de coordonnées  $u^k$  ; il sera noté  $(M, \mathbf{e}_k)$  ou  $(M, \partial_k \mathbf{M})$ .

La différentielle du vecteur  $\mathbf{OM}$  s'exprime sous la forme :

$$d\mathbf{M} = \partial_k \mathbf{M} du^k = \mathbf{e}_k du^k \quad (4.3.3)$$

**Les quantités  $du^k$  constituent donc les composantes contravariantes du vecteur  $d\mathbf{M}$  dans le repère naturel  $(M, \mathbf{e}_k)$  du système de coordonnées  $u^k$ .**

### 4.3.2 Repère naturel en coordonnées sphériques

Déterminons la base naturelle de l'espace vectoriel  $E_3$  associé à l'espace ponctuel  $\varepsilon_3$  de la géométrie ordinaire, en coordonnées sphériques. Écrivons l'expression des vecteurs  $\mathbf{OM}$  dans un repère fixe cartésien  $(O, \mathbf{e}_i^0)$  :

$$\mathbf{OM} = x^i \mathbf{e}_i^0 = r \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_1^0 + r \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_2^0 + r \cos \theta \mathbf{e}_3^0 \quad (4.3.4)$$

Les vecteurs  $\mathbf{e}_i^0$  étant fixes, le vecteur  $\mathbf{e}_1$  de la base naturelle s'écrit :

$$\mathbf{e}_1 = \partial_1 \mathbf{M} = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_1^0 + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_2^0 + \cos \theta \mathbf{e}_3^0 \quad (4.3.5)$$

Le vecteur  $\mathbf{e}_1$  est porté par la droite  $(OM)$  et dirigé dans le sens des  $r$  croissants. La dérivée de  $\mathbf{OM}$  par rapport à  $\theta$  donne le vecteur  $\mathbf{e}_2$  :

$$\mathbf{e}_2 = \partial_2 \mathbf{M} = r \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_1^0 + r \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_2^0 - r \sin \theta \mathbf{e}_3^0 \quad (4.3.6)$$

C'est un vecteur tangent à un grand cercle centré sur l'origine  $O$  et dirigé dans le sens croissant de la coordonnée  $\theta$ . La dérivée par rapport à  $\varphi$  donne le vecteur  $\mathbf{e}_3$  :

$$\mathbf{e}_3 = \partial_3 \mathbf{M} = -r \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_1^0 + r \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_2^0 \quad (4.3.7)$$

C'est un vecteur tangent à un cercle parallèle au plan  $x^1 O x^2$ , centré sur l'axe  $Ox^3$ , et dirigé dans le sens des valeurs croissantes de  $\varphi$ .

Ces trois vecteurs sont orthogonaux entre eux ainsi qu'on le vérifie aisément en effectuant les produits scalaires  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ . Lorsqu'il en est ainsi, on dit que les coordonnées sont **des coordonnées curvilignes orthogonales**.

Ces vecteurs ne sont pas tous normés, puisque l'on a :

$$g_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1; \quad g_{22} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = r^2; \quad g_{33} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = r^2 \sin^2 \theta \quad (4.3.8)$$

Le repère naturel, en coordonnées sphériques, est donc formé par des vecteurs variables en direction et en module en chaque point  $M$ . Les quantités  $g_{ij}$  constituent un exemple de tenseur attaché à chacun des points  $M$  de l'espace  $\mathcal{E}_3$ .

### 4.3.3 Changement de coordonnées curvilignes

Considérons deux systèmes quelconques de coordonnées curvilignes  $u^i$  et  $u'^k$ , liées entre elles par les relations :

$$u^i = u^i(u'^1, u'^2, \dots, u'^n) \quad ; \quad u'^k = u'^k(u^1, u^2, \dots, u^n) \quad (4.3.9)$$

où les fonctions  $u^i(u'^1, u'^2, \dots, u'^n)$  sont supposées être plusieurs fois continuellement dérivables par rapport aux  $u'^k$  et de même pour les fonctions  $u'^k(u^1, u^2, \dots, u^n)$  par rapport aux coordonnées  $u^i$ . Lorsqu'on passe d'un système de coordonnées à un autre, on dit que l'on effectue un changement de coordonnées curvilignes.

Les coordonnées  $x^j$  par rapport à un repère fixe, sont liées également à chaque système de coordonnées curvilignes et l'on suppose que les jacobiens  $D(\partial x^j / \partial u^i)$  et  $D(\partial x^j / \partial u'^k)$  sont différents de zéro. Dans ce cas, le jacobien  $D(\partial u^i / \partial u'^k)$  est également non nul puisqu'on a la relation classique :

$$D\left(\frac{\partial x^j}{\partial u^i}\right) D\left(\frac{\partial u^i}{\partial u'^k}\right) = D\left(\frac{\partial x^j}{\partial u'^k}\right) \quad (4.3.10)$$

**Changement de base naturelle** - À chaque système de coordonnées curvilignes  $u^i$  et  $u'^k$  données par (4.3.9) est associé respectivement une base naturelle telle que :

$$\mathbf{e}_k = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u'^k} ; \quad \mathbf{e}'_k = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^k} \quad (4.3.11)$$

Le calcul des relations entre les vecteurs de ces deux bases s'effectue en utilisant la formule de dérivation des fonctions composées, soit :

$$\mathbf{e}'_k = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u'^k} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} = \mathbf{e}_i \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \quad (4.3.12)$$

Inversement, le développement de la dérivée  $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^i}$  conduit à la relation :

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial u'^k}{\partial u^i} \mathbf{e}'_k \quad (4.3.13)$$

Lorsqu'on passe d'un système de coordonnées curvilignes à un autre, on substitue à la base  $(\mathbf{e}_i)$  de l'espace vectoriel  $E_n$ , une autre base  $(\mathbf{e}'_k)$  de ce même espace vectoriel. Les relations de changement de base d'un espace vectoriel ont été utilisées précédemment en Algèbre et écrites sous la forme des relations (1.3.12) et (1.3.13), à savoir :

$$(a) \quad \mathbf{e}_i = A_i'^k \mathbf{e}'_k ; \quad (b) \quad \mathbf{e}'_k = A_k^i \mathbf{e}_i \quad (4.3.14)$$

Comparant les expressions (4.3.12) et (4.3.13) à la relation (4.3.14) et identifiant les coefficients des mêmes vecteurs de base, il vient :

$$(a) \quad A_i'^k = \frac{\partial u'^k}{\partial u^i} ; \quad (b) \quad A_k^i = \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} \quad (4.3.15)$$

**En conclusion, à tout système de coordonnées curvilignes  $u^i$  et  $u'^k$  sont associés respectivement, en un même point  $M$  de  $\varepsilon_n$ , des repères naturels  $(M, \mathbf{e}_i)$  et  $(M, \mathbf{e}'_k)$  dont les bases naturelles sont liées par les relations (4.3.12) et (4.3.13). À tout changement de coordonnées curvilignes correspond un changement de base donné par les formules (4.3.14) et (4.3.15).**

**Notation** - La notation abrégée (4.1.21) des dérivées partielles permet d'écrire les formules de changement de base sous la forme :

$$(a) \quad A_i'^k = \partial_i u'^k ; \quad (b) \quad A_k^i = \partial_k u^i \quad (4.3.16)$$

#### 4.3.4 Élément linéaire d'un espace ponctuel

On a vu que le carré de la distance  $ds^2$  entre deux points  $M$  et  $M'$  infiniment proches est donnée par la relation (4.1.10), à savoir :

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (4.3.17)$$

où les  $dx^i$  sont les composantes du vecteur  $d\mathbf{M} = \mathbf{M}M'$ , rapportées à un repère fixe d'un espace ponctuel  $\varepsilon_n$ . Lorsque cet espace est rapporté à un système

de coordonnées curvilignes  $u^i$ , la relation (4.3.3) montre que le vecteur  $d\mathbf{M}$  a pour composantes contravariantes les quantités  $du^i$  par rapport au repère naturel  $(M, \mathbf{e}_i)$ .

Le carré de la distance  $ds^2$  s'écrit alors dans le repère naturel :

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j \quad (4.3.18)$$

où les quantités  $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$  sont les composantes du tenseur fondamental ou tenseur métrique définies à l'aide d'une base naturelle. L'expression (4.3.18) s'appelle **l'élément linéaire** de l'espace ponctuel  $\varepsilon_n$  ou encore **la métrique** de cet espace.

Les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  du repère naturel varient en général d'un point à un autre. C'est le cas, par exemple, des coordonnées sphériques dont les quantités  $g_{ij}$  sont données par la relation (4.3.8). La métrique de l'espace  $\varepsilon_3$ , en coordonnées sphériques, est donnée par :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \quad (4.3.19)$$

Une courbe  $\Gamma$  de  $\varepsilon_n$  peut être définie par la donnée des coordonnées curvilignes  $u^i(\alpha)$  du lieu des points  $M(\alpha)$  en fonction du paramètre  $\alpha$ . La distance élémentaire  $ds$  sur cette courbe  $\Gamma$  s'écrit alors :

$$ds = \left[ g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial \alpha} \frac{\partial u^j}{\partial \alpha} \right]^{1/2} d\alpha \quad (4.3.20)$$

Lorsque  $\alpha$  varie dans un intervalle  $[\alpha_1, \alpha_2]$  le point  $M$  parcourt un arc de courbe, allant d'un point  $M_1$  à un point  $M_2$ . La longueur de l'arc  $M_1M_2$  est donnée par l'intégrale :

$$\text{arc } M_1M_2 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[ g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial \alpha} \frac{\partial u^j}{\partial \alpha} \right]^{1/2} d\alpha \quad (4.3.21)$$

## 4.4 Exercices résolus

### Exercice 4.1

Écrire les expressions suivantes en utilisant la convention de sommation ainsi que l'écriture indicielle (4.1.21) des dérivées partielles :

1.

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial x^n} dx^n$$

2.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} \frac{dx^1}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} \frac{dx^2}{dt} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial x^n} \frac{dx^n}{dt}$$

3.

$$ds^2 = g_{11} (dx^1)^2 + g_{12} dx^1 dx^2 + g_{21} dx^2 dx^1 + g_{22} (dx^2)^2$$

### Solutions

1.

$$d\Phi = \partial_k \Phi dx^k \quad ; \quad k = 1, \dots, n$$

2.

$$\frac{df}{dt} = \partial_k f \frac{dx^k}{dt}; \quad k = 1, \dots, n$$

3.

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad ; \quad i, j = 1, 2$$

### Exercice 4.2

Les coordonnées polaires dans un plan  $E_2$ , représentés sur la figure 4.1, sont donnés par :  $x^1 = u^1 \cos u^2$  ;  $x^2 = u^1 \sin u^2$  ; où  $x^1$  et  $x^2$  sont les coordonnées cartésiennes,  $u^1$  est la longueur  $OM$  et  $u^2$  l'angle des droites  $OM$ ,  $Ox^1$ .

1. Déterminer les vecteurs de la base naturelle sur la base cartésienne  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ .
2. Déterminer les composantes  $g_{ij}$  du tenseur fondamental de  $E_2$ .
3. Déterminer l'élément linéaire  $ds^2$  en fonction des coordonnées  $u^1$  et  $u^2$ .

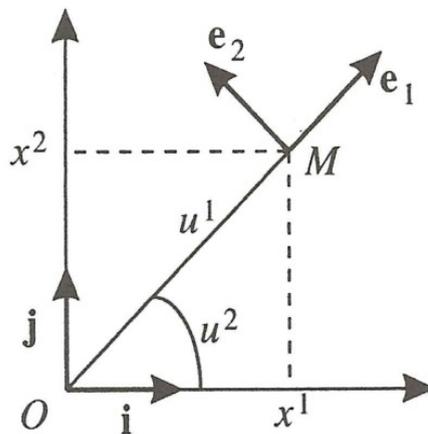


FIGURE 4.1

## Solutions

1. Vecteurs de la base naturelle :

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^1} = \frac{\partial x^1}{\partial u^1} \mathbf{i} + \frac{\partial x^2}{\partial u^1} \mathbf{j} = (\cos u^2) \mathbf{i} + (\sin u^2) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^2} = \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \mathbf{i} + \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \mathbf{j} = -(u^1 \sin u^2) \mathbf{i} + (u^1 \cos u^2) \mathbf{j}$$

2. Composantes du tenseur fondamental :

$$g_{11} = (\cos u^2)^2 + (\sin u^2)^2 = 1 ; \quad g_{12} = g_{21} = 0 ; \quad g_{22} = (u^1)^2$$

3. Élément linéaire du plan :

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j = (du^1)^2 + (u^1)^2 (du^2)^2$$

## Exercice 4.3

Un point  $M$  est repéré en coordonnées cylindriques par les variables  $\rho, \varphi, z$  (Fig.4.2).

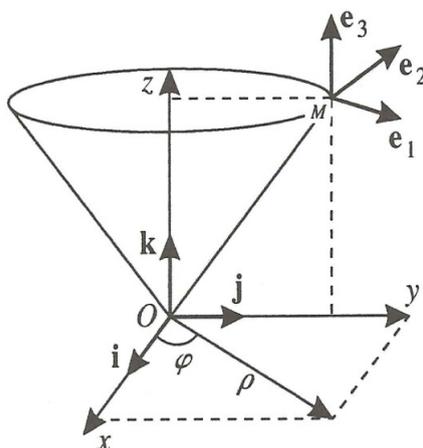


FIGURE 4.2

1. Déterminer l'expression du vecteur position  $\mathbf{OM}(\rho, \varphi, z)$  d'un point  $M$  quelconque sur la base cartésienne  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ .
2. Déterminer les vecteurs  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  de la base naturelle et les représenter sur un schéma.
3. Démontrer que ces vecteurs sont orthogonaux entre eux.
4. Calculer les normes des vecteurs de la base naturelle.

## Solutions

1. Les expressions des coordonnées cartésiennes en coordonnées cylindriques s'écrivent :  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $z = z$ . Le vecteur position d'un point  $M$  s'écrit alors :

$$\mathbf{OM}(\rho, \varphi, z) = \rho \cos \varphi \mathbf{i} + \rho \sin \varphi \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

2. Les vecteurs de la base naturelle sont :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho} = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi \mathbf{i} + \rho \cos \varphi \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z} = \mathbf{k}\end{aligned}$$

3. Formons le produit scalaire des vecteurs de base entre eux :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 &= (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) \cdot (-\rho \sin \varphi \mathbf{i} + \rho \cos \varphi \mathbf{j}) = 0 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 &= (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} = 0 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 &= (-\rho \sin \varphi \mathbf{i} + \rho \cos \varphi \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} = 0\end{aligned}$$

Les vecteurs  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  sont orthogonaux entre eux.

4. Normes des vecteurs de la base naturelle :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}_1\| &= \sqrt{g_{11}} = \sqrt{(\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j})^2} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1 \\ \|\mathbf{e}_2\| &= \sqrt{g_{22}} = \sqrt{(-\rho \sin \varphi \mathbf{i} + \rho \cos \varphi \mathbf{j})^2} = \rho \\ \|\mathbf{e}_3\| &= \sqrt{g_{33}} = \sqrt{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} = 1\end{aligned}$$

## Exercice 4.4

On considère un système de coordonnées paraboloidales d'un espace ponctuel  $E_3$  :  $x = uv \cos \varphi$ ;  $y = uv \sin \varphi$ ;  $z = (1/2)(v^2 - u^2)$ , où  $x$ ,  $y$ ,  $z$  sont les coordonnées cartésiennes. Les coordonnées curvilignes sont notées dans l'ordre :  $u^1 = u$ ,  $u^2 = v$ ,  $u^3 = \varphi$ .

1. Écrire l'expression du vecteur position  $\mathbf{OM}(u, v, \varphi)$  d'un point  $M$  de l'espace  $E_3$ .
2. Déterminer les vecteurs  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  de la base naturelle sur la base cartésienne  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ .
3. Démontrer que ces vecteurs sont orthogonaux entre eux.
4. Calculer leur norme.
5. Déterminer l'élément linéaire de  $E_3$ .

## Solutions

1. Vecteur position d'un point  $M$  :

$$\mathbf{OM}(u, v, \varphi) = uv \cos \varphi \mathbf{i} + uv \sin \varphi \mathbf{j} + (1/2)(v^2 - u^2) \mathbf{k} \quad (4.4.1)$$

2. Vecteurs de la base naturelle :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} = v \cos \varphi \mathbf{i} + v \sin \varphi \mathbf{j} - u \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} = u \cos \varphi \mathbf{i} + u \sin \varphi \mathbf{j} + v \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} = -uv \sin \varphi \mathbf{i} + uv \cos \varphi \mathbf{j} \end{aligned}$$

3. Produits scalaires des vecteurs de la base naturelle :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 &= uv \cos^2 \varphi + uv \sin^2 \varphi - uv = 0 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 &= 0 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 &= 0 \end{aligned}$$

Les vecteurs de la base naturelle sont orthogonaux entre eux.

4. Normes des vecteurs de la base naturelle :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_1\| &= \sqrt{g_{11}} = \sqrt{v^2 \cos^2 \varphi + v^2 \sin^2 \varphi + u^2} = \sqrt{v^2 + u^2} \\ \|\mathbf{e}_2\| &= \sqrt{g_{22}} = \sqrt{u^2 \cos^2 \varphi + u^2 \sin^2 \varphi + v^2} = \sqrt{u^2 + v^2} \\ \|\mathbf{e}_3\| &= \sqrt{g_{33}} = \sqrt{u^2 v^2 \sin^2 \varphi + u^2 v^2 \cos^2 \varphi} = uv \end{aligned}$$

5. Élément linéaire :

$$ds^2 = (v^2 + u^2)(du)^2 + (u^2 + v^2)(dv)^2 + u^2 v^2 (d\varphi)^2$$

## Exercice 4.5

On considère un système de coordonnées curvilignes  $u, v, w$  d'un espace ponctuel  $E_3$ . Démontrer que les vecteurs de la base naturelle  $\{\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w\}$  constituent un système réciproque des vecteurs  $\{\nabla u, \nabla v, \nabla w\}$ .

## Solutions

Les coordonnées curvilignes sont données par la transformation :

$$x = x(u, v, w) \quad ; \quad y = y(u, v, w) \quad ; \quad z = z(u, v, w)$$

où  $x, y, z$  sont les coordonnées cartésiennes de  $E_3$ . La transformation inverse est telle que :

$$u = u(x, y, z) \quad ; \quad v = v(x, y, z) \quad ; \quad w = w(x, y, z)$$

Écrivons les expressions de  $\mathbf{e}_u$  et  $\nabla u$  sur une base cartésienne  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  :

$$\mathbf{e}_u = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k}$$

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$$

Le produit scalaire de ces deux vecteurs s'écrit :

$$\mathbf{e}_u \cdot \nabla u = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z}$$

La fonction  $u(x, y, z)$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{du}{du} = 1 = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}$$

d'où :  $\mathbf{e}_u \cdot \nabla u = 1$ . On obtient de même :  $\mathbf{e}_v \cdot \nabla v = 1$  ;  $\mathbf{e}_w \cdot \nabla w = 1$

Écrivons à présent la dérivée de  $u(x, y, z)$  considérée comme fonction composée, par rapport à  $v$ , il vient :

$$\frac{du}{dv} = 0 = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}$$

d'où :  $\mathbf{e}_v \cdot \nabla u = 0$ . On obtient de même :

$$\mathbf{e}_u \cdot \nabla v = \mathbf{e}_u \cdot \nabla w = \mathbf{e}_v \cdot \nabla w = \mathbf{e}_v \cdot \nabla u = \mathbf{e}_w \cdot \nabla u = \mathbf{e}_w \cdot \nabla v = 0$$

Notons  $\mathbf{e}_u = \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_v = \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_w = \mathbf{e}_3$  et  $\nabla u = \mathbf{e}^1$ ,  $\nabla v = \mathbf{e}^2$ ,  $\nabla w = \mathbf{e}^3$ , les neuf produits scalaires précédents s'écrivent :  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_{ij}$ , ce qui montre que les systèmes de vecteurs  $\{\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w\}$  et  $\{\nabla u, \nabla v, \nabla w\}$  constituent des systèmes réciproques.

## Exercice 4.6

On appelle coordonnées cylindro-paraboliques les paramètres  $u, v, z$  définis par la transformation :

$$x = (1/2)(u^2 - v^2) \quad ; \quad y = uv \quad ; \quad z = z \quad \text{avec} \quad -8 < u < 8 \quad , \quad v \geq 0 \quad \text{et} \quad -8 < z < 8$$

1. Déterminer les vecteurs de la base naturelle
2. Démontrer que ces vecteurs sont orthogonaux entre eux.
3. Calculer les normes de ces vecteurs

## *Solutions*

1. Vecteurs de la base naturelle :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_u &= \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k} = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_v &= -v \mathbf{i} + u \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{k}\end{aligned}$$

2. Orthogonalité des vecteurs de base :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_v &= (u \mathbf{i} + v \mathbf{j}) \cdot (-v \mathbf{i} + u \mathbf{j}) = -uv + uv = 0 \\ \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_z &= (u \mathbf{i} + v \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} = 0 \\ \mathbf{e}_v \cdot \mathbf{e}_z &= (-v \mathbf{i} + u \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} = 0\end{aligned}$$

3. Norme des vecteurs de la base naturelle :

$$\|\mathbf{e}_u\| = \sqrt{u^2 + v^2} ; \quad \|\mathbf{e}_v\| = \sqrt{u^2 + v^2} ; \quad \|\mathbf{e}_z\| = 1$$

## **Exercice 4.7**

Déterminer les composantes covariantes  $g_{ij}$  des tenseurs fondamentaux pour les systèmes de coordonnées suivants :

1. Cylindriques :  $\rho, \varphi, z$ .
2. Paraboloidales :  $u, v, \varphi$ .
3. Cylindro-paraboliques :  $u, v, z$ .

## *Solutions*

1. Coordonnées cylindriques :  $\rho, \varphi, z$ ; exercice (4.3) :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho} = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi \mathbf{i} + \rho \cos \varphi \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z} = \mathbf{k}\end{aligned}$$

d'où :  $g_{11} = 1$  ;  $g_{22} = \rho^2$  ;  $g_{33} = 1$

2. Coordonnées paraboloidales :  $u, v, \varphi$ ; exercice (4.4) :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} = v \cos \varphi \mathbf{i} + v \sin \varphi \mathbf{j} - u \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} = u \cos \varphi \mathbf{i} + u \sin \varphi \mathbf{j} + v \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} = -u v \sin \varphi \mathbf{i} + u v \cos \varphi \mathbf{j}\end{aligned}$$

d'où :  $g_{11} = v^2 + u^2$  ;  $g_{22} = v^2 + u^2$  ;  $g_{33} = u^2 v^2$

3. Coordonnées cylindro-paraboliques :  $u, v, z$  ; exercice (4.6) :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_u &= \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k} = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_v &= -v \mathbf{i} + u \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{k}\end{aligned}$$

d'où :  $g_{11} = v^2 + u^2$  ;  $g_{22} = v^2 + u^2$  ;  $g_{33} = 1$

### Exercice 4.8

Soient deux systèmes de coordonnées curvilignes :  $u^i = u^i(u^1, u^2, \dots, u^n)$  et  $u^j = u^j(u'^1, u'^2, \dots, u'^m)$ . Écrire la loi de transformation des composantes mixtes  $c^{mn}_{ijk}$  d'un tenseur, données dans le système de coordonnées  $u^j$ .

### Solutions

À tout changement de coordonnées curvilignes correspond un changement de base donné par les formules (4.3.16), soit :

$$(a) A_i^k = \partial_i u'^k ; (b) A_k^i = \partial_k u^i$$

La formule de transformation des composantes mixtes nous donne :

$$c'^{pq}_{rst} = A_m^p A_n^q A_r^i A_s^j A_t^k c^{mn}_{ijk} = \partial_m u'^p \partial_n u'^q \partial_r u^i \partial_s u^j \partial_t u^k c^{mn}_{ijk}$$

### Exercice 4.9

Soit  $f(u^1, u^2, \dots, u^n)$  une fonction dérivable par rapport aux  $n$  variables  $u^i$ .

1. Montrer que les dérivées partielles  $\partial_i f(u^1, u^2, \dots, u^n)$  sont les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre un, en déterminant la loi de transformation de  $\partial_i f(u^1, u^2, \dots, u^n)$  lors d'un changement de coordonnées curvilignes.
2. Faire de même en utilisant le critère général de tensorialité.

## Solutions

1. Considérons un changement de coordonnées curvilignes tel que :

$$u^i = u'^i(u^1, u^2, \dots, u^n) ; \quad u^j = u'^j(u^1, u^2, \dots, u^n)$$

La formule usuelle des dérivées partielles s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial u'^i} = \frac{\partial f}{\partial u^j} \partial_i u^j$$

Au changement de coordonnées correspond un changement de base tel que :  $\partial_i u^j = A_i^j$ . Les dérivées  $\partial f / \partial u^i$  se transforment donc comme les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre un. Cela justifie la notation  $\partial_i f$  utilisée pour les dérivées partielles.

2. Considérons la différentielle :

$$df = \partial_i f du^i$$

Les quantités  $du^i$  sont les composantes contravariantes d'un vecteur quelconque  $d\mathbf{M}$ . La quantité  $\partial_i f du^i$  apparaît comme le produit contracté des quantités  $\partial_i f$  par  $du^i$  ; d'autre part, la différentielle  $df$  est un scalaire et, selon le critère général de tensorialité, les quantités  $\partial_i f$  sont donc les composantes d'un tenseur d'ordre un. Le produit contracté est ici le produit scalaire du vecteur gradient par le vecteur  $d\mathbf{M}$ .

## Exercice 4.10

Soit un vecteur  $\mathbf{X}$  de composantes covariantes  $X_i$  ;  $i = 1$  à  $n$ .

1. Déterminer la formule de transformation des dérivées partielles  $\partial X_i / \partial u^k$  lors d'un changement de coordonnées curvilignes :  $u^i = u'^i(u^1, u^2, \dots, u^n)$ .
2. Montrer que les  $n^2$  quantités  $\partial X_i / \partial u^k$  ne forment pas, en général, les composantes d'un tenseur.
3. Dans quel système de coordonnées les  $\partial X_i / \partial u^k$  forment-ils les composantes covariantes d'un tenseur ?
4. Les différentielles  $dX_i$  sont-elles les composantes d'un vecteur ?

## Solutions

1. Les composantes covariantes  $X_i$  d'un vecteur se transforment selon la formule (1.5.24), soit, compte tenu de (4.3.16) :

$$X_i = A_i'^k X'_k = \partial_i u'^k X'_k$$

La dérivation de cette dernière expression nous donne :

$$\frac{X_i}{\partial u^j} = \frac{X'_k}{\partial u^j} \partial_i u'^k + X'_k \partial_{ji} u'^k = \frac{X'_k}{\partial u'^l} \partial_j u'^l \partial_i u'^k + X'_k \partial_{ji} u'^k$$

2. Cette dernière formule montre que les  $n^2$  quantités  $\partial X_i / \partial u^j$  ne se transforment pas, en général, comme un tenseur d'ordre deux par suite du terme supplémentaire  $X'_k \partial_{ji} u'^k$ .
3. Ce terme supplémentaire sera nul si les coordonnées curvilignes  $u'^k$  sont des fonctions linéaires à coefficients constants des coordonnées  $u^j$ . En particulier, les  $\partial X_i / \partial u^j$  forment un tenseur d'ordre deux en coordonnées cartésiennes.
4. Les différentielles  $dX_i$  s'écrivent :

$$dX_i = \partial_i u'^k dX'_k + X'^k d(\partial_i u'^k)$$

Les  $dX_i$  ne se transforment pas comme les composantes d'un vecteur sauf dans le cas où les dérivées secondes  $\partial_{ji} u'^k$  sont nulles.

### Exercice 4.11

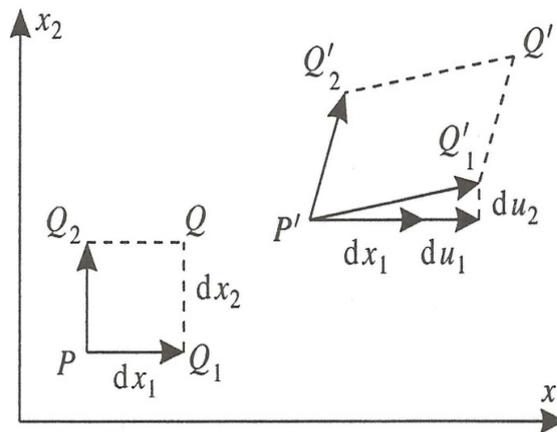


FIGURE 4.3

On étudie l'interprétation géométrique de petites déformations d'un corps. Pour simplifier, on considère un système à deux dimensions formé par une feuille plane extensible. Soit  $Ox_1x_2$  un référentiel cartésien fixe ;  $P$  est un point de la feuille qui, après déformation, vient en  $P'$  ;  $Q$  est un autre point, voisin de  $P$ , qui vient en  $Q'$  (Fig.4.3).

1. On pose  $\mathbf{PQ} = d\mathbf{M}$  et ce vecteur a pour composantes  $dx_1$  et  $dx_2$ . Après déformation, on a  $\mathbf{P'Q'} = d\mathbf{M'}$  ; les composantes de  $d\mathbf{M'}$  deviennent respectivement :  $dx_1 + du_1$ ,  $dx_2 + du_2$ . Les composantes des déplacements  $u_i$  sont des fonctions de  $x_1$  et  $x_2$ . Écrire les expressions des différentielles,  $du_1$  et  $du_2$ , en se limitant au premier ordre.
2. Quelle est la signification physique des quantités  $\mathbf{e}_{11} = \partial u_1 / \partial x_1$  et  $\mathbf{e}_{22} = \partial u_2 / \partial x_2$ .
3. Quelle est la signification physique de  $\mathbf{e}_{12} = \partial u_1 / \partial x_2$  et  $\mathbf{e}_{21} = \partial u_2 / \partial x_1$  pour de très faibles déformations.

4. Montrer que les  $e_{ij}$  forment les composantes d'un tenseur.
5. Dans le cas d'une rotation d'ensemble d'un angle  $\varphi$  très petit, de la feuille extensible, sans déformation, déterminer les composantes du tenseur  $e_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  en utilisant les résultats des questions (2) et (3).
6. Montrer que tout tenseur de rang deux peut se mettre sous la forme d'une somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique.
7. Les composantes  $e_{ij}$  ne sont pas toutes nulles lors d'une rotation d'ensemble de la feuille, sans déformation, ainsi que le montre la question (4). Comment peut-on former un tenseur  $S_{ij}$  qui décrit uniquement la déformation ?

### Solutions

1. Les déformations  $u_i$  étant des fonctions de  $x_1$  et  $x_2$ , on a :

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = e_{ij} dx_j \quad ; \quad i, j = 1, 2 \quad (4.4.2)$$

avec  $e_{ij} = \partial u_i / \partial x_j$ .

2. Lors d'un déplacement parallèlement à l'axe  $Ox_1$ , les relations (4.4.2) se réduisent à :

$$du_1 = e_{11} dx_1 \quad (4.4.3)$$

Par conséquent,  $e_{11}$  mesure l'allongement du matériau par unité de longueur, en chaque point  $P$ , dans la direction  $Ox_1$ . De même,  $e_{22}$  représente l'allongement par unité de longueur dans le sens  $Ox_2$ .

3. L'angle de rotation  $\theta$  de  $PQ_1$ , qui vient en  $P'Q'_1$  est donné par :

$$\tan \theta = \frac{du_2}{dx_1 + du_1} \quad (4.4.4)$$

Comme on ne considère que de très faibles déformations,  $u_1$  et  $u_2$  sont petits par rapport à  $x_1$  et  $x_2$ . On peut donc écrire :

$$\theta \simeq \frac{du_2}{dx_1} = e_{21} \quad (4.4.5)$$

En conséquence,  $e_{21}$  mesure l'angle de rotation de  $PQ_1$ , lors de la déformation. De même  $e_{12}$  mesure l'angle de la rotation de  $PQ_2$ .

4. Dans l'exercice (4.10), on montre que les  $e_{ij}$  forment bien les composantes d'un tenseur d'ordre deux, en coordonnées cartésiennes.
5. D'après la signification géométrique des  $e_{ij}$  donnée aux questions (2) et (3), on a :

$$e_{11} = e_{22} = 0 \quad ; \quad e_{12} = \varphi \quad ; \quad e_{21} = -\varphi \quad (4.4.6)$$

Les composantes du tenseur  $e_{ij}$  ne sont pas toutes nulles lors d'une rotation d'ensemble sans déformation ; on obtient alors un tenseur antisymétrique.

6. Formons des tenseurs respectivement symétriques et antisymétriques à partir des composantes du tenseur  $T_{ij}$  ; il vient :

$$\begin{aligned} \text{tenseur symétrique : } S_{ij} &= (1/2) (T_{ij} + T_{ji}) \\ \text{tenseur antisymétrique : } A_{ij} &= (1/2) (T_{ij} - T_{ji}) \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Le tenseur  $T_{ij}$  s'écrit alors comme la somme :

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij} \quad (4.4.8)$$

7. Le tenseur  $e_{ij}$  comporte à la fois des termes de déformation et de rotation d'ensemble. Écrivons-le sous la forme d'une somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique :

$$e_{ij} = \frac{e_{ij} + e_{ji}}{2} + \frac{e_{ij} - e_{ji}}{2} = S_{ij} + A_{ij} \quad (4.4.9)$$

On note que le tenseur calculé à la question (5) est antisymétrique et correspond à une petite rotation d'ensemble. De manière générale, une rotation peut être représentée par un vecteur axial qui équivaut à un tenseur antisymétrique de rang deux.

La partie symétrique  $S_{ij}$  du tenseur  $e_{ij}$  donnée par (4.4.9) caractérise ainsi seulement la déformation. Sous forme développée, le tenseur  $S_{ij}$  a pour matrice :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & \frac{1}{2}(e_{12} + e_{21}) \\ \frac{1}{2}(e_{12} + e_{21}) & e_{22} \end{bmatrix} \quad (4.4.10)$$

Les composantes situées sur la diagonale principale,  $S_{11}$  et  $S_{22}$ , sont les allongements ou dilatations. Les composantes  $S_{12} = S_{21}$  mesurent la déformation de cisaillement ou glissements.

## Exercice 4.12

La déformation d'une feuille plane extensible a été étudiée au cours de l'exercice précédent 4.11 dont nous reprenons les notations. Le tenseur des déformations pures comporte quatre composantes :

$$e_{11} = \epsilon_1 \quad ; \quad e_{22} = \epsilon_2 \quad ; \quad \frac{1}{2}(e_{12} + e_{21}) = g_1 = g_2 \quad (4.4.11)$$

Si on se donne *a priori* quatre fonctions, celles-ci n'ont aucune raison de représenter les déformations d'un milieu continu. Par exemple, pour un tel milieu, des éléments initialement voisins doivent en effet le rester ; il ne peut également se

produire de trous ou d'apports de matière; etc. En conséquence, les composantes doivent vérifier entre elles des conditions de compatibilité qu'on va déterminer dans cet exercice.

1. Écrire les expressions explicites des composantes du tenseur en fonction des dérivées des déplacements  $u_1$  et  $u_2$ .
2. Le tenseur antisymétrique  $A_{ij}$  est défini par :

$$A_{ij} = \frac{1}{2} (e_{ij} - e_{ji}) \quad ; \quad i, j = 1, 2 \quad (4.4.12)$$

Écrire les dérivées partielles  $\partial u_2 / \partial x_1$  et  $\partial u_1 / \partial x_2$  en fonction des composantes  $g_1$  et  $A_{12}$ .

3. En déduire la relation entre les dérivées partielles secondes des composantes du tenseur des déformations.

### **Solutions**

1. Utilisant les notations de l'exercice 4.11, on a :

$$\epsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad ; \quad \epsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad ; \quad g_1 = g_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \quad (4.4.13)$$

2. Le tenseur  $A_{ij}$  a pour expression explicite de ses composantes :

$$A_{11} = A_{22} = 0 \quad ; \quad A_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = -A_{21} \quad (4.4.14)$$

Combinant les relations (4.4.12) et (4.4.13), on obtient :

$$g_1 + A_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad ; \quad g_1 - A_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad (4.4.15)$$

3. Les composantes du tenseur étant des fonctions continues de  $x_1$  et  $x_2$ , les relations (4.4.12) et (4.4.14) permettent d'écrire :

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial \epsilon_1}{\partial x_2} = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{12}}{\partial x_1} \quad ; \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial \epsilon_2}{\partial x_1} = \frac{\partial g_1}{\partial x_2} - \frac{\partial A_{12}}{\partial x_2} \quad (4.4.16)$$

Dérivant les expressions (4.4.15) respectivement par rapport à  $x_1$  et  $x_2$ , il vient :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_1}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 A_{12}}{\partial x_2 \partial x_1} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \epsilon_2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 A_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (4.4.17)$$

La somme de ces deux dernières équations donne :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_2}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_2 \partial x_1} \quad (4.4.18)$$

C'est la condition de compatibilité des composantes du tenseur des déformations pour une feuille plane extensible.

# Chapitre 5

## Analyse tensorielle

### 5.1 Symboles de Christoffel

#### 5.1.1 Tenseurs sur un espace ponctuel

À chaque point  $M$  d'un espace ponctuel  $\varepsilon_n$ , on peut associer un repère naturel  $(M, \mathbf{e}_i)$  dont les vecteurs  $\mathbf{e}_i = \partial_i \mathbf{M}$  constituent une base de l'espace vectoriel associé  $E_n$ .

Réciproquement, démontrons qu'à toute base de  $E_n$ , on peut associer une base naturelle de  $\varepsilon_n$  en choisissant un système de coordonnées curvilignes convenable. Pour cela, considérons une base quelconque  $\mathbf{e}'_k$  de  $E_n$  et soit  $(M, \mathbf{e}_i)$  un repère naturel de  $\varepsilon_n$  correspondant à un système de coordonnées  $u^i$ . Les vecteurs  $\mathbf{e}'_k$  s'écrivent dans le repère  $(M, \mathbf{e}_i)$  :  $\mathbf{e}'_k = A_k^i \mathbf{e}_i$ . Effectuons un changement de coordonnées  $u'_k$  tel que :  $u^i = A_k^i u'^k$  ; il correspond alors aux nouvelles coordonnées  $u'_k$  la nouvelle base naturelle  $\mathbf{e}'_k$  telle que :

$$\mathbf{e}'_k = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u'^k} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial u'^k} = \mathbf{e}_i A_k^i \quad (5.1.1)$$

En conclusion, l'ensemble des bases naturelles, en un même point  $M$  de  $\varepsilon_n$ , est identique à l'ensemble des bases de l'espace vectoriel  $E_n$  associé à  $\varepsilon_n$ . Par suite, les tenseurs construits sur les vecteurs de base de l'espace vectoriel  $E_n$  vont pouvoir également être définis sur les bases naturelles  $\mathbf{e}_i$  de l'espace ponctuel  $\varepsilon_n$ .

Pour cela, attachons à chaque point  $M$  de  $\varepsilon_n$ , un tenseur euclidien défini par ses composantes relatives au repère naturel au point  $M$  d'un système de coordonnées  $y^i$ . On dira que l'on s'est donné un champ de tenseurs dans ce système de coordonnées curvilignes.

On appellera **tenseur au point  $M$  sur  $\varepsilon_n$** , tout tenseur sur l'espace vectoriel associé  $E_n$ , attaché à un point  $M$  de  $\varepsilon_n$ . En particulier un vecteur de  $E_n$  est également appelé vecteur sur  $\varepsilon_n$ .

Si  $(\mathbf{e}_i)$  est une base arbitraire de  $\varepsilon_n$ , associée à un système de coordonnées  $u^i$  et

définie en un point  $M$  quelconque de  $\varepsilon_n$ , tout tenseur  $\mathbf{U}$  sur  $\varepsilon_n$  peut être explicité à l'aide de cette base. Par exemple, un tenseur d'ordre trois, s'écrit :

$$\mathbf{U} = u^{ijk} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) \quad (5.1.2)$$

et l'on dit que les quantités  $u^{ijk}$  constituent les **composantes naturelles** du tenseur  $\mathbf{U}$  au point  $M$ , en coordonnées définissant les vecteur  $\mathbf{e}_i$ . Si  $\varepsilon_n$  est un espace ponctuel pré-euclidien, tous les développements que l'on a vus précédemment sur les tenseurs pré-euclidiens s'appliquent aux tenseurs sur l'espace  $\varepsilon_n$ .

### 5.1.2 Problèmes fondamentaux de l'analyse tensorielle

L'étude des champs de tenseurs constitue, pour le physicien, l'essentiel de l'analyse tensorielle. Le tenseur générique  $\mathbf{U}$  de ce champ est une fonction du point  $M$  et on le note  $\mathbf{U}(M)$ . Si le tenseur  $\mathbf{U}$  est une fonction seulement de  $M$ , le champ considéré est appelé un champ fixe. Si  $\mathbf{U}$  est, en outre, une fonction d'un ou plusieurs paramètres  $\alpha$  autres que les coordonnées de  $M$ , on dit que ce champ est variable et on le note  $\mathbf{U}(M, \alpha)$ .

Les différentes opérations algébriques sur les tenseurs  $\mathbf{U}(M)$  associés à un même point  $M$  ne soulèvent pas de difficulté particulière. La dérivée de  $\mathbf{U}(M)$  par rapport à un seul paramètre  $\alpha$  conduit à utiliser les résultats classiques relatifs à la dérivation des vecteurs.

**Variation des repères naturels** - Une difficulté nouvelle apparaît lorsqu'on cherche à calculer la dérivée d'un tenseur  $\mathbf{U}(M)$  par rapport aux coordonnées curvilignes. En effet, les composantes du tenseur sont définies en chaque point  $M$  par rapport à un repère naturel qui varie d'un point à un autre. Par suite, le calcul de la variation élémentaire  $\mathbf{U}(M') - \mathbf{U}(M)$ , lorsqu'on passe d'un point  $M$  à un point infiniment voisin  $M'$  ne peut se faire que si l'on a recours à une même base. Pour pouvoir comparer l'un à l'autre les tenseurs  $\mathbf{U}(M')$  et  $\mathbf{U}(M)$ , on est amené à étudier comment varie un repère naturel, pour un système de coordonnées donné, lorsqu'on passe d'un point  $M$  au point infiniment voisin  $M'$ .

Pour un système de coordonnées curvilignes  $u^i$  donné d'un espace ponctuel  $\varepsilon_n$ , un problème fondamental de l'analyse tensorielle consiste donc à déterminer, par rapport au repère naturel  $(M, \mathbf{e}_i)$  au point  $M$ , le repère naturel  $(M', \mathbf{e}'_i)$  au point voisin  $M'$ .

D'une part, le point  $M'$  sera parfaitement défini par rapport à  $M$  si l'on détermine le vecteur  $d\mathbf{M}$  tel que  $\mathbf{M}\mathbf{M}' = d\mathbf{M}$ . Pour des coordonnées curvilignes  $u^k$ , la décomposition d'un vecteur élémentaire  $d\mathbf{M}$  est donnée par la relation (4.3.3), soit :

$$d\mathbf{M} = \partial_k \mathbf{M} du^k = \mathbf{e}_k du^k \quad (5.1.3)$$

Les quantités  $du^k$  sont les composantes contravariantes du vecteur  $d\mathbf{M}$  sur la base naturelle  $\mathbf{e}_k$ .

D'autre part, les vecteurs  $\mathbf{e}'_i$  vont pouvoir être déterminés en calculant les variations élémentaires  $d\mathbf{e}_i$  des vecteurs  $\mathbf{e}_i$ , par rapport au repère naturel  $(M, \mathbf{e}_i)$ , lorsqu'on passe de  $M$  à  $M'$ ; on a alors  $\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_i + d\mathbf{e}_i$ . Le calcul des vecteurs  $d\mathbf{e}_i$  reste alors le problème essentiel à résoudre. Nous allons tout d'abord étudier un exemple de ce type de calcul en coordonnées sphériques.

**Comparaison des vecteurs entre eux** - Un aspect plus général du problème étudié ci-dessus est le suivant : pour que comparer deux espaces vectoriels correspondant à des points différents ait un sens, il faut choisir une règle. Dans le cas présent des espaces ponctuels, il y en a une qui s'impose naturellement : deux vecteurs  $\mathbf{U}(M)$  et  $\mathbf{U}(M')$  sont dits égaux s'ils se déduisent l'un de l'autre par une translation dans  $\varepsilon_n$ .

Après avoir résolu le problème du calcul des variations élémentaires  $d\mathbf{e}_i$  des vecteurs d'un repère naturel, nous verrons que l'étude des variations élémentaires par translation des vecteurs et des tenseurs nécessite l'introduction d'un nouveau type de dérivée.

### 5.1.3 Symboles de Christoffel en coordonnées sphériques

Étudions le problème de la variation du repère naturel en coordonnées sphériques. Pour cela, reprenons l'expression des vecteurs  $\mathbf{e}_i$  de la base naturelle en coordonnées sphériques, donnés par les relations (4.3.5) et (4.3.7) :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \partial_1 \mathbf{M} = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_2 &= \partial_2 \mathbf{M} = r \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + r \cos \theta \sin \varphi \mathbf{j} - r \sin \theta \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_3 &= \partial_3 \mathbf{M} = -r \sin \theta \sin \varphi \mathbf{i} + r \sin \theta \cos \varphi \mathbf{j}\end{aligned}\quad (5.1.4)$$

avec  $\mathbf{e}_1^0 = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{e}_2^0 = \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{e}_3^0 = \mathbf{k}$

**Différentielles des vecteurs de la base naturelle** - Les vecteurs de base  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  du repère fixe cartésien étant constants en module et en direction, la différentielle du vecteur  $\mathbf{e}_i$  s'écrit :

$$d\mathbf{e}_1 = (\cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{j}) d\theta + (-\sin \theta \sin \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \cos \varphi \mathbf{j}) d\varphi \quad (5.1.5)$$

On remarque que les termes entre parenthèses représentent respectivement les vecteurs  $\mathbf{e}_2/r$  et  $\mathbf{e}_3/r$ , d'où :

$$d\mathbf{e}_1 = (d\theta/r) \mathbf{e}_2 + (d\varphi/r) \mathbf{e}_3 \quad (5.1.6)$$

On calcule de même, en différentiant les vecteurs  $\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3$  :

$$\begin{aligned}d\mathbf{e}_2 &= (-r d\theta) \mathbf{e}_1 + (dr/r) \mathbf{e}_2 + (\cotan \theta d\varphi) \mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_3 &= (-r \sin^2 \theta d\varphi) \mathbf{e}_1 + (-\sin \theta \cos \theta d\varphi) \mathbf{e}_2 + ((dr/r) + \cotan \theta d\theta) \mathbf{e}_3\end{aligned}\quad (5.1.7)$$

Les différentielles  $d\mathbf{e}_i$  sont ainsi décomposés sur la base naturelle  $\mathbf{e}_i$ . Si l'on note  $\omega^k_i$  les composantes contravariantes du vecteur  $d\mathbf{e}_i$ , celui-ci s'écrit :

$$d\mathbf{e}_i = \omega^k_i \mathbf{e}_k \quad (5.1.8)$$

Les composantes  $\omega^k_i$  des vecteurs  $d\mathbf{e}_i$  sont des formes différentielles (combinaisons linéaires de différentielles). On a, par exemple :

$$\omega^2_1 = d\theta/r \quad ; \quad \omega^3_3 = (dr/r) + \cotan \theta d\theta \quad (5.1.9)$$

**Symboles de Christoffel de deuxième espèce** - Si l'on note de manière générale  $u^i$  les coordonnées sphériques, on a :

$$u^1 = r \quad ; \quad u^2 = \theta \quad ; \quad u^3 = \varphi \quad (5.1.10)$$

Les différentielles des coordonnées sont alors notées :  $du^1 = dr$ ,  $du^2 = d\theta$ ,  $du^3 = d\varphi$  et les composantes  $\omega^j_i$  s'écrivent alors de manière générale :

$$\omega^j_i = \Gamma^j_{ki} du^k \quad (5.1.11)$$

où les quantités  $\Gamma^j_{ki}$  sont des fonctions de  $r, \theta, \varphi$  qui vont être explicitement obtenues en identifiant chaque composante  $\omega^j_i$ . Par exemple, la composante  $\omega^3_3$  s'écrit avec les notations de la relation (5.1.11) :

$$\omega^3_3 = (dr/r) + \cotan \theta d\theta = \Gamma^3_{13} du^1 + \Gamma^3_{23} du^2 + \Gamma^3_{33} du^3 \quad (5.1.12)$$

Identifiant les coefficients des différentielles, il vient :

$$\Gamma^3_{13} = (1/r) \quad ; \quad \Gamma^3_{23} = \cotan \theta \quad ; \quad \Gamma^3_{33} = 0 \quad (5.1.13)$$

En procédant de même avec les neuf composantes  $\omega^j_i$ , on obtient les vingt sept termes  $\Gamma^j_{ki}$ . Pour un système de coordonnées curvilignes quelconques, ces quantités  $\Gamma^j_{ki}$  sont appelés **les symboles de Christoffel de deuxième espèce**.

#### 5.1.4 Définition des symboles de Christoffel

**Symboles de deuxième espèce** - Pour un espace ponctuel  $\varepsilon_n$  et un système de coordonnées curvilignes  $u^i$  quelconque, la différentielle  $d\mathbf{e}_i = \omega^k_i \mathbf{e}_k$  des vecteurs  $\mathbf{e}_i$  de la base naturelle s'écrit sur cette base :

$$d\mathbf{e}_i = \omega^j_i \mathbf{e}_j = \Gamma^j_{ki} du^k \mathbf{e}_j \quad (5.1.14)$$

où les  $n^3$  symboles de Christoffel de deuxième espèce sont des fonctions des coordonnées curvilignes  $u^i$ .

On vient de voir, sur l'exemple des coordonnées sphériques, qu'un calcul direct permet, par identification, d'obtenir explicitement les quantités  $\Gamma^j_{ki}$ . On va voir qu'on peut également obtenir l'expression de ces quantités en fonction des composantes  $g_{ij}$  du tenseur fondamental. Si l'on se donne l'élément linéaire d'un espace ponctuel, on pourra ainsi déterminer les symboles de Christoffel.

**Symboles de première espèce** - Le calcul des quantités  $\Gamma_{ki}^j$  en fonction des  $g_{ij}$  va nous amener à introduire d'autres symboles de Christoffel. Pour cela, écrivons les composantes covariantes, notées  $\omega_{ji}$ , des différentielles  $d\mathbf{e}_i$ , soit :

$$\omega_{ji} = d\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (5.1.15)$$

On remarque que, initialement, l'indice  $j$  dans la notation  $\omega_{ji}$  correspond à la  $j$ -ième composante contravariante du vecteur  $d\mathbf{e}_i$  par rapport au vecteur  $\mathbf{e}_j$  et que l'on abaisse cet indice  $j$  dans l'expression de la composante covariante  $\omega_{ji}$  du vecteur  $d\mathbf{e}_i$  sur le vecteur de base  $\mathbf{e}_j$ .

Les composantes covariantes sont également des combinaisons linéaires des différentielles  $du^i$  que l'on peut écrire sous la forme :

$$\omega_{ji} = \Gamma_{jki} du^k \quad (5.1.16)$$

Les quantités  $\Gamma_{jki}$  sont appelées **les symboles de Christoffel de première espèce**.

Puisque les composantes covariantes sont liées aux composantes contravariantes par les relations :

$$\omega_{ji} = g_{jl} \omega_{li} = g_{jl} \Gamma_{lki}^l du^k \quad (5.1.17)$$

On obtient l'expression liant les symboles de Christoffel de chaque espèce :

$$\Gamma_{jki} = g_{jl} \Gamma_{lki}^l \quad (5.1.18)$$

Inversement, en écrivant l'expression des composantes contravariantes en fonction des covariantes, on obtient :

$$\Gamma_{ki}^j = g^{jl} \Gamma_{lki} \quad (5.1.19)$$

Connaissant les symboles de Christoffel d'une espèce, on peut obtenir ceux de l'autre espèce par les relations précédentes.

**Notation des symboles de Christoffel** - Diverses notations sont utilisées pour représenter les symboles de Christoffel. Les plus usuelles sont les suivantes :

*Symboles de première espèce* :  $\Gamma_{kji} = [ji, k]$

*Symboles de deuxième espèce* :  $\Gamma_{ki}^j = \{k^j i\}$

### 5.1.5 Détermination des symboles de Christoffel

**Relation entre symboles de première espèce** - Considérons un espace ponctuel  $\varepsilon_n$  et soit un élément linéaire  $ds^2$  donné de cet espace :

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (5.1.20)$$

Le calcul des  $n^3$  symboles de Christoffel s'effectue à partir des  $n(n+1)/2$  quantités  $g_{ij}$ . Partant de la définition de ces quantités :

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (5.1.21)$$

on obtient par différentiation de cette dernière relation :

$$dg_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot d\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \cdot d\mathbf{e}_i \quad (5.1.22)$$

L'expression des différentielles  $d\mathbf{e}_j = \omega^l_j \mathbf{e}_l$  nous donne :

$$dg_{ij} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_l) \omega^l_j + (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_l) \omega^l_i = g_{il} \omega^l_j + g_{jl} \omega^l_i \quad (5.1.23)$$

L'expression  $g_{il} \omega^l_j$  représente la composante covariante  $\omega_{ij}$  du vecteur  $d\mathbf{e}_j$ , soit compte tenu des composantes contravariantes en fonction des symboles de Christoffel :

$$\omega_{ij} = g_{il} \omega^l_j = g_{il} \Gamma^l_{kj} du^k \quad (5.1.24)$$

Substituant la relation (5.1.18) dans l'expression (5.1.24), on obtient :

$$\omega_{ij} = \Gamma_{ikj} du^k \quad (5.1.25)$$

La différentielle  $dg_{ij}$  donnée par la relation (5.1.23) s'écrit alors compte tenu de (5.1.25) :

$$dg_{ij} = \omega_{ij} + \omega_{ji} = (\Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki}) du^k \quad (5.1.26)$$

D'autre part, la différentielle de la fonction  $g_{ij}$  s'écrit également :

$$dg_{ij} = (\partial_k g_{ij}) du^k \quad (5.1.27)$$

d'où en identifiant les coefficients des différentielles  $du^k$  dans ces deux dernières expressions :

$$\Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki} = \partial_k g_{ij} \quad (5.1.28)$$

Puisqu'on a  $n(n+1)/2$  quantités  $g_{ij}$  et que  $k$  varie de 1 à  $n$ , le système d'équations donné par la relation (5.1.28) comporte  $n^2(n+1)/2$  équations.

**Relation entre les symboles de deuxième espèce** - L'intégrabilité de la différentielle  $d\mathbf{M} = du^j \mathbf{e}_j = du^j \partial_j \mathbf{M}$  nécessite que les dérivées secondes des vecteurs  $\mathbf{OM}$  de l'espace ponctuel  $\varepsilon_n$  soient indépendantes de l'ordre de dérivation, d'où :

$$\partial_{kj} \mathbf{M} = \partial_{jk} \mathbf{M} \quad (5.1.29)$$

On a d'autre part l'expression de la différentielle des vecteurs de la base naturelle sous la forme suivante, compte tenu de (5.1.14) :

$$d\mathbf{e}_i = (\partial_k \mathbf{e}_i) du^k = \omega^j{}_i \mathbf{e}_j = (\Gamma^j{}_{ki} \mathbf{e}_j) du^k \quad (5.1.30)$$

On en déduit l'expression de la dérivée première :  $\partial_k \mathbf{e}_i = \Gamma^j{}_{ki} \mathbf{e}_j$ . La dérivée seconde du vecteur  $\mathbf{OM}$  s'écrit alors :

$$\partial_{kj} \mathbf{M} = \partial_k (\partial_j \mathbf{M}) = \partial_k \mathbf{e}_j = \Gamma^l{}_{kj} \mathbf{e}_l \quad (5.1.31)$$

On obtient de même :

$$\partial_{jk} \mathbf{M} = \partial_j \mathbf{e}_k = \Gamma^l{}_{jk} \mathbf{e}_l \quad (5.1.32)$$

Les relations (5.1.31) et (5.1.32) devant être égales, il vient en identifiant les composantes relatives au même vecteur  $\mathbf{e}_l$  :

$$\Gamma^l{}_{kj} = \Gamma^l{}_{jk} \quad (5.1.33)$$

Compte tenu de l'expression des symboles de Christoffel de première espèce  $\Gamma_{ikj} = g_{il} \Gamma^l{}_{kj}$  et de la relation (5.1.33), on obtient les relations entre symboles de première espèce :

$$\Gamma_{ikj} = \Gamma_{ijk} \quad (5.1.34)$$

**Les symboles de Christoffel de première espèce sont symétriques par rapport à leurs indices extrêmes et ceux de deuxième espèce le sont par rapport à leurs indices inférieurs.**

**Systèmes d'équations** - Pour chaque valeur de  $i$ , la relation (5.1.34) donne, par suite de la symétrie des symboles de Christoffel,  $n(n-1)/2$  équations indépendantes, soit au total  $n^2(n-1)/2$  équations. Ajoutées aux  $n^2(n+1)/2$  équations (5.1.28), on obtient un système de  $n^3$  équations algébriques où les inconnues sont les  $n^3$  symboles de Christoffel.

La solution explicite de ces équations s'obtient aisément en utilisant la relation (5.1.34) dans l'expression (5.1.28), ce qui donne :

$$\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jki} = \partial_k g_{ij} \quad (5.1.35)$$

puis en effectuant une permutation circulaire sur les indices, on obtient :

$$\Gamma_{jki} + \Gamma_{kij} = \partial_i g_{jk} \quad (5.1.36)$$

$$\Gamma_{kij} + \Gamma_{ijk} = \partial_j g_{ki} \quad (5.1.37)$$

Effectuons la somme des relations (5.1.35) et (5.1.36) et retranchons l'expression (5.1.37), il vient :

$$\Gamma_{jki} = \frac{1}{2} (\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki}) \quad (5.1.38)$$

C'est l'expression des symboles de Christoffel de première espèce en fonction des dérivées partielles des composantes  $g_{ij}$  du tenseur fondamental. On obtient ceux de deuxième espèce à partir des relations (5.1.19) et (5.1.38), soit :

$$\Gamma_{kj}^i = g^{il} \Gamma_{lkj} = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_k g_{jl} + \partial_j g_{lk} - \partial_l g_{kj}) \quad (5.1.39)$$

**Les expressions (5.1.38) et (5.1.39) permettent le calcul effectif des symboles de Christoffel pour une métrique donnée. Lorsque les quantités  $g_{ij}$  sont données à priori, on peut ainsi étudier les propriétés de l'espace ponctuel défini par la donnée de cette métrique, ce qui est le cas des espaces de Riemann.**

### 5.1.6 Changement de base

**Les notations utilisées pour les composantes  $\omega^j_i$  des vecteurs de base naturelles ainsi que pour les symboles de Christoffel  $\Gamma^i_{kj}$  ne doivent pas inciter à considérer ces quantités comme les composantes de tenseurs.** Nous allons voir en effet qu'un changement de base ne conduit pas aux formules de transformations des composantes des tenseurs.

Considérons pour cela deux systèmes de coordonnées curvilignes,  $u^i$  et  $u'^j$ , correspondant à des bases naturelles  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{e}'_j$ , liées entre elles par les relations :

$$(a) \ \mathbf{e}_i = A_i^l \mathbf{e}'_l \ ; \ (b) \ \mathbf{e}'_l = A_l^j \mathbf{e}_j \quad (5.1.40)$$

La différentielle du vecteur  $\mathbf{e}_i$  s'écrit :

$$d\mathbf{e}_i = A_i^l d\mathbf{e}'_l + dA_i^l \mathbf{e}'_l \quad (5.1.41)$$

Écrivons d'autre part l'expression des différentielles des vecteurs  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{e}'_l$  sur chacune des bases naturelles, il vient :

$$(a) \ d\mathbf{e}_i = \omega^j_i \mathbf{e}_j \ ; \ (b) \ d\mathbf{e}'_l = \omega'^m_l \mathbf{e}'_m \quad (5.1.42)$$

Identifiant les relations (5.1.41) et (5.1.42)(a) et substituant les relations (5.1.42)(b) et (5.1.40)(b), on obtient :

$$\omega^j_i \mathbf{e}_j = A_i^l \omega'^m_l \mathbf{e}'_m + dA_i^l \mathbf{e}'_l = (A_i^l \omega'^m_l A_m^j + dA_i^l A_l^j) \mathbf{e}_j \quad (5.1.43)$$

Par identification des coefficients d'un même vecteur  $\mathbf{e}_j$ , on obtient :

$$\omega^j_i = A_i^l A_m^j \omega'^m_l + A_l^j dA_i^l \quad (5.1.44)$$

C'est la formule de transformation des composantes  $\omega^j_i$  lors d'un changement de base qui ne correspond pas à celle des composantes d'un tenseur. En exprimant les quantités qui figurent dans la relation (5.1.44) en fonction des symboles de Christoffel, il vient :

$$\Gamma^j_{ki} du^k = A_i^l A_m^j \Gamma^m_{hl} du^h + A_l^j dA_i^l \quad (5.1.45)$$

On a d'autre part les expressions suivantes des différentielles :

$$dA_i^l = \partial_k A_i^l du^k ; \quad du^h = A_k^h du^k \quad (5.1.46)$$

Reportant les expressions (5.1.46) dans la relation (5.1.45) et en identifiant les coefficients des différentielles  $du^k$ , il vient :

$$\Gamma_{ki}^j = A_i^l A_m^j A_k^h \Gamma_{hl}^m + A_l^j \partial_k A_i^l \quad (5.1.47)$$

C'est la formule de changement de base des symboles de Christoffel qui diffère par un terme supplémentaire  $A_l^j \partial_k A_i^l$  de celle des composantes d'un tenseur.

### 5.1.7 Vecteurs réciproques

Calculons l'expression des variations élémentaires  $d\mathbf{e}^k$  des vecteurs  $\mathbf{e}^k$ , réciproques des vecteurs d'une base naturelle  $\mathbf{e}_i$ . La relation (1.5.27) entre vecteurs réciproques :

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^k = \delta_{ik} \quad (5.1.48)$$

nous donne par différentiation :

$$d(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^k) = \mathbf{e}_i \cdot d\mathbf{e}^k + \mathbf{e}^k \cdot d\mathbf{e}_i = 0 \quad (5.1.49)$$

La relation précédente s'écrit alors en utilisant l'expression  $d\mathbf{e}_i = \omega^j{}_i \mathbf{e}_j$  :

$$\mathbf{e}_i \cdot d\mathbf{e}^k = -\mathbf{e}^k \cdot (\omega^j{}_i \mathbf{e}_j) = -\omega^j{}_i \delta_{kj} = -\omega^k{}_i \quad (5.1.50)$$

Les quantités  $-\omega^k{}_i$  constituent donc les composantes covariantes du vecteur  $d\mathbf{e}^k$  sur la base  $\mathbf{e}_i$ . Par suite, ce sont les composantes contravariantes sur la base réciproque  $\mathbf{e}^i$ . On a donc finalement :

$$d\mathbf{e}^k = -\omega^k{}_i \mathbf{e}^i \quad (5.1.51)$$

### 5.1.8 Équation des géodésiques

Nous avons dit précédemment que la comparaison de deux vecteurs doit s'effectuer par translation dans  $\varepsilon_n$ , c'est-à-dire par déplacement le long d'une droite. Les droites de  $\varepsilon_n$  vont constituer une généralisation de la notion de droite en géométrie classique.

Par définition, les droites de  $\varepsilon_n$ , passant par deux points  $M_0$  et  $M_1$ , réalisent l'extrémum de la longueur des différents chemins possibles joignant  $M_0$  à  $M_1$ . Les droites constituent les géodésiques de l'espace ponctuel  $\varepsilon_n$ .

Soit une courbe  $M_0 C M_1$  de l'espace  $\varepsilon_n$  définie par les équations paramétriques :

$$u^i = u^i(t) \quad (5.1.52)$$

La longueur de la courbe  $M_0 C M_1$  est donnée par l'intégrale :

$$l = \int_{M_0}^{M_1} \left( g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right)^{1/2} dt \quad (5.1.53)$$

Considérons à présent une autre courbe infiniment voisine  $M_0 C' M_1$ , passant par les deux points  $M_0$  et  $M_1$ . Nous allons montrer que si  $M_0 C M_1$  est une géodésique passant par les points  $M_0$  et  $M_1$ , elle est extrémale de toutes les autres courbes  $M_0 C' M_1$ .

Pour cela, choisissons comme paramètre arbitraire l'abscisse curviligne sur les courbes  $M_0 C' M_1$ . Les équations paramétriques des courbes sont alors :

$$u^i = u^i(s) \quad (5.1.54)$$

et l'intégrale (5.1.53) s'écrit avec ce nouveau paramétrage :

$$l = \int_{M_0}^{M_1} \left( g_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right)^{1/2} ds \quad (5.1.55)$$

Posons :  $u'^i = du^i/ds$  et notons  $f(u^k, u'^j)$  le carré de l'intégrande ; dans ces conditions, on a :

$$f(u^k, u'^j) = g_{ij} u'^i u'^j = 1 \quad (5.1.56)$$

car les  $u'^j$  sont les cosinus directeurs du vecteur unitaire porté par la tangente à la courbe considérée. Les courbes  $M_0 C' M_1$  qui permettent de rendre maximale ou minimale l'intégrale (5.1.55) sont définies par les équations dites d'Euler du calcul des variations qui, dans le cas présent, se réduisent à :

$$\frac{\partial f}{\partial u^i} - \frac{d}{ds} \frac{\partial f}{\partial u'^i} = 0 \quad (5.1.57)$$

La relation (5.1.56) nous donne pour expression de l'équation d'Euler :

$$\frac{d}{ds} (g_{ij} u'^j) - \frac{1}{2} \partial_i g_{jk} u'^j u'^k = g_{ij} u'^j + (\partial_k g_{ij} - \frac{1}{2} \partial_i g_{jk}) u'^j u'^k = 0 \quad (5.1.58)$$

Après développement des dérivées et utilisation de l'expression des symboles de Christoffel de première espèce, on obtient :

$$g_{ij} \frac{du'^j}{ds} + \Gamma_{ijk} u'^j u'^k = 0 \quad (5.1.59)$$

La multiplication contractée de la relation précédente par  $g^{il}$  nous donne, avec  $g_{ij} g^{il} = \delta_{jl}$  et  $g^{il} \Gamma_{ijk} = \Gamma_{jk}^l$  :

$$\frac{d^2 u^l}{ds^2} + \Gamma_{jk}^l \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0 \quad (5.1.60)$$

On obtient le système d'équations qui définissent les géodésiques, c'est-à-dire les droites de  $\varepsilon_n$ . Ces dernières constituent donc les extrémales de l'intégrale qui mesure la longueur d'un arc de courbe joignant deux points donnés dans  $\varepsilon_n$ .

## 5.2 Dérivée covariante

L'expression des lois de la Physique doit être indépendante du système de coordonnées par rapport auquel ces lois, mises sous forme d'équations, sont écrites. En ce sens, le calcul tensoriel, appliqué à la Physique, trouve pleinement sa justification puisqu'il vise précisément à exprimer des propriétés intrinsèques, c'est-à-dire indépendantes du système de coordonnées utilisé pour les expliciter. On obtient ainsi des relations qui seules sont susceptibles d'exprimer une certaine réalité physique.

Par suite, le physicien cherchera à exprimer les propriétés des systèmes physiques sous forme tensorielle. Ceci conduit, éventuellement, à définir et utiliser en Physique de nouvelles entités mathématiques qui soient précisément des tenseurs.

### 5.2.1 Transport parallèle

En coordonnées orthogonales ou obliques, les différentielles  $dv_i$  des composantes covariantes  $v_i$  d'un vecteur, constituent également les composantes d'un vecteur ; les dérivées partielles  $\partial v_i / \partial x^k$  forment un tenseur d'ordre deux. Il n'en est plus de même en coordonnées curvilignes quelconques, ainsi que nous l'avons vu au cours de l'exercice (4.10). Examinons les raisons de ces propriétés tensorielles ou non.

**Translation** - Pour déterminer la différence entre deux vecteurs  $\mathbf{V}(M)$  et  $\mathbf{V}(M')$  placés respectivement en deux points  $M$  et  $M'$  infiniment voisins, il faut au préalable transporter parallèlement à lui-même le vecteur  $\mathbf{V}(M')$  du point  $M'$  au point  $M$ . Lors de cette translation, ou **transport parallèle**, les composantes de  $\mathbf{V}(M')$  ne varient dans le cas de coordonnées rectilignes (les repères naturels étant identiques en chaque point) et les  $dv_i$  sont évidemment les composantes du vecteur  $[\mathbf{V}(M') - \mathbf{V}(M)]$ .

Par contre, en coordonnées curvilignes, le transport parallèle de  $\mathbf{V}(M')$  au point  $M$ , c'est-à-dire sa translation le long d'une droite joignant  $M$  à  $M'$ , va modifier, en général, la valeur de ses composantes dans le repère naturel. C'est ce que l'on voit aisément, par exemple, pour un champ de vecteurs en coordonnées polaires représenté sur la figure(5.1).

Notons  $\mathbf{V}_M(M')$  le vecteur  $\mathbf{V}(M')$  transporté parallèlement au point  $M$ . Le vecteur :

$$\mathbf{V}_M(M') - \mathbf{V}(M) = d\mathbf{V} \quad (5.2.1)$$

est appelé la différentielle absolue du vecteur  $\mathbf{V}$ . Les composantes de  $d\mathbf{V}$

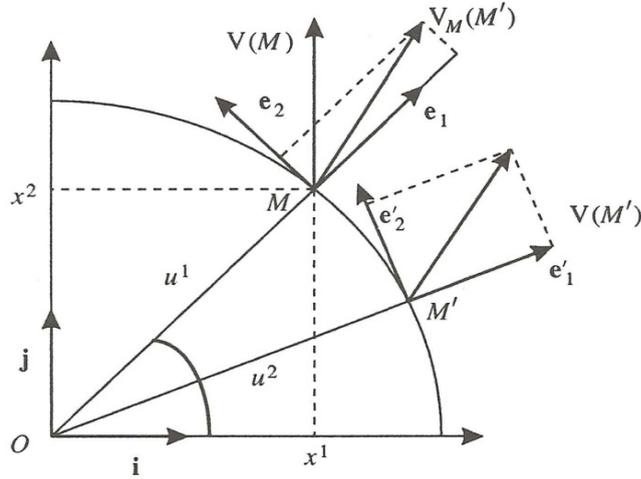


FIGURE 5.1

dans le repère naturel du point  $M$ , ne coïncideront pas, en général, avec les différences des composantes de  $\mathbf{V}(M')$  et  $\mathbf{V}(M)$ . Nous allons déterminer l'expression des composantes de  $d\mathbf{V}$ .

**Variation le long d'une géodésique** - Nous avons vu que dans l'espace euclidien, les géodésiques sont des droites. Un transport parallèle consiste donc à se déplacer le long d'une géodésique et nous allons étudier les variations d'un vecteur au cours d'un tel déplacement. L'équation des droites, pour un système de coordonnées curvilignes quelconque  $y^i$  de l'espace ponctuel  $\varepsilon_n$  est donnée par la relation (5.1.60) :

$$\frac{d^2 y^i}{ds^2} + \Gamma_{kj}^i \frac{dy^k}{ds} \frac{dy^j}{ds} = 0 \quad (5.2.2)$$

où  $s$  est l'abscisse d'un point de la droite comptée sur celle-ci à partir d'une origine donnée.

Le vecteur de composantes contravariantes  $dy^k/ds$  est un vecteur unitaire  $\mathbf{n}$  porté par la droite ; en d'autres termes, les quantités  $dy^k/ds$  sont les cosinus directeurs de la droite dans chacun des repères naturels  $(M, \mathbf{e}_i)$ . Considérons un vecteur  $\mathbf{V}$  de  $\varepsilon_n$  de composantes covariantes  $v_i$  et formons le produit scalaire des vecteurs  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{n}$  ; on a la quantité scalaire suivante :

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = v_i \frac{dy^i}{ds} \quad (5.2.3)$$

Lors d'un déplacement le long de la géodésique, d'un point  $M$  à un point infiniment voisin  $M'$ , le scalaire subit la variation :

$$d\left(v_i \frac{dy^i}{ds}\right) = dv_k \frac{dy^k}{ds} + v_i \frac{d^2 y^i}{ds^2} ds \quad (5.2.4)$$

Remplaçons dans cette dernière expression, d'une part, la différentielle  $dv_k$  par son développement :

$$dv_k = \partial_j v_k \frac{dy^j}{ds} ds \quad (5.2.5)$$

et d'autre part, la dérivée seconde  $d^2 y^i / ds^2$  par son expression tirée de l'équation des géodésiques (5.2.2). On obtient :

$$d\left(v_i \frac{dy^i}{ds}\right) = (\partial_j v_k - v_i \Gamma_{kj}^i) \frac{dy^k}{ds} \frac{dy^j}{ds} ds \quad (5.2.6)$$

**Différentielle absolue** - L'expression (5.2.6) peut encore s'écrire :

$$d(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) = (\partial_j v_k - v_i \Gamma_{kj}^i) dy^j \frac{dy^k}{ds} = dv_k \frac{dy^k}{ds} \quad (5.2.7)$$

où l'on a posé :

$$dv_k = (\partial_j v_k - v_i \Gamma_{kj}^i) dy^j \quad (5.2.8)$$

La variation du produit scalaire  $d(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})$  est égale à la différence des produits scalaires du vecteur  $\mathbf{n}$  par les vecteurs  $\mathbf{V}(M')$  et  $\mathbf{V}(M)$ . Le produit scalaire  $\mathbf{V}(M') \cdot \mathbf{n}$  étant indépendant de tout repère, on a :

$$\mathbf{V}(M') \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V}_M(M') \cdot \mathbf{n} \quad (5.2.9)$$

d'où :

$$d(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{V}_M(M') \cdot \mathbf{n} - \mathbf{V}(M) \cdot \mathbf{n} = [\mathbf{V}_M(M') - \mathbf{V}(M)] \cdot \mathbf{n} = d\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \quad (5.2.10)$$

Le vecteur  $d\mathbf{V}$  est la **différentielle absolue du vecteur  $\mathbf{V}$** , définie par (5.2.1), et il a pour composantes covariantes, selon la relation (5.2.7), les quantités  $dv_k$ . Ces dernières sont appelées les différentielles absolues des composantes covariantes du vecteur  $\mathbf{V}$ .

**Remarque** - En coordonnées curvilignes, la différentiation ordinaire d'un produit dans la formule (5.2.4) peut être utilisée car elle concerne une grandeur scalaire. Par contre, la différentiation ordinaire d'un vecteur  $\mathbf{V}$  exprimé dans un repère naturel,  $\mathbf{V} = v^i \mathbf{e}_i$ , ne peut se faire a priori sous la forme classique  $d\mathbf{V} = v^i d\mathbf{e}_i + dv^i \mathbf{e}_i$  par suite de la variation des bases naturelles d'un point à un autre. Nous verrons cependant que cette dernière formule s'applique pour la différentielle absolue d'un vecteur.

## 5.2.2 Dérivée covariante d'un vecteur

**Composantes covariantes** - Les quantités entre parenthèses qui apparaissent dans l'expression (5.2.8) et que l'on note  $\nabla_j v_k$ , à savoir :

$$\nabla_j v_k = \partial_j v_k - v_i \Gamma_{kj}^i \quad (5.2.11)$$

sont les composantes covariantes d'un tenseur du second ordre ainsi que nous allons le montrer.

Pour cela, partons des relations de transformation des composantes covariantes d'un vecteur lorsqu'on passe des coordonnées  $y^i$  aux coordonnées  $\bar{y}^k$ , soit :

$$\bar{v}_i = v_r \frac{\partial y^r}{\partial \bar{y}^i} = v_r \partial_i y^r \quad (5.2.12)$$

où  $\bar{v}_i$  représente une composante covariante de  $\mathbf{V}$  dans le système de coordonnées  $\bar{y}^k$ . La dérivation partielle par rapport à  $\bar{y}^i$  est notée par le symbole  $\partial_i$  et l'on a :

$$\partial_k \bar{v}_i = \partial_k v_r \partial_i y^r + v_r \bar{\partial}_{ki} y^r \quad (5.2.13)$$

On a l'expression suivante de la dérivée seconde :

$$\bar{\partial}_{ki} y^r = \bar{\Gamma}_{ik}^s \partial_s y^r - \Gamma_{st}^r \partial_i y^s \partial_k y^t \quad (5.2.14)$$

où les symboles de Christoffel surlignés sont relatifs aux coordonnées  $\bar{y}^k$ .

**Démonstration :**

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y^r}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left( \frac{dy^r}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial y^r}{\partial \bar{y}^i} \frac{d\bar{y}^i}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial y^r}{\partial \bar{y}^i} \right) \frac{d\bar{y}^i}{ds} + \frac{\partial y^r}{\partial \bar{y}^i} \frac{d^2 \bar{y}^i}{ds^2} \\ &= \frac{1}{ds} \frac{\partial}{\partial \bar{y}^k} \left( \frac{\partial y^r}{\partial \bar{y}^i} \right) d\bar{y}^k \frac{d\bar{y}^i}{ds} + \frac{\partial y^r}{\partial \bar{y}^i} \frac{d^2 \bar{y}^i}{ds^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{y}^k} \left( \frac{\partial y^r}{\partial \bar{y}^i} \right) \frac{d\bar{y}^k}{ds} \frac{d\bar{y}^i}{ds} - \frac{\partial y^r}{\partial \bar{y}^s} \bar{\Gamma}_{ik}^s \frac{d\bar{y}^i}{ds} \frac{d\bar{y}^k}{ds} \\ &= -\Gamma_{st}^r \frac{dy^s}{ds} \frac{dy^t}{ds} \\ &= -\Gamma_{st}^r \frac{\partial y^s}{\partial \bar{y}^i} \frac{d\bar{y}^i}{ds} \frac{\partial y^t}{\partial \bar{y}^k} \frac{d\bar{y}^k}{ds} = -\Gamma_{st}^r \partial_i y^s \partial_k y^t \frac{d\bar{y}^i}{ds} \frac{d\bar{y}^k}{ds} \\ &= \partial_{ki} y^r \frac{d\bar{y}^k}{ds} \frac{d\bar{y}^i}{ds} - \partial_s y^r \bar{\Gamma}_{ik}^s \frac{d\bar{y}^k}{ds} \frac{d\bar{y}^i}{ds} \\ \implies \partial_{ki} y^r &= \bar{\Gamma}_{ik}^s \partial_s y^r - \Gamma_{st}^r \partial_i y^s \partial_k y^t \end{aligned}$$

La relation (5.2.13) peut alors s'écrire :

$$\partial_k \bar{v}_i = \frac{\partial v_r}{\partial y^s} \partial_i y^r \partial_k y^s + \bar{\Gamma}_{ik}^t \bar{v}_t - \Gamma_{rs}^t v_t \partial_i y^r \partial_k y^s \quad (5.2.15)$$

Cette dernière expression peut être réarrangée sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \bar{y}^k} - \bar{\Gamma}_{ik}^t \bar{v}_t = \left( \frac{\partial v_r}{\partial y^s} - \Gamma_{rs}^t v_t \right) \partial_i y^r \partial_k y^s \quad (5.2.16)$$

Cette relation, vérifiant la loi de changement de coordonnées des composantes covariantes d'un tenseur d'ordre deux, montre que **les quantités  $\nabla_j v_k$  sont les**

**composantes covariantes d'un tenseur d'ordre deux qui est appelé la dérivée covariante du vecteur  $\mathbf{V}$ .**

**Champ uniforme** - Si toutes composantes  $\nabla_j v_k$  de la dérivée covariante sont nulles, les variations du produit scalaire  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$  sont nulles et par suite les différents vecteurs du champ sont équipollents entre eux. On est en présence d'un champ uniforme.

On remarque que, dans ce cas, les dérivées partielles  $\partial_j v_k$  ne sont pas nulles et qu'il en est de même pour la différentielle  $dv_k$ . Ceci résulte du fait que les repères naturels, pour un système de coordonnées curvilignes quelconque, ne sont pas identiques en chaque point.

L'égalité par translation de deux vecteurs se traduit par le fait que le tenseur dérivée covariante doit être identiquement nul pour cette translation.

**Composantes mixtes** - Les composantes mixtes du tenseur dérivée covariante sont données par :

$$g^{ik} \nabla_j v_k = g^{ik} (\partial_j v_k - v_r \Gamma_{kj}^r) \quad (5.2.17)$$

Remplaçons dans l'expression précédente le terme  $g^{ik} \partial_j v_k$  tiré de la relation suivante :

$$\partial_j (g^{ik} v_k) = v_k \partial_j g^{ik} + g^{ik} \partial_j v_k = \partial_j v^i \quad (5.2.18)$$

et utilisant l'expression suivante obtenue à partir des relations (5.1.19) et (5.1.28) :

$$\partial_j g^{ik} = -g^{il} \Gamma_{jl}^k - g^{kl} \Gamma_{jl}^i \quad (5.2.19)$$

on obtient :

$$g^{ik} \nabla_j v_k = \partial_j v^i - v_k \partial_j g^{ik} - g^{ik} v_r \Gamma_{kj}^r = \partial_j v^i + v_k g^{kl} \Gamma_{jl}^i \quad (5.2.20)$$

Les deux derniers termes de l'équation précédente font apparaître les composantes contravariantes  $v^l$  du vecteur  $\mathbf{V}$ . Les composantes mixtes du tenseur dérivée covariante, notées  $\nabla_j v^i$ , sont donc données par :

$$\nabla_j v^i = \partial_j v^i + v^l \Gamma_{jl}^i \quad (5.2.21)$$

**Linéarité de la dérivée covariante** - Considérons le vecteur  $\mathbf{T} = \mathbf{U} + \mathbf{V}$  de composantes contravariantes  $t^k = u^k + v^k$ ; sa dérivée covariante est donnée par :

$$\begin{aligned} \nabla_j t^k &= \partial_j t^k + \Gamma_{ij}^k t^i = \partial_j (u^k + v^k) + \Gamma_{ij}^k (u^i + v^i) \\ &= (\partial_j u^k + \Gamma_{ij}^k u^i) + (\partial_j v^k + \Gamma_{ij}^k v^i) \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

On voit apparaître les dérivées covariantes des vecteurs  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$ , d'où :

$$\nabla_j t^k = \nabla_j u^k + \nabla_j v^k \quad (5.2.23)$$

La dérivée covariante d'une somme de vecteurs est égale à la somme des dérivées covariantes. On obtient de même pour un vecteur  $\mathbf{T} = \lambda \mathbf{U}$ , où  $\lambda$  est une constante :

$$\nabla_j (\lambda u^k) = \lambda \nabla_j u^k \quad (5.2.24)$$

### 5.2.3 Dérivée covariante d'un tenseur

Les calculs et définitions précédentes s'étendent sans difficulté à des tenseurs d'ordre quelconque. Montrons le sur un exemple en considérant les composantes  $u_{st}^r$  d'un tenseur du troisième ordre.

Choisissons pour cela trois champs de vecteurs uniformes de composantes respectives  $a_r$ ,  $b^s$ ,  $c^t$  et formons le produit contracté  $u_{st}^r a_r b^s c^t$ . On obtient un scalaire dont la variation élémentaire s'écrit :

$$\begin{aligned} d(u_{st}^r a_r b^s c^t) &= (\partial_k u_{st}^r a_r b^s c^t + u_{st}^r \partial_k a_r b^s c^t \\ &+ u_{st}^r a_r \partial_k b^s c^t + u_{st}^r a_r b^s \partial_k c^t) dy^k \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

Les champs de vecteurs  $a_r$ ,  $b^s$ ,  $c^t$  étant uniformes, les dérivées covariantes de leurs composantes sont nulles et l'on obtient donc pour expression de leurs dérivées partielles :

$$\partial_k a_r = a_i \Gamma_{kr}^i ; \quad \partial_k b^s = -b^i \Gamma_{ik}^s ; \quad \partial_k c^t = -c^i \Gamma_{ik}^t \quad (5.2.26)$$

Reportant ces expressions dans la relation (5.2.25) donnant la variation élémentaire, il vient :

$$d(u_{st}^r a_r b^s c^t) = (\partial_k u_{st}^r + u_{st}^i \Gamma_{ki}^r - u_{it}^r \Gamma_{ks}^i - u_{si}^r \Gamma_{kt}^i) a_r b^s c^t dy^k \quad (5.2.27)$$

Cette relation met en évidence le système tensoriel suivant :

$$\nabla_k u_{st}^r = \partial_k u_{st}^r + u_{st}^i \Gamma_{ki}^r - u_{it}^r \Gamma_{ks}^i - u_{si}^r \Gamma_{kt}^i \quad (5.2.28)$$

qui généralise les expressions de la dérivée covariante d'un vecteur. Par définition, les quantités  $\nabla_k u_{st}^r$  sont les dérivées covariantes des composantes mixtes  $u_{st}^r$  du tenseur  $\mathbf{U}$ .

On voit apparaître dans cette expression la règle de formation de la dérivée covariante des composantes d'un tenseur d'ordre quelconque. À la dérivée partielle classique d'une composante, dans le cas  $u_{st}^r$ , s'ajoute un terme de la forme  $u_{st}^i \Gamma_{ki}^r$  pour chaque indice contravariant et se retranche un terme de la forme  $u_{it}^r \Gamma_{ks}^i$  pour chaque indice covariant, la sommation dans chacun de ces termes s'effectuant sur l'indice considéré.

La dérivation covariante se réduit à la dérivation partielle ordinaire pour un système de coordonnées cartésiennes.

On démontre la propriété de tensorialité de la dérivée covariante des composantes d'un tenseur de façon analogue à celle déjà utilisée pour la dérivée covariante des composantes d'un tenseur.

## 5.2.4 Propriétés de la dérivée covariante d'un tenseur

**Linéarité** - Les propriétés de linéarité de la dérivée covariante des composantes d'un tenseur résulte de la linéarité de la dérivée partielle et celles des termes supplémentaires. On a par exemple, pour un tenseur  $w_{st}^r = u_{st}^r + v_{st}^r$  :

$$\nabla_k w_{st}^r = \nabla_k u_{st}^r + \nabla_k v_{st}^r \quad (5.2.29)$$

$$\nabla_k (\lambda u_{st}^r) = \lambda \nabla_k u_{st}^r \quad (5.2.30)$$

**Dérivée covariante d'un produit tensoriel** - Considérons par exemple le produit tensoriel suivant :

$$w_{st}^r = u_s^r v_t \quad (5.2.31)$$

La dérivée covariante de ce produit tensoriel s'écrit :

$$\nabla_k w_{st}^r = \nabla_k (u_s^r v_t) = (\partial_k u_s^r + u_s^i \Gamma_{ki}^r - u_i^r \Gamma_{ks}^i) v_t + (\partial_k v_t - v_i \Gamma_{tk}^i) u_s^r \quad (5.2.32)$$

On voit apparaître les dérivées covariantes de chacun des tenseurs  $u_s^r$  et  $v_t$  ; on a donc la relation :

$$\nabla_k (u_s^r v_t) = v_t \nabla_k u_s^r + u_s^r \nabla_k v_t \quad (5.2.33)$$

On obtient pour la dérivée covariante du produit tensoriel une règle de dérivation analogue à celle de la dérivée partielle ordinaire du produit de deux fonctions.

**Contraction** - La dérivation covariante et la contraction sont deux opérations permutable. Montrons cette propriété par exemple sur le tenseur  $u_{st}^r$ . La dérivée covariante de ce tenseur est donnée par la relation (5.2.28), à savoir :

$$\nabla_k u_{st}^r = \partial_k u_{st}^r + u_{st}^i \Gamma_{ki}^r - u_{it}^r \Gamma_{ks}^i - u_{si}^r \Gamma_{kt}^i \quad (5.2.34)$$

Effectuons une contraction sur les indices  $r$  et  $t$  en faisant  $t = r$  ; ceci revient à calculer les quantités  $\delta_r^t \nabla_k u_{st}^r$ .

Après contraction, dans le second membre de la relation (5.2.34), le deuxième et le quatrième terme, qui ne diffèrent que par les noms des indices muets, sont identiques et ils s'annulent ; la relation (5.2.34) se réduit alors à :

$$\nabla_k u_{sr}^r = \partial_k u_{sr}^r - u_{ir}^r \Gamma_{ks}^i \quad (5.2.35)$$

On obtient une expression identique en contractant d'abord les composantes, soit  $u_{sr}^r = \delta_r^t u_{st}^r$ , puis en calculant la dérivée covariante  $\nabla_k u_{sr}^r$  des composantes contractées. On a donc :

$$\delta_r^t (\nabla_k u_{st}^r) = \nabla_k (\delta_r^t u_{st}^r) \quad (5.2.36)$$

**La contraction et la dérivation covariante sont donc des opérations permutable.**

**Produit contracté** - On va en déduire que la règle (5.2.33) de dérivation covariante du produit tensoriel peut s'appliquer à un produit contracté.

Soit par exemple, les composantes d'un tenseur formées par le produit contracté  $u_k^{ij} v_{mi}$ . Utilisons la propriété de permutation (5.2.36) ainsi que la règle de dérivation covariante (5.2.33) ; on obtient :

$$\begin{aligned}\nabla_r (u_k^{ij} v_{mi}) &= \delta_i^q \nabla_r (u_k^{ij} v_{mq}) = \delta_i^q (\nabla_r u_k^{ij}) v_{mq} + \delta_i^q u_k^{ij} (\nabla_r v_{mq}) \\ &= (\nabla_r u_k^{ij}) v_{mi} + u_k^{ij} (\nabla_r v_{mi})\end{aligned}\quad (5.2.37)$$

### 5.2.5 Dérivée covariante seconde d'un vecteur

Considérons un vecteur  $\mathbf{V}$  de composantes covariantes  $v_i$ . Les quantités données par (5.2.11), à savoir :

$$\nabla_j v_i = \partial_j v_i - v_l \Gamma_{ji}^l \quad (5.2.38)$$

sont les composantes covariantes de la dérivée covariante du vecteur  $\mathbf{V}$ . Calculons la dérivée covariante seconde de ce vecteur, par rapport à une coordonnée curviligne  $y^k$ .

Appliquons la règle de formation de la dérivée covariante d'un tenseur aux composantes covariantes  $\nabla_j v_i$ , il vient :

$$\nabla_k (\nabla_j v_i) = \partial_k (\nabla_j v_i) - \Gamma_{ik}^r (\nabla_j v_r) - \Gamma_{jk}^r (\nabla_r v_i) \quad (5.2.39)$$

Substituant l'expression (5.2.38) dans la relation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}\nabla_k (\nabla_j v_i) &= \partial_{kj} v_i - (\partial_k \Gamma_{ji}^l) v_l - \Gamma_{ji}^l \partial_k v_l \\ &\quad - \Gamma_{ik}^r \partial_j v_r + \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^l v_l - \Gamma_{jk}^r \partial_r v_i + \Gamma_{jk}^r \Gamma_{ri}^l v_l\end{aligned}\quad (5.2.40)$$

## 5.3 Différentielle absolue

### 5.3.1 Différentielle absolue d'un vecteur

**Composantes contravariantes** - La formule (5.2.8) donne l'expression des composantes covariantes de la différentielle absolue d'un vecteur. Si  $du_l$  sont les composantes covariantes d'un vecteur  $d\mathbf{U}$ , ses composantes contravariantes sont données par :  $du^k = g^{kl} du_l$ . Effectuons ce calcul dans l'autre sens ; partons de l'expression à priori de  $du^k$  et montrons que l'on retrouve l'expression (5.2.8) des composantes covariantes. Pour cela, effectuons la multiplication contractée de la dérivée covariante d'un vecteur  $\nabla_j u^k$  par la différentielle  $dy^k$  ; on obtient la somme suivante :

$$du^k = \nabla_j u^k dy^j = (\partial_j u^k + u^i \Gamma_{ij}^k) dy^j \quad (5.3.1)$$

qui est appelée **la différentielle absolue de la composante contravariante  $u^k$  du vecteur  $\mathbf{U}$** .

Les différentielles  $dy^j$  étant les composantes contravariantes d'un vecteur quelconque  $d\mathbf{M}$  et les quantités  $\nabla_j u^k$ , les composantes d'un tenseur d'ordre deux, les produits contractés  $du^k$  sont donc les composantes contravariantes d'un tenseur d'ordre un. Ce dernier est la différentielle absolue du vecteur  $\mathbf{U}$  et son expression sur un repère naturel  $(M, \mathbf{e}_i)$  est :

$$d\mathbf{U} = du^k \mathbf{e}_k = (\partial_j u^k + u^i \Gamma_{ij}^k) dy^j \mathbf{e}_k \quad (5.3.2)$$

**Propriétés de la différentielle absolue** - L'expression (5.3.2) fait apparaître la différentielle ordinaire de la composante  $u^k$ , soit :

$$\partial_j u^k dy^j = du^k \quad (5.3.3)$$

ainsi que la différentielle  $d\mathbf{e}_i$ ; on a en effet selon la relation (5.1.14) :

$$\Gamma_{ij}^k dy^j \mathbf{e}_k = d\mathbf{e}_i \quad (5.3.4)$$

La différentielle absolue peut donc s'écrire :

$$d\mathbf{U} = du^k \mathbf{e}_k + u^k d\mathbf{e}_k \quad (5.3.5)$$

Le premier terme  $du^k \mathbf{e}_k$  représente la différentielle classique d'un vecteur dans un repère fixe. Le second terme  $u^k d\mathbf{e}_k$  résulte de la variation des repères lorsqu'on passe d'un point à un autre et du mode de comparaison, par translation, entre vecteurs.

**Contraction** - La différentiation absolue est permutable avec la contraction des indices. Pour le montrer, considérons l'exemple du tenseur  $u_{st}^r$  pour lequel on a la propriété (5.2.36) de permutation de la dérivation covariante et de la contraction, à savoir :

$$\delta_r^t (\nabla_k u_{st}^r) = \nabla_k (\delta_r^t u_{st}^r) \quad (5.3.6)$$

Ces quantités sont les dérivées covariantes des composantes  $u_{st}^r = \delta_r^t u_{st}^r$ ; la multiplication contractée de ces quantités par  $dy^k$  donne les différentielles absolues des composantes  $u_{sr}^r$ , soit :

$$\delta_r^t (du_{st}^r) = d(\delta_r^t u_{st}^r) \quad (5.3.7)$$

ce qui montre que **la différentiation absolue est permutable avec la contraction des indices**.

La dérivée covariante d'un produit contracté nous a donné la relation (5.2.37), à savoir :

$$\nabla_r (u_k^{ij} v_{mi}) = (\nabla_r u_k^{ij}) v_{mi} + u_k^{ij} (\nabla_r v_{mi}) \quad (5.3.8)$$

La multiplication contractée de ces quantités par  $dy^r$  donne les différentielles absolues des composantes  $u_k^{ij} v_{mi}$ , soit :

$$d(u_k^{ij} v_{mi}) = (du_k^{ij}) v_{mi} + u_k^{ij} (dv_{mi}) \quad (5.3.9)$$

ce qui montre que la formule de différentiation absolue du produit tensoriel s'étend à un produit contracté.

**Composantes covariantes** - La règle de différentiation absolue (5.3.5) est valable quelque soit le système donné de coordonnées curvilignes. En particulier, l'expression du vecteur  $\mathbf{U}$  sur la base réciproque  $\mathbf{e}^k$  s'écrit :

$$\mathbf{U} = u_k \mathbf{e}^k \quad (5.3.10)$$

où les quantités  $u_k$  sont les composantes contravariantes de  $\mathbf{U}$  dans cette base. Par suite, la relation (5.3.5) donne pour expression de la différentielle absolue :

$$d\mathbf{U} = du_k \mathbf{e}^k + u_j d\mathbf{e}^j \quad (5.3.11)$$

Compte tenu de l'expression de la différentielle de  $\mathbf{e}^k$  donnée par (5.1.51), à savoir :

$$d\mathbf{e}^j = -\omega^j_k \mathbf{e}^k \quad (5.3.12)$$

On obtient pour la différentielle absolue du vecteur  $\mathbf{U}$  :

$$d\mathbf{U} = (du_k - u_j \omega^j_k) \mathbf{e}^k \quad (5.3.13)$$

Les quantités  $du_k = (du_k - u_j \omega^j_k)$  constituent les composantes covariantes, par rapport à la base  $\mathbf{e}_i$ , de la différentielle absolue du vecteur  $\mathbf{U}$ . On retrouve la formule (5.2.8) en développant la différentielle  $du^k$  et en introduisant les symboles de Christoffel à la place des  $\omega^j_k$ .

### 5.3.2 Dérivée absolue le long d'une courbe

La notion de différentielle absolue  $du^k$  de la composante d'un vecteur conduit à définir la dérivée absolue d'un vecteur le long d'une courbe. Considérons pour cela une courbe  $\Gamma(t)$ , de paramètre  $t$ , de l'espace  $\varepsilon_n$  et un champ de vecteurs quelconque  $\mathbf{U}$  défini en chaque point de  $\varepsilon_n$ . Pour une variation élémentaire  $dt$  du paramètre  $t$ , on passe, le long de la courbe  $\Gamma(t)$ , d'un point  $M$  à un point  $M'$  infiniment voisin.

La notion de dérivée d'un vecteur le long d'une courbe se généralise en introduisant le tenseur suivant :

$$\frac{D u^k}{dt} = \frac{du^k}{dt} + \Gamma_{rs}^k u^r \frac{dy^s}{dt} \quad (5.3.14)$$

Cette dérivée est appelée **la dérivée absolue de la composante  $u^k$  le long de la courbe  $\Gamma(t)$** .

Pour un système de coordonnées cartésiennes, tous les symboles de Christoffel sont nuls et la dérivée absolue coïncide avec la dérivée ordinaire. On a les mêmes propriétés pour les dérivées absolues que pour les différentielles absolues.

**Exemple : Vecteur accélération** - Considérons le cas d'un point mobile  $M$ , fonction du temps  $t$  dans l'espace ponctuel  $\varepsilon_n$ . Les coordonnées curvilignes de ce point sont des fonctions du temps  $y^i(t)$ . Par rapport à un repère fixe auquel on rapporte  $\varepsilon_n$ , le vecteur  $d\mathbf{M}/dt$  peut être considéré comme vecteur vitesse de  $M$ , soit :  $\mathbf{v} = d\mathbf{M}/dt$  dont les composantes contravariantes, par rapport au repère naturel  $(M, \mathbf{e}_i)$ , sont :

$$v^i = \frac{dy^i}{dt} \quad (5.3.15)$$

L'accélération est, pour un système de coordonnées cartésiennes, égale à la dérivée du vecteur prise le long de la courbe suivie par le point mobile. On prendra alors, pour un système de coordonnées curvilignes, l'accélération égale, par définition, à la dérivée absolue du vecteur  $\mathbf{v}$  prise le long de la trajectoire.

Par suite, les composantes contravariantes  $a^k$  de l'accélération  $\mathbf{a}$  sont :

$$a^k = \frac{Dv^k}{dt} = \frac{dv^k}{dt} + \Gamma_{rs}^k v^r \frac{dy^s}{dt} \quad (5.3.16)$$

Remplaçons  $v^k$  par  $dy^k/dt$ , on obtient l'expression des composantes contravariantes de  $\mathbf{a}$  sous la forme :

$$a^k = \frac{d^2 y^k}{dt^2} + \Gamma_{rs}^k \frac{dy^r}{dt} \frac{dy^s}{dt} \quad (5.3.17)$$

Si  $a^k = 0$ , la courbe parcourue par un mobile est une droite et l'on retrouve alors l'équation des géodésiques.

### 5.3.3 Différentielle absolue d'un tenseur

**Différentielle absolue des composantes d'un tenseur** - Effectuons le produit contracté de la dérivée covariante  $\nabla_k u_{st}^r$  par la différentielle  $dy^k$ ; on obtient les composantes mixtes, notées  $du_{st}^r$ , d'un tenseur d'ordre trois, soit :

$$du_{st}^r = \nabla_k u_{st}^r dy^k \quad (5.3.18)$$

Ces composantes  $du_{st}^r$  sont appelées les différentielles absolues des composantes  $u_{st}^r$  du tenseur  $\mathbf{U}$ .

Remplaçons les dérivées covariantes des composantes par leur expression (5.2.34); on obtient :

$$du_{st}^r = (\partial_k u_{st}^r + u_{st}^i \Gamma_{ki}^r - u_{it}^r \Gamma_{ks}^i - u_{si}^r \Gamma_{kt}^i) dy^k \quad (5.3.19)$$

Remarquons que la notation  $du_{st}^r$  serait plus précise si elle était notée  $(du)_{st}^r$  puisque les indices désignent à présent les composantes d'un nouveau tenseur différent du tenseur  $u_{st}^r$ .

**Différentielle absolue d'un tenseur** - Le tenseur ayant pour composantes les quantités  $du_{st}^r$  est appelé la différentielle absolue du tenseur  $\mathbf{U}$  et est noté  $d\mathbf{U}$ . Ce tenseur, d'ordre trois, se décompose sur une base sous la forme :

$$d\mathbf{U} = du_{st}^r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}^s \otimes \mathbf{e}^t \quad (5.3.20)$$

Par suite de la linéarité de la dérivée covariante d'un tenseur, on a les propriétés suivantes pour la différentielle absolue :

$$d(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = d\mathbf{U} + d\mathbf{V} ; \quad d(\lambda \mathbf{U}) = \lambda d\mathbf{U} \quad (5.3.21)$$

**Différentielle absolue d'un produit tensoriel** - Considérons le produit tensoriel  $\mathbf{W} = \mathbf{U} \otimes \mathbf{V}$  de composantes mixtes  $w_{st}^r = u_s^r v_t$ . La propriété (5.2.33) de la dérivée covariante des composantes d'un tenseur donne également pour la différentiation absolue des composantes :

$$d(u_s^r v_t) = v_t du_s^r + u_s^r dv_t \quad (5.3.22)$$

Les quantités  $d(u_s^r v_t)$  sont les composantes mixtes d'un tenseur d'ordre trois ; ce tenseur est la différentielle absolue  $d(\mathbf{U} \otimes \mathbf{V})$  qui s'écrit :

$$d(\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}) = (du_s^r) v_t \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}^s \otimes \mathbf{e}^t + u_s^r (dv_t) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}^s \otimes \mathbf{e}^t \quad (5.3.23)$$

Cette dernière relation fait apparaître la somme de produits tensoriels suivants :

$$d(\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}) = (du_s^r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}^s) \otimes (v_t \mathbf{e}^t) + (u_s^r \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}^s) \otimes (dv_t \mathbf{e}^t) \quad (5.3.24)$$

On obtient finalement la règle suivante donnant la différentielle absolue du produit tensoriel :

$$d(\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}) = d\mathbf{U} \otimes \mathbf{V} + \mathbf{U} \otimes d\mathbf{V} \quad (5.3.25)$$

Cette formule se généralise aisément pour des produits tensoriels quelconques ainsi que pour des sommes de produits tensoriels.

Considérons un tenseur d'ordre deux tel que  $\mathbf{U} = u^{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$  ; il peut être écrit comme la somme des produits tensoriels suivants :

$$\mathbf{U} = (u^{ij} \mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_j \quad (5.3.26)$$

Compte tenu des relations (5.3.25) et (5.3.21), la différentielle absolue de ce tenseur s'écrit :

$$d\mathbf{U} = (du^{ij} \mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_j + (u^{ij} \mathbf{e}_i) \otimes d\mathbf{e}_j \quad (5.3.27)$$

Utilisant la règle (5.3.5) de différentiation absolue des vecteurs, on obtient :

$$d\mathbf{U} = d(u^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = du^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + u^{ij} d\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + u^{ij} \mathbf{e}_i \otimes d\mathbf{e}_j \quad (5.3.28)$$

La formule précédente se généralise pour des tenseurs d'ordre quelconque en remarquant que tout tenseur peut s'écrire comme une somme de produits tensoriels et en itérant la formule (5.3.5) pour des produits tensoriels formés par un nombre quelconque de tenseurs.

### 5.3.4 Théorème de Ricci

La différentiation des composantes du tenseur fondamental  $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ , nous donne :

$$dg_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot d\mathbf{e}_j + d\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \omega^k_j \mathbf{e}_k + \omega^k_i \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j \quad (5.3.29)$$

d'où l'identité :

$$dg_{ij} = g_{ik} \omega^k_j + g_{jk} \omega^k_i \quad (5.3.30)$$

Explicitant les composantes  $\omega^k_j$  en fonction des symboles de Christoffel, il vient :

$$dg_{ij} = \partial_h g_{ij} dy^h = g_{ik} \Gamma^k_{jh} dy^h + g_{jk} \Gamma^k_{ih} dy^h \quad (5.3.31)$$

Identifiant les coefficients des différentielles  $dy^h$ , on obtient :

$$\partial_h g_{ij} = g_{ik} \Gamma^k_{jh} + g_{jk} \Gamma^k_{ih} \quad (5.3.32)$$

Les relations (5.3.32) constituent les identités de Ricci. Formons la différentielle absolue des composantes  $g_{ij}$  en utilisant la formule (5.3.18) et (5.3.19), soit :

$$dg_{ij} = dg_{ij} - \omega^k_j g_{ik} - \omega^k_i g_{jk} \quad (5.3.33)$$

La comparaison de cette dernière relation avec la formule (5.3.30) montre que l'on a :

$$dg_{ij} = 0 \quad (5.3.34)$$

**La différentielle absolue des composantes du tenseur fondamental est nulle : c'est le théorème de Ricci.**

### 5.3.5 Symboles de Christoffel contractés

On va utiliser le théorème de Ricci pour calculer l'expression des symboles de Christoffel contractés  $\Gamma^i_{ik}$  en fonction des  $g_{ij}$ . Dans ce but, utilisons la formule générale donnant les composantes covariantes de la dérivée covariante du tenseur d'ordre deux  $g_{ij}$  et écrivons que cette dérivée est nulle selon le théorème de Ricci :

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ik}^l g_{lj} - \Gamma_{jk}^l g_{il} = 0 \quad (5.3.35)$$

Effectuons la multiplication contractée de cette expression par  $g^{ij}$ , il vient en utilisant les relations  $g^{ij} g_{jl} = \delta_i^l$  :

$$g^{ij} \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ik}^l \delta_i^l - \Gamma_{jk}^l \delta_l^j = 0 \quad (5.3.36)$$

d'où la relation :

$$g^{ij} \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ik}^i - \Gamma_{jk}^j = 0 \quad (5.3.37)$$

Les quantités  $\Gamma_{ik}^i$  et  $\Gamma_{jk}^j$  représentant les mêmes sommes, par rapport aux indices muets  $i$  ou  $j$ , la relation précédente nous donne :

$$g^{ij} \partial_k g_{ij} = 2 \Gamma_{ik}^i \quad (5.3.38)$$

Soit  $g$  le déterminant des quantités  $g_{ij}$ . La dérivation du déterminant nous donne :

$$\partial_k g = g g_{ij} \partial_k g_{ij} \quad (5.3.39)$$

Les relations (5.3.38) et (5.3.39) nous donnent alors l'expression des symboles contractés de Christoffel sous la forme :

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2g} \partial_k g = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_k \sqrt{|g|} \quad (5.3.40)$$

## 5.4 Opérateurs différentiels

### 5.4.1 Vecteur gradient

Considérons un champ de scalaire défini en chaque point d'un espace ponctuel  $\varepsilon_n$  par une fonction  $F(y^1, y^2, \dots, y^n)$  des coordonnées curvilignes  $y^i$ .

**Dérivées partielles** - On va montrer que les dérivées partielles  $\partial_k F$  d'un champ de scalaires sont les composantes covariantes d'un vecteur. Pour cela, considérons un autre système de coordonnées curvilignes  $(y'^j)$  de  $\varepsilon_n$  où ce même champ de scalaires s'écrit :  $F(y^1, y^2, \dots, y^n) = F'(y'^1, y'^2, \dots, y'^n)$ . La dérivation partielle d'une fonction composée nous donne :

$$\frac{\partial F}{\partial y^j} = \frac{\partial F'}{\partial y'^i} \frac{\partial y'^i}{\partial y^j} \quad (5.4.1)$$

Les relations (4.3.14) et (4.3.15) montrent que les quantités  $\partial_j F$  se transforment comme les vecteurs de base ( $\mathbf{e}_i$ ) du repère naturel de  $\varepsilon_n$ . Les dérivées  $\partial_j F$  sont donc des quantités covariantes qui, pour  $j = 1, 2, \dots, n$ , constituent les composantes d'un tenseur d'ordre un.

**Définition du vecteur gradient** - Ce tenseur d'ordre un est appelé le vecteur gradient de  $F$ . On note ce vecteur  $\mathbf{grad} F$  et sa décomposition sur la base réciproque est donnée par :

$$\mathbf{grad} F = \partial_k F \mathbf{e}^k \quad (5.4.2)$$

Les composantes covariantes du vecteur gradient sont notées  $grad_k F$ , soit :

$$grad_k F = \partial_k F \quad (5.4.3)$$

Ses composantes contravariantes  $grad^i F$  sur la base  $(\mathbf{e}_i)$  sont données par :

$$grad^i F = g^{ik} \partial_k F \quad (5.4.4)$$

### 5.4.2 Rotationnel d'un champ de vecteurs

Soit un champ de vecteurs  $\mathbf{V}$  de composantes covariantes  $v_i$ . La dérivée covariante du vecteur  $\mathbf{V}$  a pour composantes covariantes les quantités données par la relation (5.2.11), à savoir :

$$\nabla_j v_i = \partial_j v_i - v_k \Gamma_{ji}^k \quad (5.4.5)$$

Échangeant les indices de cette dernière relation et remarquant que les symboles de Christoffel sont symétriques par rapport à leurs indices inférieurs, on obtient :

$$\nabla_i v_j = \partial_i v_j - v_k \Gamma_{ji}^k \quad (5.4.6)$$

Retranchons membre à membre les relations (5.4.5) et (5.4.6), il vient :

$$\nabla_j v_i - \nabla_i v_j = \partial_j v_i - \partial_i v_j \quad (5.4.7)$$

Les quantités figurant dans cette dernière relation représentent donc les composantes d'un nouveau tenseur appelé **tenseur rotationnel** du vecteur  $\mathbf{V}$ . C'est un tenseur antisymétrique que l'on note  $\mathbf{rot} \mathbf{V}$  et l'on a :

$$\mathbf{rot} \mathbf{V} = (\nabla_j v_i - \nabla_i v_j) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = (\mathbf{rot} \mathbf{V})_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (5.4.8)$$

**Vecteur rotationnel** - On a vu, au chapitre III, que parmi les  $n^2$  composantes d'un tenseur antisymétrique d'ordre  $n$ , celui-ci possède  $n(n-1)/2$  composantes strictes. Pour un espace à trois dimensions, et seulement dans ce cas, le nombre de composantes strictes est égal à la dimension de l'espace.

Dans le cas d'un espace euclidien  $\mathcal{E}_3$  rapporté à un système de coordonnées orthonormées, le vecteur formé à partir des composantes strictes du tenseur  $\mathbf{rot} \mathbf{V}$ , et ayant pour composantes :

$$(\mathbf{rot} \mathbf{V})_1 = \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 ; \quad (\mathbf{rot} \mathbf{V})_2 = \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 ; \quad (\mathbf{rot} \mathbf{V})_3 = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \quad (5.4.9)$$

constitue le vecteur rotationnel classique. C'est un exemple de vecteur adjoint d'un tenseur.

### 5.4.3 Divergence d'un champ de vecteurs

Soit un champ de vecteur  $\mathbf{V}$  dont la dérivée covariante est  $\nabla_k v^i$ . Par contraction du tenseur  $\nabla_k v^i$ , on obtient un scalaire  $\nabla_i v^i$  appelé **divergence** du vecteur  $\mathbf{V}$ . On note la divergence :

$$\mathbf{div} \mathbf{V} = \nabla_i v^i \quad (5.4.10)$$

L'expression développée de la dérivée covariante :

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + v^j \Gamma_{kj}^i \quad (5.4.11)$$

donne pour expression de la divergence :

$$\mathbf{div} \mathbf{V} = \partial_i v^i + v^j \Gamma_{ij}^i \quad (5.4.12)$$

L'expression du symbole de Christoffel contracté  $\Gamma_{ij}^i$ , donnée par la relation (5.3.40), permet d'écrire la divergence sous la forme :

$$\mathbf{div} \mathbf{V} = \partial_i v^i + \frac{v^i}{\sqrt{|g|}} \partial_i \sqrt{|g|} \quad (5.4.13)$$

Cette dernière expression peut être transformée en utilisant la relation suivante entre deux quantités différentiables  $a$  et  $b$  :

$$\frac{1}{a} d(ba) = db + \frac{b}{a} da \quad (5.4.14)$$

et en posant :  $a = \sqrt{|g|}$ ,  $b = v^i$  ; on obtient :

$$\mathbf{div} \mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (v^i \sqrt{|g|}) \quad (5.4.15)$$

Pour un système de coordonnées orthonormées,  $g = 1$ , on retrouve l'expression classique de la divergence :  $\mathbf{div} \mathbf{V} = \partial_i v^i$ .

### 5.4.4 Laplacien d'un champ de scalaires

On appelle laplacien d'un champ de scalaire défini par une fonction  $F(y^1, y^2, \dots, y^n)$  à valeurs scalaires, l'expression :

$$\Delta F = \mathbf{div} \mathbf{grad} F \quad (5.4.16)$$

L'expression du laplacien s'obtient à partir de la définition (5.4.10) de la divergence et des composantes contravariantes du gradient  $g^{ik} \partial_k F$ , on a :

$$\Delta F = \nabla_i (g^{ik} \partial_k F) \quad (5.4.17)$$

La propriété de permutation de la dérivée covariante avec le changement de variance par multiplication par  $g^{ij}$  et sommation, nous donne :

$$\Delta F = g^{ik} \nabla_i (\partial_k F) \quad (5.4.18)$$

Les quantités  $\nabla_i(\partial_k F)$  sont les composantes covariantes de la dérivée covariante du vecteur  $\mathbf{grad} F$ ; elles sont données par la relation (5.2.11), soit :

$$\nabla_i(\partial_k F) = \partial_{ik} F - \Gamma_{ik}^l \partial_l F \quad (5.4.19)$$

d'où l'expression du laplacien :

$$\Delta F = g^{ik} (\partial_{ik} F - \Gamma_{ik}^l \partial_l F) \quad (5.4.20)$$

On obtient également une expression du laplacien en reportant les composantes contravariantes de  $\mathbf{grad} F$  dans la relation (5.4.15), soit :

$$\Delta F = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} g^{ik} \partial_k F) \quad (5.4.21)$$

Pour un système de coordonnées orthonormées,  $g^{ik} = \delta^{ik}$ , on retrouve l'expression classique du laplacien :  $\Delta F = \partial_{kk} F$ .

## 5.5 Exercices résolus

### Exercice 5.1

On considère deux systèmes de coordonnées curvilignes tels que :

$$\bar{u}^i = \bar{u}^i(u^1, u^2, \dots, u^n) \quad ; \quad u^j = u^j(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \dots, \bar{u}^n)$$

1. Soient  $\Gamma_{ki}^j$  et  $\bar{\Gamma}_{hl}^m$  les symboles de Christoffel relatifs respectivement aux coordonnées  $u^i$  et  $\bar{u}^k$ . Démontrer qu'on a la relation suivante :
- 2.

$$\Gamma_{ki}^j = \partial_i \bar{u}^l \partial_m u^j \partial_k \bar{u}^h \bar{\Gamma}_{hl}^m + \partial_l u^j \partial_{ki} \bar{u}^l$$

3. Dans le cas où les coordonnées  $\bar{u}^i$  sont rectilignes, démontrer que la formule précédente se réduit à :

$$\Gamma_{ki}^j = \partial_l u^j \partial_{ki} \bar{u}^l$$

### Solutions

1. La démonstration de la formule de transformation des symboles de Christoffel aboutit à l'équation (5.1.47) :

$$\Gamma_{ki}^j = A_i^{ll} A_m^j A_k^{lh} \bar{\Gamma}_{hl}^m + A_l^j \partial_k A_i^{ll}$$

Remplaçant les quantités  $A$  et  $A'$  par les expressions (4.3.16), soit :

$$(a) \quad A_i^{lk} = \partial_i \bar{u}^k \quad ; \quad (b) \quad A_k^i = \partial_k u^i$$

On obtient l'expression demandée :

$$\Gamma_{ki}^j = \partial_i \bar{u}^l \partial_m u^j \partial_k \bar{u}^h \Gamma_{hl}^m + \partial_l u^j \partial_{ki} \bar{u}^l$$

2. Si les coordonnées  $\bar{u}^i$  sont rectilignes - c'est le cas des coordonnées cartésiennes, par exemple - on a :  $de_i = 0$  et tous les symboles de Christoffel  $\Gamma_{hl}^m$  sont nuls. On obtient alors la formule simplifiée :

$$\Gamma_{ki}^j = \partial_l u^j \partial_{ki} \bar{u}^l$$

## Exercice 5.2

On considère dans un plan, un système de coordonnées cartésiennes,  $x^1, x^2$ , et un système de coordonnées curvilignes  $u^1, u^2$  définies par :  $x^1 = u^1 \cos u^2$  ;  $x^2 = u^1 \sin u^2$  (coordonnées polaires). Les composantes covariantes  $g_{ij}$  du tenseur métrique ont été calculées au cours de l'exercice (4.2), soit :

$$g_{11} = 1 \ ; \ g_{12} = g_{21} = 0 \ ; \ g_{22} = (u^1)^2$$

1. Déterminer les composantes contravariantes  $g^{ij}$  du tenseur métrique.
2. Rappeler les formules permettant le calcul des symboles de Christoffel de première et seconde espèces à partir des  $g_{ij}$
3. Calculer ces symboles pour les coordonnées polaires en utilisant ces formules.
4. Calculer les symboles de Christoffel de deuxième espèce à partir de la formule établie dans l'exercice (5.1) :  $\Gamma_{ki}^j = \partial_l u^j \partial_{ki} \bar{u}^l$  avec  $\bar{u}^l = x^l$ .

## Solutions

1. Pour des coordonnées orthogonales, on a :  $g^{ii} = 1/g_{ii}$ , d'où :

$$g^{11} = 1 \ ; \ g^{12} = g^{21} = 0 \ ; \ g^{22} = 1/(u^1)^2$$

2. Les symboles de Christoffel de première espèce sont donnés par la formule (5.1.38) :

$$\Gamma_{jki} = \frac{1}{2} (\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki})$$

Les symboles de deuxième espèce sont liées aux précédents, selon (5.1.39), par :

$$\Gamma_{kj}^i = g^{il} \Gamma_{lkj} = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_k g_{jl} + \partial_j g_{lk} - \partial_l g_{kj})$$

3. Les dérivées partielles  $\partial_k g_{ij}$  sont nulles pour  $i \neq j$  et  $i = j = 1$ . Il reste à calculer :

$$\partial_1 g_{22} = \partial_1 (u^1)^2 = 2 u^1 \ ; \ \partial_2 g_{22} = \partial_2 (u^1)^2 = 0$$

Les symboles de première espèce  $\Gamma_{jki}$  non nuls sont tels que :

$$k, i, j = 1, 2, 2 \quad ; \quad i, j, k = 1, 2, 2 \quad ; \quad j, k, i = 1, 2, 2$$

d'où :

$$\Gamma_{122} = u^1 \quad ; \quad \Gamma_{221} = u^1 \quad ; \quad \Gamma_{212} = -u^1$$

Les symboles de deuxième espèce sont :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0 & \Gamma_{12}^1 &= 0 \quad ; \quad \Gamma_{21}^1 &= 0 \quad ; \quad \Gamma_{22}^1 &= -u^1 \\ \Gamma_{11}^2 &= 0 & \Gamma_{12}^2 &= 1/u^1 \quad ; \quad \Gamma_{21}^2 &= 1/u^1 \quad ; \quad \Gamma_{22}^2 &= 0 \end{aligned}$$

4. Le calcul direct des symboles de Christoffel de deuxième espèce nécessite l'expression des coordonnées  $u^i$  en fonction des  $x^j$ . On a :

$$u^1 = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} \quad ; \quad u^2 = \arctan(x^2/x^1)$$

Le calcul des dérivées premières partielles des fonctions  $u^i(x^1, x^2)$  nous donne :

$$\partial_1 u^1 = x^1/u^1 \quad ; \quad \partial_2 u^1 = x^2/u^1 \quad ; \quad \partial_1 u^2 = -x^2/(u^1)^2 \quad ; \quad \partial_2 u^2 = x^1/(u^1)^2$$

Le calcul des dérivées premières partielles des fonctions  $x^j(u^1, u^2)$  nous donne :

$$\begin{aligned} \partial_{11} x^1 &= 0 & \partial_{12} x^1 &= -\sin u^2 \quad ; \quad \partial_{22} x^1 &= -u^1 \cos u^2 \\ \partial_{11} x^2 &= 0 & \partial_{12} x^2 &= \cos u^2 \quad ; \quad \partial_{22} x^2 &= -u^1 \sin u^2 \end{aligned}$$

L'utilisation de la formule  $\Gamma_{ki}^j = \partial_l u^j \partial_{ki} x^l$  permet de retrouver les valeurs calculées précédemment. On a, par exemple :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \partial_1 u^1 \partial_{11} x^1 + \partial_2 u^1 \partial_{11} x^2 = 0 \\ \Gamma_{22}^1 &= \partial_1 u^1 \partial_{22} x^1 + \partial_2 u^1 \partial_{22} x^2 = -u^1 \quad ; \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

### Exercice 5.3

Les composantes covariantes du tenseur métrique, en coordonnées sphériques  $r, \theta, \varphi$ , sont :

$$g_{11} = 1 \quad ; \quad g_{22} = r^2 \quad ; \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta \quad ; \quad g_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

Les coordonnées sphériques sont définies par :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad ; \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad ; \quad z = r \cos \theta$$

1. Calculer les symboles de Christoffel de première espèce en coordonnées sphériques.
2. Calculer ceux de deuxième espèce.

## Solutions

1. Les symboles de première espèce sont donnés par (5.1.38), soit :

$$\Gamma_{jki} = \frac{1}{2} (\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki})$$

Notons les coordonnées  $u^1 = r$ ,  $u^2 = \theta$ ,  $u^3 = \varphi$ ; les dérivées partielles non nulles sont les suivantes :

$$\partial_1 g_{22} = 2r \quad ; \quad \partial_1 g_{33} = 2r \sin^2 \theta \quad ; \quad \partial_2 g_{33} = 2r^2 \cos \theta \sin \theta$$

L'application de la formule (5.1.38) nous donne neuf symboles de Christoffel non nuls, à savoir :

$$\begin{aligned} \Gamma_{212} = -r \quad ; \quad \Gamma_{323} = -r^2 \sin \theta \cos \theta \quad ; \quad \Gamma_{313} = -r \sin^2 \theta \\ \Gamma_{122} = \Gamma_{221} = r \quad ; \quad \Gamma_{133} = \Gamma_{331} = r \sin^2 \theta \quad ; \quad \Gamma_{332} = \Gamma_{233} = r^2 \cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

2. La relation (5.1.39) :  $\Gamma_{kj}^i = g^{il} \Gamma_{lkj}$ , permet la détermination des symboles de Christoffel de deuxième espèce; on obtient neuf symboles non nuls :

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 = -r \quad ; \quad \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = 1/r \quad ; \quad \Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 = 1/r \\ \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \theta \quad ; \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta \quad ; \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cotan \theta \end{aligned}$$

## Exercice 5.4

Lorsque la matrice du tenseur est symétrique est diagonale ( $g_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ ), montrer que pour des indices donnés (c'est-à-dire pour des symboles où la présence de deux indices identiques n'indique pas de sommation), on a pour les symboles de Christoffel de seconde espèce :

1.  $\Gamma_{ij}^i = \Gamma_{ji}^i = (1/2) \partial_j \ln|g_{ii}|$
2.  $\Gamma_{jj}^i = -(1/2 g_{ii}) \partial_i g_{jj}$  ; avec  $i \neq j$
3. Tous les autres symboles  $\Gamma_{jk}^i$  sont nuls.

## Solutions

1. On suppose que tous les  $g_{ii}$  sont non nuls et l'on a :  $g_{ii}^{-1} = g^{ii}$ ; il vient pour  $i$  et  $j$  donnés (pas de sommation sur  $i$  et  $j$ ) :

$$\Gamma_{ij}^i = g^{ik} \Gamma_{kij} = g^{ii} \Gamma_{ijj} = \frac{1}{g_{ii}} \left( \frac{1}{2} \partial_j g_{ii} \right) = \frac{1}{2} \partial_j \ln|g_{ii}|$$

2. On obtient de même, pour  $i$  et  $j$  donnés et  $i \neq j$  :

$$\Gamma_{jj}^i = g^{ik} \Gamma_{kjj} = g^{ii} \Gamma_{ijj} = \frac{1}{g_{ii}} \left( -\frac{1}{2} \partial_i g_{jj} \right)$$

3. Lorsque tous les termes  $g_{ij}$  sont nuls pour  $i \neq j$ , alors toutes les dérivées de ces  $g_{ij}$  sont nulles et l'on a :

$$\Gamma_{ij}^j = g^{jp} \Gamma_{pik} = g^{jj} \Gamma_{jik} = \frac{g^{jj}}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ik}) = 0$$

### Exercice 5.5

En utilisant les résultats de l'exercice (5.4), calculer les symboles de Christoffel de seconde espèce en coordonnées sphériques  $u^1, u^2, u^3$ .

### Solutions

Les composantes covariantes du tenseur fondamental en coordonnées sphériques  $u^1, u^2, u^3$  sont :

$$g_{11} = 1 \quad ; \quad g_{22} = (u^1)^2 \quad ; \quad g_{33} = (u^1)^2 \sin^2 u^2 \quad ; \quad g_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

On est donc bien dans le cas d'une matrice diagonale du tenseur métrique. Utilisant les formules de l'exercice (5.4), soit :

$$\Gamma_{ij}^i = \Gamma_{ji}^i = (1/2) \partial_j \ln |g_{ii}|$$

on obtient les valeurs des symboles de Christoffel non nuls :

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = (1/2) \partial_1 \ln (u^1)^2 = \frac{1}{u^1} \quad ; \quad \Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{u^1} \quad ; \quad \Gamma_{32}^3 = \Gamma_{23}^3 = \cotan u^2$$

La formule suivante :  $\Gamma_{jj}^i = -(1/2 g_{ii}) \partial_i g_{jj}$ , nous donne les valeurs non nulles suivantes :

$$\Gamma_{22}^1 = -(1/2) \partial_1 (u^1)^2 = -u^1 \quad ; \quad \Gamma_{33}^1 = -u^1 \sin^2 u^2 \quad ; \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin u^2 \cos u^2$$

On obtient neuf symboles de Christoffel de seconde espèce non nuls ; les 18 autres sont nuls.

### Exercice 5.6

Une particule se déplace le long d'une trajectoire définie en coordonnées sphériques  $r, \theta, \varphi$ .

Déterminer les composantes contravariantes  $a^k$  de l'accélération  $\mathbf{a}$  de cette particule pour les trajectoires suivantes.

1. La trajectoire est définie par :  $r = c, \theta = \omega t, \varphi = \pi/4$  ;  $t$  est le temps.
2. La trajectoire est définie par :  $r = c, \theta = \pi/4, \varphi = \omega t$ . Calculer la norme de l'accélération et montrer qu'on retrouve la formule classique :  $\|\mathbf{a}\| = r \omega^2$ .

## Solutions

- Déterminons les valeurs des symboles de Christoffel le long de la trajectoire ; on a, pour  $r = c$ ,  $\theta = \omega t$ ,  $\varphi = \pi/4$  :

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{u^1} = \frac{1}{c} ; \quad \Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{u^1} = \frac{1}{c} ; \quad \Gamma_{32}^3 = \Gamma_{23}^3 = \cotan \omega t$$

$$\Gamma_{22}^1 = -u^1 = -c ; \quad \Gamma_{33}^1 = -c \sin^2 \omega t ; \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \omega t \cos \omega t$$

Les composantes contravariantes de l'accélération sont les suivantes :

$$a^1 = \frac{d^2 u^1}{dt^2} + \Gamma_{ik}^1 \frac{du^i}{dt} \frac{du^k}{dt} = 0 + \Gamma_{22}^1 \left( \frac{du^2}{dt} \right)^2 + \Gamma_{33}^1 \left( \frac{du^3}{dt} \right)^2 = -c \omega^2$$

$$a^2 = 0 ; \quad a^3 = 0$$

On retrouve l'expression classique de l'accélération d'une particule effectuant une trajectoire circulaire à vitesse constante.

- Symboles de Christoffel le long de la trajectoire :

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{u^1} = \frac{1}{c} ; \quad \Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{u^1} = \frac{1}{c} ; \quad \Gamma_{32}^3 = \Gamma_{23}^3 = \cotan \pi/4 = 1$$

$$\Gamma_{22}^1 = -u^1 = -c ; \quad \Gamma_{33}^1 = -c \sin^2 \pi/4 = -(c/2) ; \quad \Gamma_{33}^2 = -(1/2)$$

Les composantes contravariantes de l'accélération sont les suivantes :

$$a^1 = \frac{d^2 u^1}{dt^2} + \Gamma_{ik}^1 \frac{du^i}{dt} \frac{du^k}{dt} = 0 + \Gamma_{22}^1 \left( \frac{du^2}{dt} \right)^2 + \Gamma_{33}^1 \left( \frac{du^3}{dt} \right)^2 = -\frac{c \omega^2}{2}$$

$$a^2 = 0 + 2 \Gamma_{12}^2 \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + \Gamma_{33}^2 \left( \frac{du^3}{dt} \right)^2 = -\frac{\omega^2}{2} ; \quad a^3 = 0$$

Les composantes covariantes du tenseur fondamental le long de la trajectoire sont :

$$g_{11} = 1 ; \quad g_{22} = c^2 ; \quad g_{33} = c^2/2 \quad \text{d'où} \quad \|\mathbf{a}\| = \sqrt{g_{ij} a^i a^j} = c \omega^2 / \sqrt{2}$$

Le rayon du cercle parcouru est :  $r = c \sin(\pi/4) = c/\sqrt{2}$  d'où :

$$\|\mathbf{a}\| = c \omega^2 / \sqrt{2} = r \omega^2$$

## Exercice 5.7

Calculer l'expression de la divergence en coordonnées sphériques  $r, \theta, \varphi$  :

- Pour un champ de vecteurs  $\mathbf{A}$  de composantes contravariantes  $A^i$  dans le repère naturel.
- Pour le même champ de vecteurs  $\mathbf{A}$  de composantes  $A_r, A_\theta, A_\varphi$  dans un repère naturel dont les vecteurs de base ont été normés.

## Solutions

La divergence d'un champ de vecteurs est donnée par la formule (5.4.13) :

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \partial_i A^i + \frac{A^i}{\sqrt{|g|}} \partial_i \sqrt{|g|}$$

Notons  $r = x^1$ ,  $\theta = x^2$ ,  $\varphi = x^3$ ; on a :  $g = (x^1)^4 \sin^2 x^2$ .

1. Reportons dans la formule de la divergence, il vient :

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \partial_1 A^1 + \partial_2 A^2 + \partial_3 A^3 + \frac{2}{x^1} A^1 + A^2 \cotan x^2$$

2. Les vecteurs de la base naturelle ont pour norme :

$$\|\mathbf{e}_1\| = 1 \quad ; \quad \|\mathbf{e}_2\| = r \quad ; \quad \|\mathbf{e}_3\| = r \sin \theta$$

Sur une base orthonormée, les composantes covariantes et contravariantes sont identiques. On a alors les relations :

$$A_r = A^1 \quad ; \quad A_\theta = r A^2 \quad ; \quad A_\varphi = r \sin \theta A^3$$

L'expression précédente de la divergence nous donne, en remplaçant les variables et les composantes par leur écriture traditionnelle :

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} A_r + \frac{\cotan \theta}{r} A_\theta$$

On retrouve l'expression classique de la divergence en coordonnées sphériques dont les vecteurs de la base naturelle ont été normés.

## Exercice 5.8

1. Partant de l'expression (5.1.38) :  $\Gamma_{jki} = \frac{1}{2} (\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki})$ , démontrer la relation :

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jki}$$

2. En utilisant le résultat précédent, démontrer la relation :

$$\partial_m g^{lj} = -g^{li} \Gamma_{mi}^j - g^{jk} \Gamma_{mk}^l$$

## Solutions

1. La relation (5.1.38) nous donne :

$$\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jki} = \frac{1}{2} (\partial_j g_{ik} + \partial_k g_{ji} - \partial_i g_{jk}) + \frac{1}{2} (\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki}) = \partial_k g_{ji}$$

2. La relation (1.5.44) s'écrit :

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j, \text{ d'où } \partial_m (g_{ik} g^{kj}) = \partial_m (\delta_i^j) = 0$$

D'autre part, on a :

$$\partial_m (g_{ik} g^{kj}) = g_{ik} \partial_m g^{kj} + g^{kj} \partial_m g_{ik} = 0, \text{ soit } g_{ik} \partial_m g^{kj} = -g^{kj} \partial_m g_{ik}$$

Multipliant par  $g^{il}$  et sommant, il vient :

$$g^{il} g_{ik} \partial_m g^{kj} = -g^{il} g^{kj} \partial_m g_{ik}$$

Utilisant de nouveau la relation (1.5.44) ainsi que la relation obtenue à la question (1), on obtient :

$$\delta_k^i \partial_m g^{kj} = -g^{il} g^{kj} (\Gamma_{kim} + \Gamma_{imk}) \text{ soit } \partial_m g^{lj} = -g^{li} \Gamma_{mi}^j - g^{jk} \Gamma_{mk}^l$$

## Exercice 5.9

Démontrer que les dérivées covariantes des composantes des tenseurs suivants sont nulles :

1. Tenseur de Kronecker :  $\delta_i^k$
2. Tenseur fondamental, à partir de ses composantes covariantes  $g_{ij}$ , en utilisant les résultats de l'exercice (5.8).
3. Faire de même à partir des composantes contravariantes  $g^{ik}$ .
4. Dédire des résultats précédents, le théorème de Ricci :

$$D g_{ij} = D g^{ij} = 0$$

## Solutions

1. Les composantes de la dérivée covariante du tenseur  $\delta_i^k$  sont données, selon la formule générale (5.2.28), par :

$$\nabla_k \delta_s^r = \partial_k \delta_s^r + \delta_s^i \Gamma_{ki}^r - \delta_i^r \Gamma_{ks}^i = 0 + \Gamma_{ks}^r - \Gamma_{ks}^r = 0$$

2. Pour le tenseur fondamental  $g_{ij}$ , on a :

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - g_{lj} \Gamma_{ki}^l - g_{il} \Gamma_{kj}^l = \partial_k g_{ij} - \Gamma_{jki} - \Gamma_{ikj}$$

La question (1) de l'exercice (5.8) nous donne :  $\partial_k g_{ij} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jki}$ , d'où :

$$\nabla_k g_{ij} = 0$$

3. Les composantes contravariantes du tenseur fondamental s'écrivent :

$$\nabla_k g^{ij} = \partial_k g^{ij} + g^{lj} \Gamma_{lk}^i + g^{il} \Gamma_{lk}^j$$

L'exercice (5.8) question (2) nous donne, en changeant les indices :

$$\partial_k g^{ij} = -g^{li} \Gamma_{lk}^j - g^{lj} \Gamma_{kl}^i$$

d'où :  $\nabla_k g^{ij} = 0$

4. La différentielle absolue des composantes d'un tenseur  $g_{ij}$  est donnée par :

$$D g_{ij} = \nabla_k g_{ij} du^k$$

où les  $u^k$  sont les coordonnées curvilignes de l'espace ponctuel considéré. Puisque toutes les dérivées covariantes sont nulles, on a :

$$D g_{ij} = 0$$

et de même  $D g^{ij} = 0$ . C'est le théorème de Ricci.

# Chapitre 6

## Espaces de Riemann

### 6.1 Exemples d'espace de Riemann

#### 6.1.1 Surfaces à deux dimensions

**Sphère** - Considérons une sphère de rayon  $R$ , de surface  $S$ , située dans l'espace ordinaire à trois dimensions. Les coordonnées cartésiennes  $x, y, z$  d'un point  $M$  de la surface  $S$  peuvent s'exprimer, par exemple, en fonction des coordonnées sphériques, la longitude  $\varphi$  et la colatitude  $\theta$ . La sphère est entièrement décrite si  $0 \leq \theta < \pi$  et  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

Deux tels paramètres, permettant de déterminer un point sur la surface de la sphère, sont appelés **des coordonnées curvilignes sur la surface ou coordonnées de Gauss**. D'autres paramètres quelconques,  $u, v$ , peuvent évidemment être choisis comme coordonnées curvilignes sur la surface.

L'élément linéaire de la surface  $ds^2$ , carré de la distance entre deux points infiniment voisins  $M$  et  $M'$ , s'écrit en fonction des coordonnées sphériques, pour  $R = \text{constante}$  :

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (6.1.1)$$

On obtient une expression de l'élément linéaire en fonction des deux seules coordonnées de Gauss  $\theta$  et  $\varphi$ .

**Tenseur fondamental riemannien** - Étant décrite à l'aide de deux paramètres, la surface de la sphère (considérée comme un espace à deux dimensions) constitue un exemple d'espace de Riemann à deux dimensions.

L'élément linéaire (6.1.1) est de la forme générale (4.3.18), à savoir :

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j \quad (6.1.2)$$

où les  $du^i$  sont les composantes contravariantes du vecteur  $d\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{M}'$  par rapport au repère naturel  $(M, \mathbf{e}_i)$ . Posant  $u^1 = \theta$ ,  $u^2 = \varphi$ , on obtient par identification des formules (6.1.1) et (6.1.2) :

$$g_{11} = R^2 \quad , \quad g_{12} = g_{21} = 0 \quad , \quad g_{22} = R^2 \sin^2 \theta \quad (6.1.3)$$

Les quantités  $g_{ij}$  avec  $i, j = 1, 2$ , constituent les composantes d'un tenseur qui est le tenseur fondamental de l'espace riemannien formé par la surface  $S$ . C'est un exemple de *tenseur fondamental riemannien* ou encore *métrique riemannienne*.

Les propriétés géométriques des figures tracées sur la surface d'une sphère ne sont plus celles de la géométrie euclidienne. Ainsi, le plus court chemin d'un point  $A$  à un autre point  $B$ , sur la surface sphérique, est constitué par un arc de grand cercle passant par les points  $A$  et  $B$ . Les arcs de grand cercle jouent le même rôle pour la sphère que les droites dans le plan. **Ce sont les géodésiques de la sphère.**

Un triangle sphérique est déterminé par trois arcs de grands cercles tracés sur la sphère. En particulier, la somme des angles que forment les côtés curvilignes des triangles est différent de  $\pi$  radians.

**Surface quelconque à deux dimensions** - Considérons à présent une surface quelconque de coordonnées de surface  $u^1$  et  $u^2$ . Les coordonnées cartésiennes  $x, y, z$ , de l'espace ordinaire où se trouve prolongée cette surface s'écrivent de manière générale :

$$x = x(u^1, u^2) \quad , \quad y = y(u^1, u^2) \quad , \quad z = z(u^1, u^2) \quad (6.1.4)$$

L'élément linéaire  $ds^2$  s'écrit alors, en fonction des variables  $u^1$  et  $u^2$  :

$$ds^2 = E du^1 du^1 + 2F du^1 du^2 + G du^2 du^2 \quad (6.1.5)$$

avec :

$$\begin{aligned} E &= (\partial_1 x)^2 + (\partial_1 y)^2 + (\partial_1 z)^2 \\ F &= \partial_1 x \partial_2 x + \partial_1 y \partial_2 y + \partial_1 z \partial_2 z \\ G &= (\partial_2 x)^2 + (\partial_2 y)^2 + (\partial_2 z)^2 \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

L'expression (6.1.5) s'appelle **la première forme quadratique fondamentale** de la surface considérée. Les coefficients  $E, F, G$ , sont des fonctions de coordonnées curvilignes. De manière générale, cette surface, considérée comme un espace à deux dimensions, constituera un exemple de d'espace de Riemann, pour des fonctions (6.1.4) arbitraires.

## 6.1.2 Disque tournant

Considérons un autre exemple d'espace riemannien faisant intervenir des propriétés relativistes. Soient deux disques co-axiaux  $S$  et  $S_0$  que nous supposerons animés l'un par rapport à l'autre, d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire  $\omega$  autour de leur axe commun. Admettons qu'un observateur, muni d'un étalon de longueur lié à  $S_0$ , fasse des mesures et que celles-ci montrent que sur  $S_0$  et sur  $S$ , la

géométrie est euclidienne.

Étudions maintenant les mesures qui vont être faites par un observateur lié au disque tournant  $S$  et qui va naturellement choisir un étalon de longueur lié à  $S$ . Si cet étalon de longueur est placé dans une direction radiale quelconque, sa vitesse de déplacement longitudinale est nulle pour un observateur de  $S_0$  et cet étalon aura toujours une longueur unité.

Par contre, si cet étalon est dirigé selon une perpendiculaire au rayon du disque, en un point situé à la distance  $r$  du centre de rotation, cet étalon possède une vitesse longitudinale  $v = r\omega$ . Il subit donc une contraction de Lorentz qui, pour un observateur de  $S_0$ , ramène sa longueur au repos  $l_0$  à la valeur :

$$l = l_0 (1 - \beta^2)^{1/2} \quad (6.1.7)$$

avec  $\beta = r\omega/c$ , où  $c$  est la vitesse de la lumière.

Choisissons un système de coordonnées polaires  $r, \theta$ . La distance entre deux points  $(r, \theta)$  et  $(r + dr, \theta + d\theta)$  du système  $S$ , mesurée à l'aide de l'étalon de longueur du système  $S_0$ , est euclidienne et donnée par :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (6.1.8)$$

Par contre, pour un observateur de  $S_0$ , la distance entre ces deux mêmes points, mesurée avec les étalons de longueurs liés au système tournant  $S$ , devient :

$$ds^2 = dr^2 + \frac{r^2 d\theta^2}{1 - \beta^2} \quad (6.1.9)$$

La mesure effectuée à l'aide d'un étalon lié au système tournant  $S$  donne pour longueur d'une circonférence :

$$s = \int ds = \frac{2\pi r}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \quad (6.1.10)$$

Les étalons liés au repère tournant  $S$  étant les étalons naturels que choisirait un observateur lié au disque tournant, il en résulte que la géométrie édifiée à l'aide des étalons de son propre système n'est pas une géométrie euclidienne. Elle s'en écarte d'autant plus que la distance  $r$  par rapport au centre du disque est grande.

Les coefficients de l'élément linéaire (6.1.9) sont les composantes du tenseur fondamental de cet espace de Riemann constitué par un disque tournant relativiste. C'est un exemple de métrique riemannienne.

### 6.1.3 Espace de configuration

Voyons un autre exemple d'espace riemannien plus abstrait que l'on utilise en mécanique. Soit un système dynamique à  $n$  degrés de liberté et soient  $q^1, q^2, \dots, q^n$ , un ensemble de coordonnées généralisées, c'est-à-dire un système de  $n$  paramètres qui

permettent de décrire l'évolution d'un système. L'ensemble des configurations d'un tel système dynamique constitue un espace à  $n$  dimensions que l'on appelle **espace de configuration**.

Considérons par exemple un système de particules de masse  $m_i$  dont les positions sont déterminées par les rayons vecteurs  $\mathbf{r}^i$  et qui sont liées aux coordonnées  $q^j$  par les équations de transformation :

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{r}^i(q^1, q^2, \dots, q^n, t) \quad (6.1.11)$$

Par suite les vitesses  $\mathbf{v}^i = d\mathbf{r}^i/dt$  s'expriment en fonction des coordonnées  $q^j$  par :

$$\mathbf{v}^i = \partial_j \mathbf{r}^i q'^j + \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial t} \quad (6.1.12)$$

avec  $q'^j = dq^j/dt$ . Si les équations de transformation (6.1.11) ne contiennent pas le temps explicitement, c'est-à-dire si les contraintes sont indépendantes du temps, l'expression de la vitesse ne contient pas de dérivée partielle par rapport au temps. Dans ce cas, l'énergie cinétique  $T$  du système est donné par :

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}^i)^2 = a_{jk} q'^j q'^k \quad (6.1.13)$$

avec  $a_{jk} = (1/2) \sum_i m_i \partial_j \mathbf{r}^i \partial_k \mathbf{r}^i$ . L'énergie cinétique  $T$  est une forme quadratique définie positive où les  $a_{jk}$  sont des fonctions des paramètres  $q^1, q^2, \dots, q^n$ .

Définissons alors l'élément linéaire de l'espace de configuration par la relation suivante :

$$ds^2 = a_{jk} dq^j dq^k \quad (6.1.14)$$

On obtient un espace à  $n$  dimensions muni d'une métrique, définie par l'expression (6.1.14), qui en général ne sera pas euclidienne. **C'est un espace de Riemann dont le tenseur fondamental a pour composantes  $g_{ij} = a_{ij}$ .**

À toute configuration du système dynamique correspond un point bien défini de l'espace de configuration et par suite, à tout mouvement du système est associé le mouvement d'un point dans l'espace de Riemann. On obtient une image géométrique d'un problème de dynamique, ce qui permet d'utiliser des méthodes tensorielles pour le résoudre.

## 6.2 Métrique riemannienne

### 6.2.1 Notion de variété

Nous avons vu différents exemples d'espaces de Riemann : surface à deux dimensions, disque tournant relativiste, espace de configuration. **On dit que ces espaces**

## constituent des variétés munies d'une métrique riemannienne.

Une variété peut être définie, par exemple, par un ensemble de points situés dans un espace préexistant. De manière générale, une surface donne l'idée d'une variété à deux dimensions. La sphère et le tore sont des variétés à deux dimensions sans frontière. Un cylindre de révolution, un parabololoïde hyperbolique, sont des variétés à deux dimensions ouvertes, avec frontières à l'infini.

Mais on peut envisager des variétés *in abstracto*. C'est le cas, par exemple, des espaces de configuration tels que ceux utilisés en Physique. Il s'agit alors d'un espace de point à  $n$  dimensions, représenté par un ensemble de coordonnées  $(u^i)$ , ces dernières pouvant avoir des valeurs comprises dans un domaine fini ou non. C'est un tel espace de points à  $n$  dimensions, défini par un ensemble donné de  $n$  coordonnées  $(u^i)$ , que nous utiliserons au cours de ce chapitre. Un point  $M_0$  de cette variété est défini par un ensemble de coordonnées  $(u^i)_0$ . Une variété est caractérisée par la possibilité de représenter le voisinage d'un point  $M_0$  au moyen d'un système de  $n$  coordonnées  $u^i$ , ces dernières étant telles qu'à deux points infiniment voisins correspondent des nombres infiniment peu différents.

### 6.2.2 Définition des espaces de Riemann

Un espace de Riemann est une variété à laquelle on a attaché une métrique. Cela signifie que, dans chaque partie de la variété, représentée analytiquement au moyen d'un système de coordonnées  $(u^i)$ , on s'est donné une métrique définie par la forme quadratique :

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j \quad (6.2.1)$$

Les coefficients  $g_{ij}$  ne sont pas entièrement arbitraires et doivent vérifier les conditions suivantes :

- Les composantes  $g_{ij}$  sont symétriques :  $g_{ij} = g_{ji}$ .
- Le déterminant de la matrice  $[g_{ij}]$  est différent de zéro.
- La forme différentielle (6.2.1) et par conséquent le concept de distance défini par les  $g_{ij}$ , est invariant vis-à-vis de tout changement de coordonnées.
- Toutes les dérivées partielles d'ordre deux des  $g_{ij}$  existent et sont continues (on dit que les  $g_{ij}$  sont de classe  $C^2$ ).

Un espace Riemannien est donc un espace de points, chacun étant repéré par  $n$  coordonnées  $u^i$ , doté d'une métrique quelconque de la forme (6.2.1) vérifiant les conditions ci-dessus. **Cette métrique est dite Riemannienne.**

Si la métrique est définie positive, c'est-à-dire lorsque  $g_{ij} v^i v^j$ , pour tout vecteur  $\mathbf{v}$  non nul, on dit que l'espace est proprement Riemannien. Dans ce cas, le déterminant

de la matrice  $[g_{ij}]$  est strictement positif et toutes les valeurs propres de cette matrice sont strictement positives.

### 6.2.3 Métrique euclidienne et riemannienne

Comment distinguer une métrique euclidienne d'une métrique riemannienne ? Définissons d'abord plus précisément ce que l'on entend par métrique euclidienne.

On a vu précédemment que tout espace euclidien admet des bases orthonormées telles que  $g_{ij} = \delta_{ij}$ . **Par définition, on dira qu'une métrique d'un espace est euclidienne lorsque tout tenseur fondamental de cet espace peut être ramené, par un changement approprié de coordonnées, à une forme telle que  $g_{ij} = \delta_{ij}$ .**

Ainsi les tenseurs fondamentaux définis par les éléments linéaires (6.1.2) et (6.1.9), ne peuvent être ramenés à un tenseur euclidien. On va voir par la suite les conditions nécessaires que doivent vérifier les  $g_{ij}$  pour constituer les composantes d'un tenseur fondamental euclidien.

La définition des espaces riemanniens montre que l'espace euclidien est un cas très particulier de ces espaces. **Il n'existe donc qu'un seul espace euclidien alors qu'on peut inventer une infinité d'espaces riemanniens.**

### 6.2.4 Conditions nécessaires pour qu'une métrique soit euclidienne

Si l'on se donne un élément linéaire quelconque, il n'existe pas, en général, un système de coordonnées  $y^i$  qui confère à l'espace euclidien la métrique définie par cet élément linéaire arbitraire. Pour qu'il existe un tel système de coordonnées, il faut qu'on puisse déterminer les coordonnées rectangulaires du point variable  $M$ , rapporté à des axes fixes, et les projections des vecteurs de base  $\mathbf{e}_i$  du repère naturel, de manière à avoir les relations :

$$d\mathbf{M} = dy^i \mathbf{e}_i \quad (6.2.2)$$

$$d\mathbf{e}_i = \omega^k{}_i \mathbf{e}_k \quad (6.2.3)$$

Nous avons vu précédemment que l'on pouvait localiser tous les repères naturels  $(M', \mathbf{e}'_i)$  infiniment voisins d'un repère naturel  $(M, \mathbf{e}_i)$  par rapport à ce dernier. C'est ce que l'on a fait en déterminant les  $n^3$  symboles de Christoffel à partir des quantités  $g_{ij}$ . On peut dire que l'espace euclidien est reconstruit au voisinage de l'origine  $M$  du repère  $(M, \mathbf{e}_i)$ . Or les conditions d'intégrabilité des équations (6.2.2) sont vérifiées puisqu'elles ont précisément été utilisées pour calculer les symboles de Christoffel, en les écrivant sous la forme (5.1.30).

Cherchons à présent les conditions d'intégrabilité des équations différentielles (6.2.3). Celles-ci se présentent comme des conditions pour que le problème précédent d'intégrabilité de (6.2.2) soit possible puisque la relation (6.2.3) a déjà été utilisée, lors du calcul des symboles de Christoffel, sous la forme de la relation (5.1.30).

Les différentielles (6.2.3) nous donnent les relations :

$$\partial_k \mathbf{e}_i = \Gamma_{ki}^j \mathbf{e}_j \quad (6.2.4)$$

et les conditions d'intégrabilité nécessitent que les dérivées secondes  $\partial_{kl} \mathbf{e}_i$  soient égales lorsqu'on intervertit l'ordre des dérivations. La dérivée de l'expression (6.2.4) nous donne :

$$\partial_l(\partial_k \mathbf{e}_i) = \partial_l(\Gamma_{ki}^j \mathbf{e}_j) = (\partial_l \Gamma_{ki}^j + \Gamma_{ki}^m \Gamma_{lm}^j) \mathbf{e}_j \quad (6.2.5)$$

On obtient de même :

$$\partial_k(\partial_l \mathbf{e}_i) = \partial_k(\Gamma_{li}^j \mathbf{e}_j) = (\partial_k \Gamma_{li}^j + \Gamma_{li}^m \Gamma_{km}^j) \mathbf{e}_j \quad (6.2.6)$$

L'égalité des dérivées secondes nous donne, pour chaque  $\mathbf{e}_j$  :

$$(\partial_l \Gamma_{ki}^j - \partial_k \Gamma_{li}^j) + (\Gamma_{ki}^m \Gamma_{lm}^j - \Gamma_{li}^m \Gamma_{km}^j) = 0 \quad (6.2.7)$$

avec  $i, j, k, l, m = 1$  à  $n$ .

En remplaçant dans les relations (6.2.7) les  $\Gamma_{ki}^j$  par leur valeur en fonction des  $g_{ij}$  donnée par l'expression (5.1.39), on obtient les conditions nécessaires auxquelles doivent satisfaire des fonctions  $g_{ij}(u^1, u^2, \dots, u^n)$ , que l'on se donne *a priori* dans un élément linéaire, pour représenter les composantes d'un tenseur fondamental euclidien.

## 6.3 Propriétés géométriques

### 6.3.1 Métrique euclidienne tangente en un point

Lorsqu'on définit un espace de Riemann  $\mathcal{R}_n$ , on ne connaît pas *a priori* ses propriétés géométriques. On va voir cependant que de nombreuses formules de la géométrie euclidienne vont pouvoir être généralisées aux espaces de Riemann. Le moyen le plus simple de rechercher les propriétés géométriques des espaces de Riemann va consister à l'identifier localement, dans la mesure du possible, à un espace euclidien. **Définition** - Dans ce but, on va introduire la notion de métrique tangente en un point à la métrique riemannienne donnée. Pour cela, considérons un espace de Riemann  $\mathcal{R}_n$  dont la métrique est définie positive par :

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j \quad (6.3.1)$$

et soit  $M_0$  un point de  $\mathcal{R}_n$  de coordonnées  $(u_i)_0$ .

On appelle **métrique euclidienne tangente**, au point  $M_0(u_0^1, u_0^2, \dots, u_0^n)$ , à la métrique donnée par (6.3.1), la métrique définie par un élément linéaire euclidien :

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} du^i du^j \quad (6.3.2)$$

construit avec les mêmes variables  $u^i$  et tel que pour  $u^i = u_0^i$ , on ait :

$$(\gamma_{ij})_0 = (g_{ij})_0 \quad (6.3.3)$$

La manière la plus simple de trouver une métrique euclidienne répondant à cette définition est de choisir des coefficients de l'élément linéaire (6.3.2) constants, à savoir  $\gamma_{ij} = (g_{ij})_0$ .

Dans le cas où les coefficients d'un élément linéaire sont des constantes, on est certain que la métrique est euclidienne c'est-à-dire que l'élément linéaire peut se ramener à une somme de carrés de la forme  $d\sigma^2 = dy^i dy^i$ . Il est en effet toujours possible, en passant des variables  $u^i$  à d'autres variables  $x^j$  au moyen d'une transformation linéaire :

$$u^i = \alpha_k^i x^k \quad (6.3.4)$$

où le jacobien de la transformation est différent de zéro, de ramener le tenseur  $\gamma_{ij}$  à une forme diagonale  $a_i^k$ , ceci en conservant l'invariance de la forme quadratique (6.3.2). Notons  $a_1^1, a_2^2, \dots, a_n^n$ , les éléments de la diagonale principale du tenseur, les autres éléments étant nuls. Au moyen d'un nouveau changement de coordonnées :

$$y^i = (a_i^i)^{1/2} x^i \quad (6.3.5)$$

(formule dans laquelle il n'y a pas de sommation sur l'indice), on est ramené à une métrique euclidienne où les coefficients de l'élément linéaire sont tous égaux à  $\delta_{ij}$ .

**Changement de coordonnées** - Effectuons un changement de système de coordonnées, faisant passer des  $u^i$  à de nouvelles coordonnées  $v^j$ . Les composantes du tenseur fondamental de l'espace euclidien tangent sont respectivement  $\gamma_{ij} = (g_{ij})_0$  dans le système  $u^i$  et  $\gamma'_{kl} = (g'_{kl})_0$  dans le système  $v^j$ . Pour ce changement de coordonnées, on obtient, en appliquant les formules générales de transformation des composantes covariantes d'un tenseur :

$$\gamma_{ij} = (g_{ij})_0 = (\partial_i v^k)_0 (\partial_j v^l)_0 (g'_{kl})_0 \quad (6.3.6)$$

Pour que la notion de métrique euclidienne tangente soit indépendante du système de coordonnées utilisées, il faut et il suffit que les relations (6.3.6) soient vérifiées. On est ainsi amené à faire la convention que, dans un changement quelconque de coordonnées, les coefficients  $g_{ij}$  de la métrique d'un espace de Riemann se transforment comme les composantes covariantes d'un tenseur, à savoir :

$$g_{ij} = \partial_i v^k \partial_j v^l g'_{kl} \quad (6.3.7)$$

Avec cette convention, la notion de métrique tangente euclidienne est bien indépendante du système de coordonnées ; on dit qu'elle présente un **caractère intrinsèque**.

**Espace euclidien tangent en un point** - Au lieu de dire qu'on a doué l'espace de Riemann d'une métrique euclidienne au point  $M_0$ , on peut dire qu'on a fait une représentation de l'espace riemannien sur un espace euclidien. Cet espace euclidien sera appelé *espace euclidien tangent* en  $M_0$  à l'espace de Riemann donné.

Ce n'est là qu'une convention commode de langage parce qu'elle fait image. Mais il existe une infinité de métriques euclidiennes tangentes en un point donné et par suite une infinité d'espaces euclidiens tangents en  $M_0$ . Cependant comme on ne considérera dans ce qui suit que les propriétés géométriques communes à tous les espaces euclidiens, on peut parler sans inconvénient de l'espace euclidien tangent en un point.

Montrons que l'on peut trouver une infinité de métriques euclidiennes tangentes à un espace de Riemann  $\mathcal{R}_n$  donné. Appelons  $m_0$  le point de l'espace euclidien  $\varepsilon_n$  correspondant à  $M_0$  et  $(m_0, \mathbf{e}_i^0)$  le repère naturel euclidien en  $m_0$  astreint aux conditions :

$$\mathbf{e}_i^0 \cdot \mathbf{e}_j^0 = (g_{ij})_0 \quad (6.3.8)$$

À tout point  $M$  de  $\mathcal{R}_n$ , situé au voisinage de  $M_0$ , faisons correspondre un point  $m$  de  $\varepsilon_n$ , situé au voisinage de  $m_0$  en cherchant un système particulier de coordonnées qui permettent de repérer ce point  $m$ . Pour cela, il faut définir les coordonnées  $u^i$  du point  $m$  par des nombres peu différents de  $u_0^i$ . Appelons  $\varepsilon_i$  des fonctions continues arbitraires de  $(u^k - u_0^k)$  qui deviennent nulles ainsi que leurs dérivées premières pour  $u^k = u_0^k$ . Le point  $m$  est alors défini par :

$$\mathbf{m}_0 \mathbf{m} = (u^i - u_0^i) \mathbf{e}_i^0 + \varepsilon_i \mathbf{e}_i^0 \quad (6.3.9)$$

Les coordonnées  $u^i$  ainsi définies constituent un système de coordonnées curvilignes de l'espace euclidien au voisinage  $m_0$ . La relation (6.3.9) nous donne les vecteurs du repère naturel en  $m_0$  :

$$(\partial_i \mathbf{m})_0 = \mathbf{e}_i^0 \quad (6.3.10)$$

qui sont précisément ceux que l'on avait initialement choisis. Pour  $u^i = u_0^i$ , on obtient :

$$\mathbf{e}_i^0 \cdot \mathbf{e}_j^0 = (\gamma_{ij})_0 = (g_{ij})_0 \quad (6.3.11)$$

La relation (6.3.3) est ainsi vérifiée et la formule (6.3.9) permet donc de définir des métriques euclidiennes tangentes au point  $M_0$  ainsi que les espaces euclidiens tangents correspondants.

### 6.3.2 Propriétés géométriques déduites des métriques euclidiennes tangentes

Certaines propriétés de l'espace euclidien vont pouvoir être transposées dans les espaces de Riemann en considérant leur métrique euclidienne tangente en chaque point ou, pour employer un langage géométrique, leur espace euclidien tangent en ce point.

À chaque point  $M$  d'un espace riemannien, on fait correspondre le point  $m$  de l'espace euclidien tangent supposé rapporté à son repère naturel  $(m, \mathbf{e}_i)$ . On dira que l'on a défini un vecteur  $\mathbf{v}$  au point  $M$  de l'espace de Riemann, rapporté aux coordonnées  $u^i$ , si l'on se donne les composantes d'un vecteur au point  $m$  par rapport au repère  $(m, \mathbf{e}_i)$ . On peut ainsi définir un champ de vecteurs ou de tenseurs dans un espace de Riemann.

Toutes les propriétés algébriques des vecteurs euclidiens peuvent alors être transposées aux vecteurs d'un espace de Riemann. En particulier, si la métrique de l'espace riemannien est donnée par (6.2.1) et si l'on considère deux vecteurs  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  d'un espace de Riemann, de composantes respectives  $v^i$  et  $w^j$ , leur produit scalaire est donné par :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = g_{ij} v^i w^j \quad (6.3.12)$$

La distance élémentaire de deux points infiniment voisins est donnée par (6.2.1) et l'on en déduit par intégration la longueur  $s$  d'un arc de courbe quelconque :

$$s = \int (g_{ij} du^i du^j)^{1/2} \quad (6.3.13)$$

Le volume élémentaire de l'espace euclidien tangent est donné par :

$$dV = (g)^{1/2} du^1 du^2 \dots du^n \quad (6.3.14)$$

et ce sera aussi celui de l'espace de Riemann. Un volume fini s'obtiendra par intégration du volume élémentaire.

Malgré le grand nombre de notions d'origine euclidienne que l'on peut généraliser dans un espace de Riemann, il est des notions élémentaires fondamentales qui manquent encore. Ainsi la notion d'espace tangent euclidien ne permet pas de comparer entre eux des vecteurs et des tenseurs attachés à deux points, même infiniment voisins, de l'espace de Riemann. On ne peut donc pas calculer leur dérivée.

Jusqu'ici un espace de Riemann est une collection de petits morceaux d'espace euclidien parce que nous n'avons pas encore relié les uns aux autres les divers morceaux, en définissant leur orientation mutuelle. C'est ce que nous allons faire maintenant en définissant la notion d'espace euclidien osculateur.

## 6.4 Propriétés différentielles

### 6.4.1 Métrique euclidienne osculatrice

Une métrique euclidienne osculatrice au point  $M_0(u_0^1, u_0^2, \dots, u_0^n)$  à la métrique riemannienne (6.3.1), est la métrique définie par l'élément linéaire euclidien :

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} du^i du^j \quad (6.4.1)$$

tel que ses coefficients  $\gamma_{ij}$ , ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, aient en  $M_0$  les mêmes valeurs numériques que celles de l'élément linéaire riemannien donné :  $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$ .

Montrons qu'il existe des métriques euclidiennes osculatrices en déterminant des valeurs telles que, en  $M_0$ , on ait :

$$(a) (\gamma_{ij})_0 = (g_{ij})_0 \quad ; \quad (b) (\partial_k \gamma_{ij})_0 = (\partial_k g_{ij})_0 \quad (6.4.2)$$

Pour cela, considérons l'espace euclidien  $\varepsilon_n$  rapporté à un repère naturel cartésien  $(O, \mathbf{e}_i)$  où les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  sont définis par les valeurs numériques en  $M_0$  des coefficients  $g_{ij}$  c'est-à-dire tels que l'on ait :

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = (g_{ij})_0 \quad (6.4.3)$$

D'autre part, cherchons un système de coordonnées  $u^i$  de l'espace euclidien qui permet de vérifier les relations (6.4.2). Cela est possible de multiple façons ; prenons par exemple la relation suivante entre les coordonnées cartésiennes  $x^i$  et les coordonnées de surface  $u^i$  :

$$x^i = (u^i - u_0^i) + (1/2) (\Gamma_{lm}^i)_0 (u^l - u_0^l) (u^m - u_0^m) \quad (6.4.4)$$

où les  $(\Gamma_{lm}^i)$  sont calculés à partir des  $g_{ij}$  en utilisant les formules (5.1.39) ; on note  $(\Gamma_{lm}^i)_0$  leur valeur numérique en  $u^i = u_0^i$ . Soit  $M$  un point quelconque de  $\varepsilon_n$ , de coordonnées  $x^i$ , on a alors la relation suivante en  $u^i = u_0^i$  :

$$\left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x^i} \right)_0 = \left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u^i} \right)_0 = \mathbf{e}_i \quad (6.4.5)$$

Par suite du choix fait sur les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  par la relation (6.4.3) et en tenant compte de la métrique (1.3.19), on a :

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = (\gamma_{ij})_0 = (g_{ij})_0 \quad (6.4.6)$$

D'autre part, la relation (5.1.32) s'écrit pour un espace euclidien de coordonnées quelconques :

$$\partial_{jk} \mathbf{M} = \partial_j \mathbf{e}_k = \Gamma_{jk}^l \mathbf{e}_l \quad (6.4.7)$$

En particulier, pour les coordonnées  $u^i$  définies par la relation (6.4.4), on obtient pour  $u^i = u_0^i$  :

$$(\partial_{jk} \mathbf{M})_0 = (\partial_j \mathbf{e}_k)_0 = (\Gamma_{jk}^l)_0 \mathbf{e}_l \quad (6.4.8)$$

où les dérivations sont faites par rapport aux variables  $u^i$ .

Définissons également des symboles de Christoffel notés  $(\Gamma_{jk}^{*l})$  directement à partir des quantités  $\gamma_{ij}$ , à l'aide des formules (5.1.39); on a également en  $u^i = u_0^i$  :

$$(\partial_{jk} \mathbf{M})_0 = (\Gamma_{jk}^{*l})_0 \mathbf{e}_l \quad (6.4.9)$$

Les relations (6.4.8) et (6.4.9) étant égales, on obtient l'égalité suivante pour les symboles de Christoffel de seconde espèce, en  $u^i = u_0^i$  :

$$(\Gamma_{jk}^l)_0 = (\Gamma_{jk}^{*l})_0 \quad (6.4.10)$$

De cette dernière égalité résulte l'égalité des symboles de Christoffel de première espèce en  $u^i = u_0^i$ . La relation (5.1.35), nous donne finalement :

$$(\partial_k g_{ij})_0 = (\partial_k \gamma_{ij})_0 \quad (6.4.11)$$

Par suite, l'élément linéaire (6.4.1) de l'espace euclidien, rapporté à ce système de coordonnées curvilignes  $u^i$ , jouit de la propriété que, pour  $u^i = u_0^i$ , ses coefficients et leurs dérivées partielles du premier ordre ont les mêmes valeurs numériques que celles de l'élément linéaire de l'espace riemannien donné.

Les métriques euclidiennes osculatrices, pour une métrique riemannienne donnée, sont indépendantes du choix des coordonnées. En effet, pour un changement de variables donné, les nouvelles valeurs numériques des  $g_{ij}$  et de leurs dérivées partielles du premier ordre sont connues dès que l'on connaît les anciennes valeurs numériques de ces mêmes quantités.

## 6.4.2 Espace euclidien osculateur

Comme on l'a fait remarquer précédemment pour l'espace euclidien tangent, au lieu de parler de métrique euclidienne osculatrice, on peut parler *d'espace euclidien osculateur*.

Les propriétés géométriques de l'espace euclidien osculateur seront des propriétés géométriques intrinsèques de l'espace de Riemann. Nous allons ainsi pouvoir définir la différentielle absolue des vecteurs et des tenseurs dans un espace de Riemann.

**Exemple d'espace euclidien osculateur en un point** - On a vu qu'une surface  $S$ , plongée dans l'espace à trois dimensions, peut être regardée comme un espace riemannien à deux dimensions. Considérons un point  $M$  de la surface  $S$  et projetons orthogonalement les points de la surface sur le plan tangent en  $M$ . On obtient ainsi une représentation particulière de  $S$  sur un plan euclidien et l'on va voir que la métrique du plan est osculatrice à celle de la surface.

Pour cela, plaçons le point  $M$  à l'origine des coordonnées et choisissons des axes rectangulaires tels que le plan  $x, y$ , soit le plan tangent à la surface en  $M$ . L'élément linéaire du plan est donné par :

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 \quad (6.4.12)$$

Celui de la surface, défini par  $z = z(x, y)$ , s'exprime en fonction des dérivées partielles du premier ordre de la fonction  $z$ . C'est un cas particulier de l'expression (6.1.5) avec  $u^1 = x$ ,  $u^2 = y$ ,  $z(u^1, u^2) = z(x, y)$ .

Notons  $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ , on a pour l'élément linéaire de la surface  $S$  :

$$ds^2 = (1 + p^2) dx^2 + (1 + q^2) dy^2 + 2pq dx dy \quad (6.4.13)$$

À l'origine des coordonnées, c'est-à-dire au point  $M$ , on a :  $p = q = 0$ . Par suite, les coefficients des deux éléments linéaires sont égaux, ainsi que les dérivées partielles du premier ordre de ces coefficients. On a donc ici une interprétation concrète de l'espace euclidien osculateur en un point  $M$  ; c'est, dans le cas présent, le plan tangent en  $M$  à la surface  $S$ .

### 6.4.3 Différentielle absolue et dérivée covariante des tenseurs

**Champ de tenseurs d'un espace riemannien** - Nous allons étendre aux espaces de Riemann les notions d'analyse tensorielle euclidienne relative aux tenseurs attachés à deux points infiniment voisins. Avant cela, définissons la notion de champ de tenseurs sur un espace de Riemann.

Pour cela, en chaque point  $M$  d'un espace de Riemann  $\mathcal{R}_n$ , faisons correspondre dans l'espace euclidien osculateur un repère  $(m, \mathbf{e}_i)$  compatible avec la métrique riemannienne en ce point. Cela permet de se donner les composantes d'un tenseur par rapport à ce repère. La donnée de ces composantes en chaque point  $M$  correspondant de l'espace de Riemann constitue la donnée du champ de tenseurs.

Ainsi, par exemple, les  $g_{ij}$  du tenseur fondamental d'un espace de Riemann, donnés en chaque point  $M$ , constituent les composantes covariantes d'un champ de tenseurs.

**Différentielle absolue d'un vecteur** - Considérons un champ de vecteurs  $\mathbf{V}$  attaché au point  $M_0$  d'un espace de Riemann. Ces vecteurs ont pour différentielle absolue de leurs composantes contravariantes  $v^i$ , dans l'espace euclidien osculateur, par rapport au repère naturel en  $M_0$  :

$$(D v^i)_0 = (dv^i)_0 + (\omega_j^i)_0 v_0^j \quad (6.4.14)$$

avec  $(\omega_j^i)_0 = (\Gamma_{kj}^{*i})_0 du^k$ . Les symboles de Christoffel  $\Gamma_{kj}^{*i}$  sont ceux de l'espace euclidien osculateur et ils sont égaux aux valeurs des symboles de Christoffel  $(\Gamma_{kj}^i)_0$  calculés à partir de la métrique riemannienne, en  $u^i = u_0^i$ .

On est ainsi conduit à l'extension de la notion de différentielle absolue à un espace quelconque de Riemann. Par définition, pour un vecteur  $\mathbf{V}$  d'un espace riemannien, la différentielle absolue a pour composantes contravariantes :

$$D v^i = dv^i + \omega_j^i v^j = dv^i + \Gamma_{kj}^i v^j du^k \quad (6.4.15)$$

Si le champ de vecteurs  $\mathbf{v}$  est donné par ses composantes covariantes, sa différentielle absolue a pour composantes covariantes :

$$D v_i = dv_i - \omega_i^j v_j \quad (6.4.16)$$

**Dérivée covariante** - On généralise de même aux espaces de Riemann la notion de dérivée covariante d'un vecteur dont les quantités :

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma_{kj}^i v^j \quad (6.4.17)$$

sont les composantes covariantes du tenseur dérivée covariante, en fonction des composantes contravariantes  $v^j$  du vecteur  $\mathbf{V}$ .

De même, on a les composantes de la dérivée covariante, en fonction des composantes covariantes  $v_i$  du vecteur  $\mathbf{V}$  sous la forme :

$$\nabla_k v_i = \partial_k v_i - \Gamma_{ki}^j v_j \quad (6.4.18)$$

Les formules donnant la différentielle absolue et la dérivée covariante des tenseurs euclidiens sont généralisées de la même façon aux tenseurs riemanniens.

#### 6.4.4 Transport parallèle

**Définitions** - Deux vecteurs d'origines infiniment voisines  $M$  et  $M'$  sont dits *équipollents* s'ils sont équipollents dans l'espace euclidien osculateur en  $M$ .

Dans l'espace euclidien, les vecteurs étant parallèles, de même sens et de même longueur, leur différence géométrique est nulle. Par suite, dans l'espace de Riemann, la différentielle absolue du vecteur situé en  $M$  est nulle. Les conditions d'équipollence d'un vecteur  $\mathbf{V}$  de composantes contravariantes  $v^i$  sont donc :

$$D v^i = D v_i = 0 \quad (6.4.19)$$

**Transporter par équipollence** un vecteur  $\mathbf{V}$  d'origine  $M$  en un point infiniment voisin  $M'$ , c'est construire le vecteur  $\mathbf{V}'$ , d'origine  $M'$ , équipollent à  $\mathbf{V}$ . On dira encore que l'on effectue un **transport parallèle**.

**Exemple** - En géométrie euclidienne, la notion de parallélisme de deux vecteurs peut être définie en considérant l'angle que font ces vecteurs par rapport à une même droite. Si leur direction fait un même angle  $\alpha$  avec une même droite, deux vecteurs sont parallèles au sens euclidien du terme.

Voyons ce qu'il en est pour un espace de Riemann. Considérons, par exemple, une sphère dont un grand cercle passe par deux points  $M$  et  $M'$  (Fig.6.1). Deux vecteurs  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{v}'$ , localisés respectivement aux points  $M$  et  $M'$ , situés dans des plans tangents à la sphère, sont précisément situés dans l'espace euclidien osculateur à la surface sphérique en chaque point.

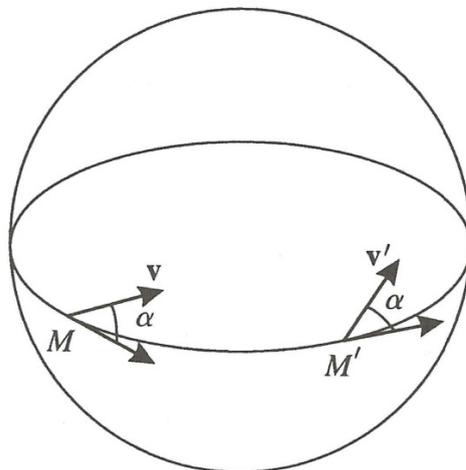


FIGURE 6.1

Si ces deux vecteurs forment un même angle  $\alpha$  avec les tangentes en  $M$  et  $M'$  à l'arc de grand cercle passant par ces deux points, on dira qu'ils sont *parallèles sur la sphère*. On aboutit ainsi à la généralisation de la notion de parallélisme sur une surface de Riemann. Lorsque ces deux vecteurs ont même module, on dira qu'ils sont équipollents.

#### 6.4.5 Géodésiques d'un espace de Riemann

Les géodésiques constituent, pour les espaces de Riemann, la généralisation des droites de l'espace euclidien. Par définition, les géodésiques constituent les extrémales de la longueur des arcs de courbe joignant deux points déterminés ; leur équation est donnée par la même relation (5.1.60) que pour les espaces euclidiens, la démonstration étant identique puisque seuls les  $g_{ij}$  diffèrent.

On peut obtenir l'équation des géodésiques par des considérations d'ordre cinématique, par analogie avec la mécanique classique. Considérons dans un espace de Riemann de coordonnées  $u^i$ , un point mobile  $M$  qui se déplace en fonction d'un paramètre  $t$  qui représente, par exemple, le temps. Le vecteur vitesse  $\mathbf{V}$  du point  $M$  a pour composantes contravariantes :

$$v^i = \frac{du^i}{dt} \quad (6.4.20)$$

et les composantes contravariantes du vecteur accélération sont données par :

$$a^i = \frac{dv^i}{dt} = \frac{d^2u^i}{dt^2} + \Gamma_{kj}^i \frac{du^j}{dt} \frac{du^k}{dt} \quad (6.4.21)$$

Si le mobile a une accélération constamment nulle, alors sa différentielle absolue  $dv^i$  est nulle. Par suite, sa vitesse est constamment équipollente à elle-même. Dans l'espace euclidien, les trajectoires parcourues par un tel mobile sont des droites. Dans un espace de Riemann, les trajectoires de ce mobile vont être des courbes appelées **les géodésiques de l'espace riemannien**. Les géodésiques constituent donc la généralisation, en géométrie riemannienne, des droites de l'espace euclidien. En écrivant  $a^i = 0$  dans l'équation (6.4.21), on obtient ainsi l'équation des géodésiques.

## 6.5 Déplacement le long d'une courbe

### 6.5.1 Développement d'une courbe

Soit une courbe quelconque  $C$  d'un espace de Riemann  $\mathcal{R}_n$  définie par une représentation paramétrique  $u^i(t)$ . Un point  $M_0$  de la courbe est pris comme origine et correspond à la valeur  $t = 0$  du paramètre  $t$ .

Nous nous proposons de faire correspondre, à chaque point  $M$  de la courbe  $C$ , un point  $m$  et un repère  $(m, \mathbf{e}_i)$  de l'espace euclidien  $\varepsilon_n$ . Pour cela, considérons dans l'espace euclidien un point  $m_0$  de départ auquel nous attachons un repère cartésien  $(m_0, \mathbf{e}_i^0)$ , déterminé en grandeur et en forme, mais pas en orientation, par les valeurs numériques des  $g_{ij}$  de l'espace de Riemann au point  $M_0$ ; on a donc :

$$\mathbf{e}_i^0 \cdot \mathbf{e}_j^0 = (g_{ij})_0 \quad (6.5.1)$$

D'autre part, les points  $m$  de l'espace euclidien et les vecteurs des repères naturels  $(m, \mathbf{e}_i)$  vérifient les relations différentielles :

$$d\mathbf{m} = du^i \mathbf{e}_i \quad ; \quad d\mathbf{e}_i = (\Gamma_{ik}^l)_M du^k \mathbf{e}_l \quad (6.5.2)$$

où les  $(\Gamma_{ik}^l)_M$  sont les valeurs des symboles de Christoffel calculés à partir des  $g_{ij}$  de la métrique riemannienne au point  $M$  de la courbe  $C$ . Ce sont donc des fonctions qui dépendent du seul paramètre  $t$ .

Les fonctions inconnues  $\mathbf{m}(t)$  et  $\mathbf{e}_k(t)$  peuvent être obtenues par intégration du système différentiel (6.5.2) avec les conditions initiales précédentes pour  $t = 0$ . On obtient alors une courbe, définie par  $\mathbf{m}(t)$ , qui est appelée le développement de la courbe  $C$  sur l'espace euclidien. On notera  $\Gamma$  le développement de la courbe  $C$ .

**Métrique euclidienne de raccordement** - Plus précisément, on va montrer qu'il existe dans l'espace euclidien  $\varepsilon_n$  une métrique telle que que ses coefficients  $\gamma_{ij}$  et leurs dérivées premières, pris le long de la courbe  $\mathbf{m}(t)$ , ont les mêmes valeurs numériques que les coefficients  $g_{ij}$  et leurs dérivées premières, aux points homologues de la courbe  $C$  dans l'espace de Riemann.

Cela signifie qu'il existe une métrique euclidienne osculatrice à la métrique donnée le long de la courbe  $C$ . On dira que cette métrique euclidienne osculatrice constitue **la métrique euclidienne de raccordement** le long de la courbe  $C$ .

**Détermination d'une métrique euclidienne de raccordement** - Soit une courbe  $C$  d'un espace de Riemann  $\mathcal{R}_n$  telle que :

$$u^2 = u^3 = \dots = u^n = 0 \quad (6.5.3)$$

ce qui ne restreint pas la généralité puisque l'on peut toujours faire un changement des coordonnées de  $\mathcal{R}_n$ . Les variations de la coordonnée  $u^1(t)$  dépendent du paramètre  $t$ .

Utilisons la convention suivante sur les indices : ceux notés par des lettres grecques prendront les valeurs 2 à  $n$ , tandis que ceux notés par des lettres latines prendront les valeurs 1 à  $n$ . Dans ces conditions, le développement  $\Gamma$  de la courbe  $C$  est une courbe de l'espace euclidien déterminée par les relations différentielles suivantes :

$$(a) \quad d\mathbf{m} = du^1 \mathbf{e}_1 \quad ; \quad (b) \quad d\mathbf{e}_i = (\Gamma_{1i}^k)_{u^\alpha=0} du^1 \mathbf{e}_k \quad (6.5.4)$$

Cherchons à présent un système de coordonnées  $u^i$  de l'espace euclidien qui donne une métrique euclidienne osculatrice à la métrique riemannienne simultanément en tous les points de  $C$ . Pour cela, à tout point  $P$  de coordonnées  $u^i$ , situé au voisinage d'un point  $M$  de  $C$ , faisons correspondre un point  $p$  au voisinage de  $m$  dans  $\varepsilon_n$  en posant :

$$\mathbf{m}p = u^\beta \mathbf{e}_\beta + (1/2) (\Gamma_{\beta\gamma}^i)_{u^\alpha=0} u^\beta u^\gamma \mathbf{e}_i + \phi^i(u^\beta) \mathbf{e}_i \quad (6.5.5)$$

où les fonctions  $\phi^i(u^\beta)$  sont du troisième ordre par rapport aux variables  $u^\beta$ . On obtient ainsi un système de coordonnées curvilignes  $u^i$ , dans  $\varepsilon_n$ , qui permet de localiser chaque point  $p$  au voisinage de la courbe  $C$ . Pour un tel système de coordonnées  $u^i$ , le repère naturel au point  $m(u^\alpha = 0)$  est parfaitement défini par les vecteurs donnés par les relations (6.5.4) et (6.5.5), à savoir :

$$\left( \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u^1} \right)_{u^\alpha=0} = \frac{d\mathbf{m}}{du^1} = \mathbf{e}_1 \quad ; \quad \left( \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u^\beta} \right)_{u^\alpha=0} = \mathbf{e}_\beta \quad (6.5.6)$$

On obtient ainsi un repère naturel identique à celui qui a été obtenu précédemment par intégration du système différentiel (6.5.2) lors du développement de la courbe  $C$ . La métrique de  $\varepsilon_n$ , dans le système de coordonnées  $u^i$ , admet donc pour coefficients  $\gamma_{ij}$  au point  $m$  les produits scalaires  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ .

Montrons que les coefficients  $\gamma_{ij}$  sont égaux, en tout point de la courbe  $\Gamma$ , aux coefficients  $g_{ij}$  de la métrique riemannienne. Pour cela, utilisons la relation (6.5.4)(b) dans l'expression de la différentielle du produit scalaire  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ , soit :

$$d(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot d\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \cdot d\mathbf{e}_i = (\Gamma_{ik}^l)_M (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) du^k + (\Gamma_{jk}^l)_M (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i) du^k \quad (6.5.7)$$

De leur côté, les coefficients  $g_{ij}$  de la métrique riemannienne sont liés aux symboles de Christoffel par la relation (5.1.26), à savoir :

$$dg_{ij} = \omega_{ij} + \omega_{ji} = (\Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki}) du^k \quad (6.5.8)$$

Ces coefficients vérifient donc les relations différentielles :

$$dg_{ij} = (\Gamma_{ik}^l)_M g_{jl} du^k + (\Gamma_{jk}^l)_M g_{il} du^k \quad (6.5.9)$$

La comparaison des relations (6.5.7) et (6.5.9) montrent que les quantités  $(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)$  et  $g_{ij}$  vérifient respectivement un même système différentiel en tout point  $M$  de la courbe  $C$ . Puisqu'on a, au point  $M_0$ , selon (6.5.1), des conditions initiales identiques, à savoir :  $\mathbf{e}_i^0 \cdot \mathbf{e}_j^0 = (g_{ij})_0$ , on obtient en tout point  $M$  de  $C$  :

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ij} \quad (6.5.10)$$

Les métriques euclidiennes et riemannienne sont donc tangentes en tous les points de la courbe  $C$ . Montrons qu'elles sont également osculatrices le long de cette courbe. Pour cela, il suffit de démontrer que les valeurs numériques  $(\Gamma_{jk}^l)_M$  sont également les valeurs des symboles de Christoffel sur la courbe  $\Gamma$  pour la métrique euclidienne.

Les symboles de Christoffel sont les coefficients des vecteurs  $\mathbf{e}_k$  dans la décomposition du vecteur  $\left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial u^i \partial u^1}\right)$ . Or, d'après les relations (6.5.4)(b) et (6.5.6) on a pour la coordonnée  $u^1$  :

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial u^i \partial u^1}\right)_{u^\alpha=0} = \frac{d\mathbf{e}_i}{du^1} = (\Gamma_{1i}^k)_{u^\alpha=0} \mathbf{e}_k \quad (6.5.11)$$

et pour les autres coordonnées, on obtient d'après la relation (1.5.30) :

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial u^\beta \partial u^\gamma}\right)_{u^\alpha=0} = (\Gamma_{\beta\gamma}^k)_{u^\alpha=0} \mathbf{e}_k \quad (6.5.12)$$

La métrique euclidienne est donc osculatrice le long de la courbe  $C$  et constitue une métrique euclidienne de raccordement le long de cette courbe.

**Espace euclidien de raccordement** - De même que pour les métriques euclidiennes tangentes ou osculatrices auxquelles on a associé un espace euclidien tangent ou osculateur, on peut associer à la métrique euclidienne de raccordement un **espace euclidien de raccordement**.

Grâce à la détermination, en chaque point  $m$ , d'un repère cartésien, on a en réalité développé sur l'espace euclidien non seulement la courbe donnée mais encore toute la région infiniment petite de l'espace de Riemann qui entoure cette courbe. La relation (1.5.30) définit les coordonnées curvilignes de cet espace euclidien de raccordement.

### 6.5.2 Déplacement associé à un cycle

Le développement d'une courbe et l'utilisation d'une métrique euclidienne de raccordement permettent de mettre en évidence diverses propriétés géométriques des espaces de Riemann. Étudions auparavant des exemples de transport parallèle le long d'une courbe.

**Déplacement le long d'un petit cercle d'une sphère** - On a une représentation concrète d'un espace de raccordement le long d'une courbe  $C$  en projetant orthogonalement les points d'une surface de Riemann sur la développable  $S$  circonscrite à la surface le long de la courbe  $C$ . Dans ce cas, les métriques des deux surfaces sont osculatrices en chaque point de  $C$  et d'autre part, la métrique de  $S$  est euclidienne. Par suite, la surface  $S$  déroulée sur un plan, donne un espace euclidien de raccordement le long de la courbe  $C$ .

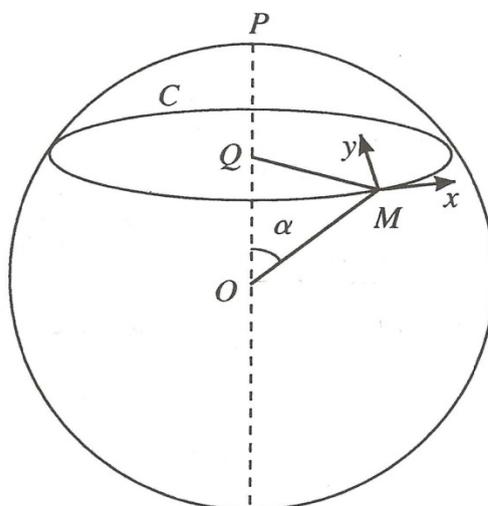


FIGURE 6.2

On a vu qu'une surface sphérique à deux dimensions constitue un espace de Riemann. Considérons sur une sphère de rayon  $R$ , un petit cercle  $C$  de pôle  $P$ . Soit  $\alpha$  le demi-angle au sommet du cône qui a pour sommet le centre  $O$  de la sphère et pour base le petit cercle  $C$  (Fig.6.2).

Dans le cas de la sphère considérée, le développement du cercle  $C$  sur un plan s'obtient en développant la développable circonscrite à la sphère le long du cercle. Cette développable est un cône dont les génératrices ont pour longueur  $R \tan \alpha$ . La surface du cône, déroulée sur un plan, fournit un espace euclidien (Fig.6.3).

Le développement de la courbe  $C$  donne un arc de cercle, de centre  $Q$  et de rayon  $R$ ; la longueur de cet arc de cercle est celle du petit cercle de la sphère, à savoir  $2\pi R \sin \alpha$ . On voit que le point de départ  $m$  dans l'espace euclidien ne coïncide pas

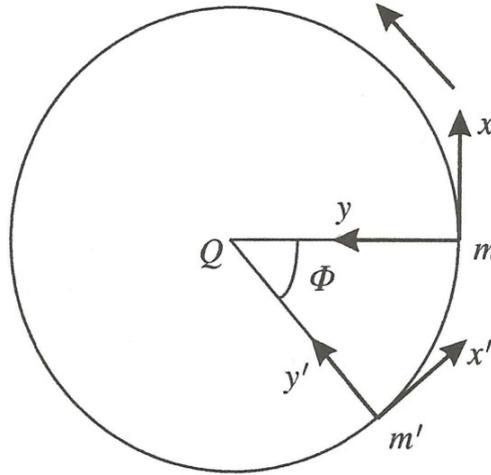


FIGURE 6.3

avec le point d'arrivée  $m'$ , après avoir parcouru le cycle formé dans le cas présent par le cercle  $C$ .

Si  $\Phi$  désigne l'angle  $m'Qm$ , on a :

$$(R \tan \alpha) (2\pi - \Phi) = 2\pi R \sin \alpha \quad (6.5.13)$$

D'autre part, l'aire limitée sur la sphère par le petit cercle, est en coordonnées sphériques :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\alpha R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha) \quad (6.5.14)$$

On obtient la relation suivante entre l'aire  $S$  déterminée par le cycle, ici la courbe  $C$ , et le carré du rayon de courbure de la surface considérée, ici la sphère de rayon  $R$  :

$$\Phi = S/R^2 \quad (6.5.15)$$

Attachons à chaque point  $M$  du cercle deux axes rectangulaires,  $Mx$  tangent au cercle dans le sens du parcours choisi,  $My$  tangent à la méridienne passant par  $M$ . Ces axes occupent les positions représentées sur la figure 6.2. Effectuons un transport parallèle des vecteurs portés par ces axes. Dans l'espace euclidien de raccordement, ces axes ont les positions  $mx$  et  $my$  au début du parcours, et les positions  $m'x'$  et  $m'y'$  en fin de parcours du cercle (Fig.6.3). Pour retrouver la position initiale, il faut, dans l'espace euclidien, effectuer un déplacement associé formé par :

1. d'une part une translation qui amène  $m'$  en  $m$  et qui a pour grandeur :

$$2 R \tan \alpha \sin(\Phi/2) \quad (6.5.16)$$

2. d'autre part, une rotation qui amène le repère  $x'm'y'$  à être parallèle au repère  $xmy$ . C'est précisément une rotation de l'angle  $\Phi$ , effectuée dans le sens de parcours du cycle. Cette rotation est égale au produit de l'aire  $S$  limitée par le cycle par la courbure totale  $K = (1/R^2)$  de la sphère.

**Déplacement le long d'un triangle sphérique** - Retrouvons par un calcul de géométrie sphérique les mêmes propriétés que ci-dessus mais pour un cycle différent.

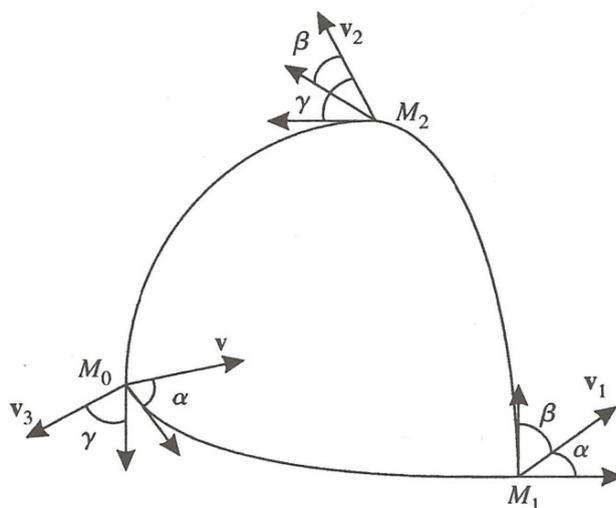


FIGURE 6.4

Considérons un triangle sphérique  $M_0M_1M_2$  formé par les intersections de trois géodésiques. Appelons  $a_0, a_1, a_2$ , les valeurs des angles respectifs des tangentes aux géodésiques aux points  $M_0, M_1, M_2$ . Soit un vecteur  $\mathbf{v}$  qui au point  $M_0$  fait un angle  $\alpha$  avec la tangente en ce point à la géodésique allant de  $M_0$  à  $M_1$  (Fig.6.4).

Réalisons un transport parallèle du vecteur  $\mathbf{v}$  le long de  $M_0M_1$ . Appelons  $\mathbf{v}_1$  le vecteur  $\mathbf{v}$  lorsqu'il est transporté parallèlement au point  $M_1$ ; les vecteurs  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{v}_1$  sont **équipollents** par rapport à la géodésique  $M_0M_1$ . En  $M_1$ , le vecteur  $\mathbf{v}_1$  fait avec la tangente  $M_1M_2$  un angle égal à  $\beta = (\pi - a_1 - \alpha)$ .

Transportons parallèlement le vecteur  $\mathbf{v}_1$  le long de la géodésique  $M_1M_2$ ; on obtient le vecteur  $\mathbf{v}_2$  équipollent à  $\mathbf{v}_1$  au point  $M_2$ . Puis on effectue un transport parallèle de  $\mathbf{v}_2$  le long de  $M_2M_0$  et l'on obtient  $\mathbf{v}_3$  au point  $M_0$ . Finalement, après un transport parallèle selon ce circuit fermé, le vecteur initial  $\mathbf{v}$  a tourné d'un angle  $\epsilon$  tel que :

$$\epsilon = a_0 + a_1 + a_2 - \pi \quad (6.5.17)$$

L'angle  $\epsilon$  est appelé **excès sphérique du triangle**. cette quantité, nulle pour un triangle plan, est positive pour un triangle sphérique. On démontre que l'aire du

triangle sphérique, pour une sphère de rayon  $R$ , est égale à  $R^2 \epsilon$ . On retrouve l'expression (6.5.15) donnant la relation entre l'angle de rotation du vecteur transporté et l'aire de la surface délimitée par le circuit parcouru.

**Déplacement associé** - La propriété de rotation d'un vecteur transporté parallèlement le long d'un cycle se généralise pour une surface quelconque.

De manière générale, si l'on considère dans un espace de Riemann, un cycle partant d'un point  $M_0$ , on va développer ce cycle dans l'espace euclidien en partant de  $m_0$  et du repère  $(m_0, \mathbf{e}_i)$ , on obtient, après avoir transporté parallèlement le repère le long du cycle, une position finale  $m'_0$  et un repère  $(m'_0, \mathbf{e}'_i)$ . Pour retrouver la position initiale, dans l'espace euclidien, il faudra effectuer un certain déplacement qui amène le point  $m'_0$  en  $m_0$  et le repère  $(m'_0, \mathbf{e}'_i)$  en  $(m_0, \mathbf{e}_i)$ . Ce déplacement est dit associé au cycle considéré.

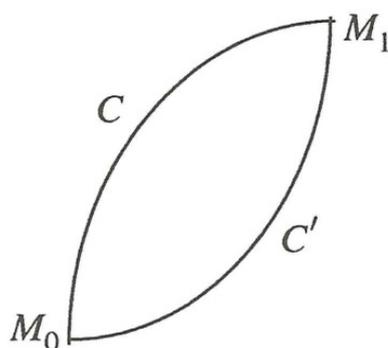


FIGURE 6.5

Le déplacement associé à un cycle peut être déterminé d'une façon équivalente en considérant deux chemins différents le long de ce cycle. Considérons un cycle  $M_0 C M_1 C' M_0$  (Fig.6.5) d'un espace de Riemann et partons du point intermédiaire  $M_1$  pour aller vers  $M_0$  selon deux chemins différents  $M_1 C M_0$  et  $M_1 C' M_0$ . Le développement de ces deux chemins sur l'espace euclidien de raccordement donne des repères dont les positions finales, en  $M_0$ , sont distinctes. Le déplacement qui amène ces deux repères à coïncider est identique au déplacement associé au cycle.

### 6.5.3 Expression du déplacement associé à un cycle

Le calcul du déplacement associé à un cycle élémentaire va nous permettre d'exprimer la rotation subie par un vecteur après un transport par équipollence le long d'un cycle. La méthode suivante a été imaginée par Elie Cartan.

Pour cela, considérons deux systèmes de différentiation désignés respectivement par les symboles  $d$  et  $\delta$ . Soit un point  $M$  quelconque, de coordonnées  $u^i$ , d'un espace

de Riemann ; soit  $M_1$  le point de coordonnées  $(u^i + du^i)$  et  $M_2$  le point de coordonnées  $(u^i + \delta u^i)$ . Le vecteur  $MM_1$  définit un déplacement élémentaire  $d_1$  ; le vecteur  $MM_2$ , un déplacement élémentaire  $d_2$ . Effectuons à présent sur le point  $M_1$ , un déplacement élémentaire  $d_2$ , on obtient un point  $M_3$  de coordonnées :

$$u^i + du^i + \delta(u^i + du^i) = u^i + du^i + \delta u^i + \delta du^i \quad (6.5.18)$$

Effectuons de même sur  $M_2$ , le déplacement élémentaire  $d_1$  ; on obtient un point  $M'_3$  de coordonnées :

$$u^i + \delta u^i + d(u^i + \delta u^i) = u^i + \delta u^i + du^i + d\delta u^i \quad (6.5.19)$$

On voit que le point  $M'_3$  coïncidera avec le point  $M_3$  si l'on a :

$$d\delta u^i = \delta du^i \quad (6.5.20)$$

autrement dit les deux différentiations sont interchangeables. Dans ce cas, si  $f(u^i)$  est une fonction deux fois continuellement dérivable des variables  $u^i$ , on a :

$$\delta f = \partial_i f \delta u^i \quad \text{et} \quad d\delta f = \partial_{ij} f \delta u^i du^j + \partial_i f d\delta u^i \quad (6.5.21)$$

Un même calcul pour  $\delta df$  nous donne, en admettant l'égalité (6.5.20) :

$$d\delta f = \delta df \quad (6.5.22)$$

Nous supposons par la suite que les deux différentiations considérées sont échangeables entre elles. Considérons alors un cycle élémentaire  $M M_1 M_3 M_2 M$  d'un espace riemannien, formé de quatre cotés (Fig.6.6) constituant un quasi-parallélogramme. Nous supposons que ce cycle est parcouru dans l'ordre indiqué par la notation.

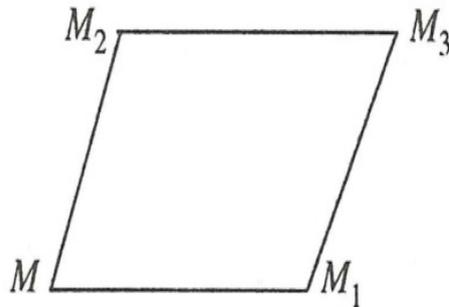


FIGURE 6.6

Développons les deux chemins qui du point  $M$  vont au point  $M_3$ , l'un étant  $M M_1 M_3$  et l'autre  $M M_2 M_3$ . Développons d'abord sur l'espace euclidien le côté  $M M_1$  du cycle. Au point  $M$  correspond un repère euclidien  $(m, \mathbf{e}_i)$  ; lorsqu'on passe au point infiniment voisin  $M_1$ , on a les variations élémentaires suivantes :

$$d\mathbf{m} = du^k \mathbf{e}_k \quad ; \quad d\mathbf{e}_i = \omega^k_i(d) \mathbf{e}_k \quad (6.5.23)$$

où  $\omega_i^k(d)$  désigne la forme différentielle prise pour les  $du^k$ .

De même, le développement de  $M M_2$  donne les variations :

$$\delta \mathbf{m} = \delta u^k \mathbf{e}_k \quad ; \quad \delta \mathbf{e}_i = \omega_i^k(\delta) \mathbf{e}_k \quad (6.5.24)$$

Le développement du chemin  $M_1 M_3$  va se faire en partant, dans l'espace euclidien, du point  $m_1$  et du repère  $(m_1, (\mathbf{e}_i)_1)$ . Pour cela, il faut appliquer l'opération  $\delta$  définie par les formules (6.5.24) mais au lieu de considérer les coordonnées  $u^i$  il faut à présent les remplacer par  $u^i + du^i$ , puisqu'on part du point  $M_1$ . On obtient, dans l'espace euclidien, un point d'arrivée  $m_3$  et un repère  $(m_3, (\mathbf{e}_i)_3)$  tels que :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}\mathbf{m}_3 &= \mathbf{d}\mathbf{m} + \delta(\mathbf{m} + \mathbf{d}\mathbf{m}) = \mathbf{d}\mathbf{m} + \delta \mathbf{m} + \delta \mathbf{d}\mathbf{m} \\ (\mathbf{e}_i)_3 &= \mathbf{e}_i + \mathbf{d}\mathbf{e}_i + \delta(\mathbf{e}_i + \mathbf{d}\mathbf{e}_i) \end{aligned} \quad (6.5.25)$$

Le développement du chemin  $M M_2 M_3$  nous donne un point d'arrivée  $m'_3$  et un repère en ce point  $(m'_3, (\mathbf{e}'_i)_3)$  tels que :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}\mathbf{m}'_3 &= \delta \mathbf{m} + \mathbf{d}(\mathbf{m} + \delta \mathbf{m}) = \delta \mathbf{m} + \mathbf{d}\mathbf{m} + \mathbf{d}\delta \mathbf{m} \\ (\mathbf{e}'_i)_3 &= \mathbf{e}_i + \mathbf{d}\mathbf{e}_i + \delta(\mathbf{e}_i + \mathbf{d}\mathbf{e}_i) \end{aligned} \quad (6.5.26)$$

Par suite, pour passer du repère  $(m_3, (\mathbf{e}_i)_3)$  au repère  $(m'_3, (\mathbf{e}'_i)_3)$ , il faut effectuer un déplacement donné par les formules :

$$\mathbf{m}\mathbf{m}'_3 - \mathbf{m}\mathbf{m}_3 = \mathbf{d}\delta \mathbf{m} - \delta \mathbf{d}\mathbf{m} \quad (6.5.27)$$

$$(\mathbf{e}'_i)_3 - (\mathbf{e}_i)_3 = \mathbf{d}\delta \mathbf{e}_i - \delta \mathbf{d}\mathbf{e}_i \quad (6.5.28)$$

Calculons l'expression du second membre de (6.5.27) à l'aide des relations (6.5.23) et (6.5.24), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\delta \mathbf{m} - \delta \mathbf{d}\mathbf{m} &= \mathbf{d}\delta u^k \mathbf{e}_k - \delta \mathbf{d}u^k \mathbf{e}_k = \delta u^k \mathbf{d}\mathbf{e}_k - \mathbf{d}u^k \delta \mathbf{e}_k \\ &= [\delta u^k \omega_i^k(d) - \mathbf{d}u^k \omega_i^k(\delta)] \mathbf{e}_i = [\Gamma_{sr}^i - \Gamma_{rs}^i] \mathbf{d}u^r \delta u^s \mathbf{e}_i = 0 \end{aligned} \quad (6.5.29)$$

Les deux développements conduisent, à l'approximation considérée, au même point  $m_3$  pour le repère final. Comparons à présent les vecteurs des deux repères qui ont transité par deux chemins différents. On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\delta \mathbf{e}_i - \delta \mathbf{d}\mathbf{e}_i &= \mathbf{d}[\omega_i^k(\delta) \mathbf{e}_k - \delta \omega_i^k(d) \mathbf{e}_k] \\ &= [\mathbf{d}\omega_i^j(\delta) - \delta \omega_i^j(d)] \mathbf{e}_j + \omega_i^k(\delta) \mathbf{d}\mathbf{e}_k - \omega_i^k(d) \delta \mathbf{e}_k \end{aligned} \quad (6.5.30)$$

Les relations (6.5.23) et (6.5.24) nous donnent :

$$\mathbf{d}\delta \mathbf{e}_i - \delta \mathbf{d}\mathbf{e}_i = [\mathbf{d}\omega_i^j(\delta) - \delta \omega_i^j(d) + \omega_i^k(\delta) \omega_j^k(d) - \omega_i^k(d) \omega_j^k(\delta)] \mathbf{e}_j \quad (6.5.31)$$

Posons :

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j(\delta) - \delta\omega_i^j(d) + \omega_i^k(\delta)\omega_k^j(d) - \omega_i^k(d)\omega_k^j(\delta) \quad (6.5.32)$$

Le déplacement associé au cycle élémentaire considéré est alors donné par :

$$d\delta \mathbf{e}_i - \delta d\mathbf{e}_i = \Omega_i^j \mathbf{e}_j \quad (6.5.33)$$

Les repères  $(m_3, (\mathbf{e}_i)_3)$  et  $(m'_3, (\mathbf{e}'_i)_3)$  associés aux deux développements ont des orientations différentes mais ils ont même forme et même grandeur puisque les produits scalaires deux à deux des vecteurs de ces repères sont donnés par les valeurs en  $M_3$  des coefficients  $g_{ij}$  de la métrique riemannienne. Par suite, les quantités  $\Omega_i^j$  définissent une rotation qui fait passer d'un repère à l'autre.

En conclusion, on voit qu'un déplacement associé à un cycle élémentaire laisse fixe l'origine du cycle et se réduit donc à une rotation autour de ce point.

**Tenseur de rotation** - Montrons que les quantités  $\Omega_i^j$  sont les composantes d'un tenseur. Pour cela, utilisons le changement de base du repère naturel :

$$\mathbf{e}_i = A_i'^j \mathbf{e}'_j \quad (6.5.34)$$

d'où :

$$d\mathbf{e}_i = A_i'^j d\mathbf{e}'_j + (dA_i'^j) \mathbf{e}'_j \quad (6.5.35)$$

Appliquons à la relation précédente le symbole de différentiation  $\delta$ , il vient :

$$\delta d\mathbf{e}_i = A_i'^j \delta d\mathbf{e}'_j + (\delta A_i'^j) d\mathbf{e}'_j + (\delta dA_i'^j) \mathbf{e}'_j + (dA_i'^j) \delta \mathbf{e}'_j \quad (6.5.36)$$

Échangeant l'ordre de différentiation et soustrayant membre à membre, en remarquant que l'on a :  $\delta dA_i'^j = d\delta A_i'^j$ , on obtient la différence géométrique des vecteurs :

$$d\delta \mathbf{e}_i - \delta d\mathbf{e}_i = A_i'^j (d\delta \mathbf{e}'_j - \delta d\mathbf{e}'_j) \quad (6.5.37)$$

Les quantités  $(d\delta \mathbf{e}'_j - \delta d\mathbf{e}'_j)$  sont les déplacements géométriques des nouveaux vecteurs  $\mathbf{e}'_j$  et ces déplacements sont de la forme :

$$d\delta \mathbf{e}'_j - \delta d\mathbf{e}'_j = \Omega_j'^k \mathbf{e}'_k \quad (6.5.38)$$

Les relations (6.5.36) et (6.5.37) nous donnent, compte tenu de l'expression (6.5.33) :

$$\Omega_i^l \mathbf{e}_l = A_i'^j \Omega_j'^k \mathbf{e}'_k = A_i'^j \Omega_j'^k A_k^l \mathbf{e}_l \quad (6.5.39)$$

Par identification des coefficients des vecteurs  $\mathbf{e}_l$  dans les deux membres de cette dernière relation, il vient :

$$\Omega_i^l = A_i'^j A_k^l \Omega_j'^k \quad (6.5.40)$$

ce qui montre que les quantités  $\Omega_i^l$  sont les composantes mixtes d'un tenseur du second ordre.

## 6.6 Tenseur de Riemann-Christoffel

### 6.6.1 Détermination du tenseur de Riemann-Christoffel

Nous avons vu que le développement de deux chemins différents, partant et aboutissant à deux mêmes points, donne des repères dont les positions finales sont distinctes. Par suite, les composantes de la dérivée seconde d'un vecteur, calculées selon deux chemins différents, ne sont pas égales.

Calculons la dérivée covariante seconde d'un vecteur en utilisant deux chemins différents. Considérons un espace de Riemann de coordonnées  $u^i$  et déterminons la dérivée covariante seconde par rapport à  $u^j$ , puis par rapport à  $u^k$  et ensuite, inversons l'ordre des dérivations.

Pour cela, reprenons l'expression (5.2.40) de la dérivée covariante seconde d'un vecteur  $\mathbf{V}$  de composantes covariantes  $v_i$ , soit :

$$\begin{aligned} \nabla_k(\nabla_j v_i) &= \partial_{kj} v_i - (\partial_k \Gamma_{ji}^l) v_l - \Gamma_{ji}^l \partial_k v_l - \Gamma_{ik}^r \partial_j v_r \\ &\quad + \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^l v_l - \Gamma_{jk}^r \partial_r v_i + \Gamma_{jk}^r \Gamma_{ri}^l v_l \end{aligned} \quad (6.6.1)$$

Calculons à présent la dérivée covariante d'abord par rapport à  $u^k$  puis par rapport à  $u^j$ . On obtient, en permutant les indices  $j$  et  $k$  dans l'expression précédente :

$$\begin{aligned} \nabla_j(\nabla_k v_i) &= \partial_{jk} v_i - (\partial_j \Gamma_{ki}^l) v_l - \Gamma_{ki}^l \partial_j v_l - \Gamma_{ij}^r \partial_k v_r \\ &\quad + \Gamma_{ij}^r \Gamma_{kr}^l v_l - \Gamma_{kj}^r \partial_r v_i + \Gamma_{jk}^r \Gamma_{ri}^l v_l \end{aligned} \quad (6.6.2)$$

En admettant que les composantes vérifient les propriétés classiques  $\partial_{kj} v_i = \partial_{jk} v_i$ , on obtient par soustraction des deux expressions précédentes :

$$\nabla_k(\nabla_j v_i) - \nabla_j(\nabla_k v_i) = (\partial_j \Gamma_{ik}^l - \partial_k \Gamma_{ij}^l + \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^l - \Gamma_{ij}^r \Gamma_{kr}^l) v_l \quad (6.6.3)$$

Par suite des propriétés tensorielles des dérivées covariantes et des composantes  $v_l$ , la quantité entre parenthèses est un tenseur d'ordre quatre que l'on note :

$$R_i^l{}_{jk} = \partial_j \Gamma_{ik}^l - \partial_k \Gamma_{ij}^l + \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^l - \Gamma_{ij}^r \Gamma_{kr}^l \quad (6.6.4)$$

Le tenseur  $R_i^l{}_{jk}$  est appelé **tenseur de Riemann-Christoffel** ou **tenseur de courbure** de l'espace riemannien. La courbure d'un espace de Riemann va être caractérisée à l'aide de ce tenseur. Auparavant nous allons voir certaines propriétés du tenseur de Riemann-Christoffel.

## 6.6.2 Composantes covariantes

Les composantes covariantes du tenseur de Riemann-Christoffel sont données par :

$$R_{ijrs} = g_{jk} R_i^k{}_{rs} \quad (6.6.5)$$

Utilisons les relations suivantes entre les symboles de Christoffel de première et de deuxième espèce :

$$g_{jk} \Gamma_{rl}^k = \Gamma_{jrl} \quad ; \quad g_{jk} \Gamma_{sl}^k = \Gamma_{jst} \quad (6.6.6)$$

et remplaçons les quantités  $g_{jk} \partial_r \Gamma_{is}^k$  par  $\partial_r (g_{jk} \Gamma_{is}^k) - \Gamma_{is}^k \partial_r g_{jk}$  dans la relation (6.6.5). On obtient, après permutation de  $k$  et  $l$  :

$$R_{ijrs} = \partial_r (g_{jk} \Gamma_{is}^k) - \partial_s (g_{jk} \Gamma_{ir}^k) + \Gamma_{is}^l (\Gamma_{jrl} - \partial_r g_{jl}) - \Gamma_{ir}^l (\Gamma_{jst} - \partial_s g_{jt}) \quad (6.6.7)$$

La relation (5.1.28) nous donne :

$$\Gamma_{ikj} - \partial_k g_{ij} = -\Gamma_{jki} \quad (6.6.8)$$

Après permutation sur les indices et utilisation des relations (6.6.6) dans l'expression (6.6.8), on obtient :

$$R_{ijrs} = \partial_r \Gamma_{jis} - \partial_s \Gamma_{jir} - \Gamma_{rj}^k \Gamma_{iks} + \Gamma_{sj}^k \Gamma_{kir} \quad (6.6.9)$$

Remplaçons les symboles de Christoffel par leur expression en fonction des coefficients  $g_{ij}$  de l'élément linéaire ; on a selon la relation (5.1.38) :

$$2 \partial_r \Gamma_{is}^j = \partial_{ri} g_{sj} + \partial_{rs} g_{ji} - \partial_{rj} g_{is} \quad (6.6.10)$$

Reportant les expressions (6.6.10) dans (6.6.9), on obtient finalement :

$$R_{ijrs} = \frac{1}{2} (\partial_{ri} g_{sj} + \partial_{sj} g_{ir} - \partial_{rj} g_{is} - \partial_{si} g_{rj}) - \Gamma_{rj}^k \Gamma_{kis} + \Gamma_{sj}^k \Gamma_{kir} \quad (6.6.11)$$

### 6.6.3 Système de coordonnées normales

Il est intéressant d'introduire un système de coordonnées locales particulières pour les espaces de Riemann, appelées **coordonnées normales**, car elles permettent de simplifier considérablement la démonstration de certaines identités, en particulier pour le tenseur de Riemann-Christoffel.

Soit un point  $M_0$  d'un espace riemannien, de coordonnées  $y^i$ . Donnons-nous en ce point un vecteur unitaire  $\mathbf{n}$  de direction arbitraire, de composantes  $n^i$ . Pour chaque point  $M$  situé au voisinage de  $M_0$ , on démontre qu'il existe un seul choix de direction  $\mathbf{n}$  en  $M_0$  de telle sorte qu'une géodésique  $z^i(s)$ , solution des équations (6.4.21), passe par  $M$ .

Prenons pour chaque point  $M$  du voisinage de  $M_0$ , les coordonnées suivantes :

$$z^i = s n^i \quad (6.6.12)$$

où  $s$  est la distance le long de la géodésique de  $M_0$  en  $M$ . Les coordonnées  $z^i$  sont appelées **les coordonnées normales** du point  $M$ .

La propriété essentielle des coordonnées normales réside dans le fait que, au point  $M_0$ , les symboles de Christoffel du système de coordonnées sont tous nuls, de même que les dérivées  $\partial_k g_{ij}$  en ce point. Démontrons qu'il en est bien ainsi. Selon (6.6.12), on obtient pour  $n^i$  fixé :

$$\frac{dz^i}{ds} = n^i \quad ; \quad \frac{d^2 z^i}{ds^2} = 0 \quad (6.6.13)$$

L'équation des géodésiques écrite en coordonnées  $z^i$  devient alors, compte tenu de (6.6.13), pour toutes les directions en  $M_0$  :

$$\Gamma_{jk}^i n^j n^k = 0 \quad (6.6.14)$$

Puisque  $\Gamma_{jk}^i$  est symétrique par rapport aux indices  $j, k$ , on a pour tout  $i$  :  $\Gamma_{jk}^i = 0$  en  $M_0$  pour tout  $i, j, k$ . De plus, on a les relations :

$$\Gamma_{kij} = g_{kr} \Gamma_{ij}^r = 0 \quad ; \quad \Gamma_{kij} + \Gamma_{ijk} = \partial_k g_{ij} \quad (6.6.15)$$

d'où :  $\partial_k g_{ij} = 0$  en  $M_0$ . D'autre part, puisque l'on a :  $g^{ij} g_{jr} = \delta^{ir}$ , la dérivée des produits conduit à  $\partial_k g^{ij} = 0$  en  $M_0$ .

**L'utilisation des coordonnées normales  $z^i$  va nous permettre de démontrer plus aisément les propriétés de symétrie du tenseur de Riemann-Christoffel.**

### 6.6.4 Propriétés de symétrie

En coordonnées normales  $z^i$ , l'expression (6.6.11) du tenseur de courbure se simplifie puisque les symboles de Christoffel sont tous nuls ; il vient :

$$R_{ijrs} = \frac{1}{2} (\partial_{ri} g_{sj} + \partial_{sj} g_{ir} - \partial_{rj} g_{is} - \partial_{si} g_{rj}) \quad (6.6.16)$$

où les composantes  $g_{ij}$  du tenseur métrique sont des fonctions des coordonnées normales. En permutant les indices, on obtient aisément les propriétés de symétrie suivantes qui restent valables pour tout système de coordonnées car une propriété de symétrie sur les indices est une notion indépendante du repère utilisé pour la décrire. Permutons les indices  $i$  et  $j$  dans la relations (6.6.16), on obtient :

$$R_{jirs} = \frac{1}{2} (\partial_{rj} g_{si} + \partial_{si} g_{jr} - \partial_{ri} g_{js} - \partial_{sj} g_{ri}) = -R_{ijrs} \quad (6.6.17)$$

De même, en permutant  $r$  et  $s$ , on obtient :

$$R_{ijrs} = -R_{ijsr} \quad (6.6.18)$$

Enfin, en permutant les indices  $ij$  et  $rs$ , on obtient, par suite de la symétrie des  $g_{ij}$  et en intervertissant leur ordre de dérivation :

$$R_{ijrs} = R_{rsij} \quad (6.6.19)$$

### 6.6.5 Première identité de Bianchi

Effectuons une permutation circulaire sur les indices  $j$ ,  $r$ ,  $s$  dans l'expression (6.6.16), il vient :

$$R_{irsj} = \frac{1}{2} (\partial_{jr} g_{is} + \partial_{is} g_{jr} - \partial_{rs} g_{ij} - \partial_{ij} g_{rs}) \quad (6.6.20)$$

$$R_{isjr} = \frac{1}{2} (\partial_{rs} g_{ij} + \partial_{ij} g_{rs} - \partial_{js} g_{ir} - \partial_{ir} g_{js}) \quad (6.6.21)$$

L'addition des relations (6.6.16), (6.6.20) et (6.6.21) nous donne :

$$R_{ijrs} + R_{irsj} + R_{isjr} = 0 \quad (6.6.22)$$

L'identité précédente est appelée **la première identité de Bianchi**.

### 6.6.6 Composantes indépendantes

Les propriétés d'antisymétrie (6.6.17) et (6.6.18) montrent qu'un certain nombre de composantes  $R_{ijrs}$  lorsque  $i = j$  ou  $r = s$ , sont nulles. D'autre part, la relation (6.6.19) ainsi que la première identité de Bianchi montrent que de nombreuses composantes se déduisent l'une de l'autre.

Le nombre total des composantes du tenseur de courbure d'un espace de Riemann à  $n$  dimensions qui ne sont pas nulles et qui sont indépendantes des autres composantes, est égal à :  $n^2(n^2 - 1)/12$ .

Ainsi, pour un espace de Riemann de dimension deux, le tenseur de Riemann-Christoffel a une seule composante indépendante. Parmi les 16 composantes  $R_{ijrs}$ , les seules composantes non nulles sont :

$$R_{1212} = R_{2121} = -R_{1221} = -R_{2112} \quad (6.6.23)$$

## 6.7 Courbure Riemannienne

On a vu, dans le cas d'un espace de Riemann à deux dimensions, que le déplacement associé à un cycle élémentaire se réduit à une rotation autour de l'origine  $M$  du cycle. Si l'on appelle  $d\sigma$  l'aire délimitée par le cycle et  $d\Phi$  l'angle de cette rotation, comptée positivement dans le sens de parcours du cycle, on peut écrire :

$$K = \frac{d\Phi}{d\sigma} \quad (6.7.1)$$

La quantité  $K$  est appelée **la courbure riemannienne** de l'espace de Riemann au point  $M$ . Pour une sphère, la relation (6.5.15) montre que la courbure riemannienne est égale à  $1/R^2$ .

La notion de courbure riemannienne se généralise à un espace de Riemann quelconque à  $n$  dimensions et s'exprime en fonction du tenseur de Riemann-Christoffel.

### 6.7.1 Le tenseur de rotation en fonction du tenseur de Riemann-Christoffel

Évaluons les composantes mixtes  $\Omega_i^l$  du tenseur de rotation infinitésimale :

$$\Omega_i^l = d\omega^l_i(\delta) - \delta\omega^l_i(d) + \omega^k_i(\delta)\omega^l_k(d) - \omega^k_i(d)\omega^l_k(\delta) \quad (6.7.2)$$

en fonction des symboles de Christoffel. La quantité  $d\omega^l_i(\delta)$  qui figure dans le membre de droite de l'expression (6.7.2) s'écrit :

$$d\omega^l_i(\delta) = d(\Gamma_{ki}^l \delta u^k) = \partial_m \Gamma_{ki}^l du^m \delta u^k + \Gamma_{ki}^l d\delta u^k \quad (6.7.3)$$

Un calcul similaire donne l'expression de  $\delta\omega^l_i(d)$ , d'où par soustraction de ces deux quantités :

$$d\omega^l_i(\delta) - \delta\omega^l_i(d) = \partial_m \Gamma_{ki}^l du^m \delta u^k - \partial_m \Gamma_{ki}^l \delta u^m du^k \quad (6.7.4)$$

Par échange des indices de sommation  $m$  et  $k$  dans le dernier terme de la relation précédente, on obtient :

$$d\omega^l_i(\delta) - \delta\omega^l_i(d) = (\partial_m \Gamma_{ki}^l - \partial_k \Gamma_{mi}^l) du^m \delta u^k \quad (6.7.5)$$

D'autre part, les deux derniers termes qui figurent dans l'expression (6.7.2) nous donnent :

$$\omega^k_i(\delta)\omega^l_k(d) - \omega^k_i(d)\omega^l_k(\delta) = (\Gamma_{si}^k \Gamma_{rk}^l - \Gamma_{ri}^k \Gamma_{sk}^l) du^r \delta u^s \quad (6.7.6)$$

Finalement, l'expression du tenseur de rotation s'écrit :

$$\Omega_i^l = (\partial_r \Gamma_{si}^l - \partial_s \Gamma_{ri}^l + \Gamma_{si}^k \Gamma_{rk}^l - \Gamma_{ri}^k \Gamma_{sk}^l) du^r \delta u^s \quad (6.7.7)$$

Le tenseur de Riemann-Christoffel apparaît dans la relation précédente :

$$R_{i\ rs}^l = \partial_r \Gamma_{si}^l - \partial_s \Gamma_{ri}^l + \Gamma_{si}^k \Gamma_{rk}^l - \Gamma_{ri}^k \Gamma_{sk}^l \quad (6.7.8)$$

d'où l'expression du tenseur de rotation :

$$\Omega_i^l = R_{i\ rs}^l du^r \delta u^s \quad (6.7.9)$$

Les quantités  $du^r$  et  $\delta u^s$  étant les composantes contravariantes de deux vecteur quelconques et les quantités  $\Omega_i^l$ , les composantes mixtes d'un tenseur, il en résulte que les quantités  $R_{i\ rs}^l$  sont bien les composantes mixtes d'un tenseur d'ordre quatre, une fois contravariante et trois fois covariantes.

## 6.7.2 Courbure riemannienne

Le déplacement associé à un cycle élémentaire se réduit à une rotation d'un angle  $d\Phi$  dans le cas d'un espace de Riemann à deux dimensions. Cette rotation s'exprime à l'aide du tenseur de rotation  $\Omega_i^l$  pour un espace de dimension quelconque.

La notion de courbure riemannienne se généralise alors de la manière suivante. Considérons un espace de Riemann de métrique  $g_{ij}$  ; en un point  $M$  quelconque définissons un ensemble de deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ , de composantes contravariantes respectives  $u^i$  et  $v^j$ . Par définition, la courbure riemannienne  $K$  en ce point est :

$$K(M; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{R_{ijkl} u^i v^j u^k v^l}{(g_{pr} g_{qs} - g_{ps} g_{qr}) u^p v^q u^r v^s} \quad (6.7.10)$$

La courbure riemannienne dépend non seulement du point où l'on se place mais également de la direction considérée dans l'espace.

Si la courbure riemannienne en un point  $M$  ne change pas avec l'orientation de la direction en  $M$ , alors  $M$  est appelé un point isotrope. On démontre que la courbure riemannienne, en un point isotrope, est donnée par :

$$K = \frac{R_{ijkl}}{g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}} \quad (6.7.11)$$

On en déduit alors de le théorème de Schur qui montre que si tous les points d'un certain voisinage d'un point  $M$  sont isotropes, et si la dimension de l'espace de Riemann est supérieure ou égale à 3, alors la courbure  $K$  est constante dans ce voisinage de  $M$ .

**Espaces plats** - Un espace euclidien pouvant être rapporté à un repère orthonormé, tous les symboles de Christoffel sont alors nuls et par suite la courbure d'un espace euclidien est nulle. Réciproquement, on démontre que si la courbure riemannienne

est nulle en tout point et si la métrique est définie positive, alors l'espace est euclidien.

Un espace de Riemann est appelé **un espace plat** si l'on peut trouver une transformation des coordonnées qui permettent de mettre l'élément linéaire de cet espace sous la forme standard d'un espace pré-euclidien :

$$ds^2 = \pm dx^i dx^i \quad (6.7.12)$$

Un espace de Riemann est plat si et seulement si sa courbure est nulle en tout point.

**Espace à deux dimensions** - Nous allons voir que tous les points d'un espace de Riemann à deux dimensions sont isotropes.

L'expression de la courbure donnée par (6.7.10) se réduit, pour un espace à deux dimensions, à :

$$K = \frac{R_{1212}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} = \frac{R_{1212}}{g} \quad (6.7.13)$$

On a vu en effet que le tenseur de Riemann-Christoffel, pour un espace à deux dimensions, ne comporte qu'une seule composante indépendante non nulle (relation (6.6.23)). La courbure est indépendante de la direction et tout point d'un espace à deux dimensions est donc isotrope.

Considérons à présent une surface de l'espace ordinaire et un point  $M$  sur cette surface. Rapportons celle-ci à trois axes rectangulaires ayant le point  $M$  pour origine. L'axe  $Mz$  est normal à la surface et les axes  $Mx$  et  $My$  sont des droites de l'espace euclidien osculateur en  $M$ . Dans ce cas, on a vu que l'élément linéaire de la surface est donné par la relation (6.4.13), à savoir :

$$ds^2 = (1 + p^2) dx^2 + (1 + q^2) dy^2 + 2pq dx dy \quad (6.7.14)$$

avec  $p = \partial z / \partial x$ ,  $q = \partial z / \partial y$ . Notons  $r, s, t$  les dérivées partielles du second ordre, soit  $r = \partial p / \partial x$ ,  $s = \partial p / \partial y$ ,  $t = \partial q / \partial y$ .

Calculons la courbure de cet espace au point  $M$  où l'on a  $p = q = 0$ . Les quantités  $g_{ij}$  sont données par l'élément linéaire (6.7.14) et l'on a  $g = 1$  au point  $M$ . Le calcul de  $R_{1212}$  donne :

$$K = R_{1212} = rt - s^2 \quad (6.7.15)$$

Si l'on choisit pour axes des  $x$  et des  $y$  les tangentes principales en  $M$ , on obtient, en ce point :

$$r = \frac{1}{R_1} ; \quad t = \frac{1}{R_2} ; \quad s = 0 \quad (6.7.16)$$

où  $1/R_1$  et  $1/R_2$  sont les deux courbures principales. On a donc :

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} \quad (6.7.17)$$

Le produit des deux courbures principales est appelée **la courbure totale de la surface**. Par suite, la courbure riemannienne d'une surface est, en un point donné, égale à sa courbure totale. C'est Gauss qui, le premier, a démontré que la courbure totale d'une surface ne dépendait que de son élément linéaire.

### 6.7.3 Tenseur de Ricci et courbure scalaire

La contraction du tenseur de Riemann-Christoffel  $R_i^k{}_{rs}$  par rapport aux indices  $k$  et  $r$  conduit au tenseur :

$$R_{is} = R_i^k{}_{ks} = \partial_k \Gamma_{is}^k - \partial_s \Gamma_{ik}^k + \Gamma_{is}^l \Gamma_{kl}^k - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{sl}^k \quad (6.7.18)$$

Le tenseur  $R_{is}$  est appelé **tenseur de Ricci** et nous verrons qu'il entre dans les équations de la relativité générale. Ses composantes mixtes sont données par :

$$R^i{}_j = g^{ik} R_{kj} \quad (6.7.19)$$

On obtient également le tenseur de Ricci ou son opposé, en contractant le tenseur  $R_i^k{}_{rs}$  par rapport aux indices  $i$  et  $r$ , ou  $k$  et  $s$ .

Par suite des propriétés de symétrie du tenseur de Riemann-Christoffel, le tenseur de Ricci est symétrique. Pour le démontrer, effectuons une contraction sur les indices  $k$  et  $r$  en utilisant l'expression de  $R_i^k{}_{rs}$  en fonction de ses composantes covariantes et en se servant de la propriété (6.6.19) :

$$R_{is} = R_i^k{}_{ks} = g^{kj} R_{ijk}s = g^{kj} R_{ksij} \quad (6.7.20)$$

Les propriétés (6.6.17) et (6.6.18) de permutation des indices appliquées au dernier membre de (6.7.20) nous donnent :

$$R_{is} = g^{kj} R_{ksij} = g^{kj} R_{skji} = R_s^j{}_{ji} = R_{si} \quad (6.7.21)$$

Le tenseur de Ricci permet d'obtenir par contraction **la courbure de Ricci** ou **scalaire de courbure**, noté  $R$  :

$$R = g^{ij} R_{ij} = R_i^i = R^j{}_j \quad (6.7.22)$$

### 6.7.4 Seconde identité de Bianchi

Bianchi a obtenue une première identité (6.6.22) entre les composantes covariantes du tenseur de Riemann-Christoffel. Une seconde identité de Bianchi est obtenue par dérivation covariante de  $R_i^l{}_{rs}$  en coordonnées normales. Dans ce système de coordonnées, les symboles de Christoffel de  $R_i^l{}_{rs}$  sont tous nuls mais pas leurs dérivées :

$$\nabla_t R_i^l{}_{rs} = \partial_{rt} \Gamma_{si}^l - \partial_{st} \Gamma_{ri}^l \quad (6.7.23)$$

Une permutation circulaire sur les indices  $t$ ,  $r$  et  $s$  de la relation (6.7.23) nous donne :

$$\nabla_r R_i^l{}_{st} = \partial_{sr} \Gamma_{ti}^l - \partial_{tr} \Gamma_{si}^l \quad (6.7.24)$$

$$\nabla_s R_i^l{}_{tr} = \partial_{ts} \Gamma_{ri}^l - \partial_{rs} \Gamma_{ti}^l \quad (6.7.25)$$

L'addition des trois relations précédentes, compte tenu de l'interchangeabilité de l'ordre des dérivations, conduit à :

$$\nabla_t R_i^l{}_{rs} + \nabla_r R_i^l{}_{st} + \nabla_s R_i^l{}_{tr} = 0 \quad (6.7.26)$$

D'après leur forme tensorielle, cette seconde identité de Bianchi est valable dans n'importe quel système de coordonnées et en tout point de l'espace de Riemann considéré.

### 6.7.5 Tenseur d'Einstein

Effectuons une première contraction sur l'identité (6.7.26) pour  $t = l$ , il vient :

$$\nabla_l R_i^l{}_{rs} + \nabla_r R_i^l{}_{sl} + \nabla_s R_i^l{}_{lr} = 0 \quad (6.7.27)$$

En tenant compte de la définition (6.7.18) du tenseur de Ricci et de l'égalité  $R_r^l{}_{sl} = -R_r^l{}_{ls}$ , on obtient :

$$\nabla_l R_i^l{}_{rs} + \nabla_s R_{ir} - \nabla_r R_{is} = 0 \quad (6.7.28)$$

Le changement des indices covariants/contravariants au moyen des  $g^{ik}$  étant permutable avec la dérivation covariante, on a :

$$\nabla_s R^k{}_r = \nabla_s g^{ik} R_{ir} = g^{ik} \nabla_s R_{ir} \quad (6.7.29)$$

Multipliant la relation (6.7.28) par  $g^{ik}$  et utilisons la propriété de permutation (6.7.29), on obtient :

$$\nabla_l R^{kl}{}_{rs} + \nabla_s R^k{}_r - \nabla_r R^k{}_s = 0 \quad (6.7.30)$$

Effectuons une seconde contraction par rapport aux indices  $k$  et  $s$ , il vient :

$$\nabla_l R^{kl}{}_{rk} + \nabla_k R^k{}_r - \nabla_r R^k{}_k = 0 \quad (6.7.31)$$

Après contraction, changeons l'indice de sommation  $l$  en indice  $k$  dans le premier terme de l'équation précédente. De plus, avec l'égalité  $R^{kl}{}_{rk} = R^{lk}{}_{kr}$  on obtient :

$$2 \nabla_k R^k{}_r - \nabla_r R = 0 \quad (6.7.32)$$

Cette dernière expression peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$\nabla_k \left( R^k{}_r - \frac{1}{2} \delta^k{}_r R \right) = \nabla_k S^k{}_r = 0 \quad (6.7.33)$$

L'expression entre parenthèses qui figure dans (6.7.33) est un tenseur, noté  $S^k_r$ , dont les composantes covariantes sont données par :

$$S_{ij} = g_{ik} S^k_j = g_{ik} \left( R^k_j - \frac{1}{2} \delta^k_j R \right) = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \quad (6.7.34)$$

Le tenseur  $S_{ij}$  est appelé **tenseur d'Einstein**. Par suite de la symétrie du tenseur de Ricci, le tenseur d'Einstein est également symétrique. Ce tenseur intervient de manière fondamentale dans les équations de la relativité générale. Selon (6.7.33), il vérifie les identités :

$$\nabla_k S^k_r = 0 \quad (6.7.35)$$

Un tenseur qui satisfait identiquement à des relations de la forme (6.7.35) est appelé **un tenseur conservatif**.

## 6.8 Exercices résolus

### Exercice 6.1

On va établir les équations des géodésiques en écrivant que, le long d'un segment infinitésimal  $d\mathbf{l}$  d'une courbe  $C(y^1, y^2, \dots, y^n)$ , le transport parallèle d'un vecteur  $\mathbf{A}$  donne une différentielle absolue nulle.

1. Écrire l'expression de  $d\mathbf{A}$  sur la base du repère naturel.
2. Paramétrer la courbe  $C(y^1, y^2, \dots, y^n)$  et écrire la dérivée absolue des composantes  $A^k$  du vecteur.
3. Appliquer la formule obtenue au vecteur  $d\mathbf{l}$ , de composantes contravariantes  $dy^k$  et en déduire les équations des géodésiques.

### *Solutions*

1. Lors d'un transport parallèle, la différentielle absolue du vecteur  $\mathbf{A}$  est nulle, soit :

$$d\mathbf{A} = D A^k \mathbf{e}_k = (\partial_j A^k + A^i \Gamma_{ij}^k) dy^j \mathbf{e}_k = \mathbf{0}$$

2. Soit  $t$  un paramètre arbitraire ; la courbe suivie  $C$  a pour coordonnées  $y^i(t)$ . L'identification de chaque composante de  $d\mathbf{A}$  aux composantes du vecteur nul, nous donne :

$$\frac{D A^k}{dt} = (\partial_j A^k + A^i \Gamma_{ij}^k) \frac{dy^j}{dt} = 0$$

On a :

$$\partial_j A^k \frac{dy^j}{dt} = -\frac{dA^k}{dt}$$

d'où :

$$\frac{dA^k}{dt} + A^i \Gamma_{ij}^k \frac{dy^j}{dt} = 0$$

3. Appliquons la formule précédente au déplacement infinitésimal  $d\mathbf{l}$  de composantes  $dy^i$ . Pour cela, remplaçons  $A^k$  par  $dy^k/dt$ ; on obtient :

$$\frac{d^2 y^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dy^j}{dt} \frac{dy^i}{dt} = 0$$

Ce sont les équations (5.1.60) des géodésiques.

## Exercice 6.2

Soit  $s$  l'abscisse curviligne d'un mobile le long d'une courbe  $C(y^1, \dots, y^n)$ , c'est-à-dire la distance parcourue en fonction du temps à partir d'un point origine.

1. Prenant comme paramètre de la courbe  $C$  l'abscisse curviligne  $s$ , on a  $y^i = y^i(s)$ . Écrire les équations des géodésiques en fonction de ce paramètre.
2. Soit  $u^i = dy^i/ds$ ; démontrer que les équations des géodésiques s'écrivent sous la forme :

$$u^k \nabla_k u^i = 0$$

3. Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux paramètres arbitraires; montrer que les paramètres qu'on peut choisir pour obtenir les équations des géodésiques sont liés entre eux par une relation linéaire.

## Solutions

1. Le paramétrage de la courbe étant arbitraire, les équations des géodésiques s'écrivent, selon (5.1.60) :

$$\frac{d^2 y^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dy^j}{ds} \frac{dy^i}{ds} = 0$$

2. Le vecteur  $u^i$  est le vecteur unité tangent à la courbe  $C(s)$ . Par suite de son interprétation cinématique, le vecteur  $u^i$  est appelé le vecteur vitesse unitaire. Les équations des géodésiques s'écrivent :

$$\frac{d^2 y^i}{ds^2} + \Gamma_{kj}^i \frac{dy^j}{ds} \frac{dy^k}{ds} = \frac{du^i}{ds} + \Gamma_{kj}^i u^j \frac{dy^k}{ds} = (\partial_k u^i + \Gamma_{kj}^i u^j) \frac{dy^k}{ds} = 0$$

soit :  $u^k \nabla_k u^i = 0$

3. Écrivons les équations des géodésiques pour des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$(1) \quad \frac{d^2 y^k}{d\alpha^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dy^j}{d\alpha} \frac{dy^i}{d\alpha} = 0 \quad ; \quad (2) \quad \frac{d^2 y^k}{d\beta^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dy^j}{d\beta} \frac{dy^i}{d\beta} = 0$$

Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont tels que :

$$\frac{dy^i}{d\alpha} = \frac{dy^i}{d\beta} \frac{d\beta}{d\alpha} ; \quad \frac{d^2 y^i}{d\alpha^2} = \frac{d^2 y^i}{d\beta^2} \left( \frac{d\beta}{d\alpha} \right)^2 + \frac{dy^i}{d\beta} \frac{d^2 \beta}{d\alpha^2}$$

Portant ces deux dernières égalités dans les équations des géodésiques (1) exprimées en fonction de  $\alpha$ , il vient :

$$(3) \quad \left( \frac{d^2 y^i}{d\beta^2} + \Gamma_{kj}^i \frac{dy^j}{d\beta} \frac{dy^k}{d\beta} \right) \left( \frac{d\beta}{d\alpha} \right)^2 + \frac{dy^i}{d\beta} \frac{d^2 \beta}{d\alpha^2} = 0$$

Pour identifier entre elles les expressions (1) et (3), il faut et il suffit que l'on ait :

$$\frac{d^2 \beta}{d\alpha^2} = 0$$

Cette équation a pour solution générale :  $\beta = A\alpha + B$ , où  $A$  et  $B$  sont des constantes arbitraires. En particulier, les équations des géodésiques correspondent à la trajectoire d'un mobile ayant une accélération nulle, donc une vitesse  $v$  constante. Dans ce cas, on a bien :  $s = vt + s_0$ , où  $s_0$  est l'abscisse curviligne d'un point arbitraire sur la géodésique.

### Exercice 6.3

1. Partant de l'expression de la dérivée covariante première  $\nabla_j v_i$  d'un vecteur  $v_i$ , calculer l'expression de la dérivée covariante seconde  $\nabla_k (\nabla_j v_i)$  de ce vecteur.
2. Montrer que la différence :

$$\nabla_k (\nabla_j v_i) - \nabla_j (\nabla_k v_i)$$

s'exprime en fonction du tenseur de Riemann-Christoffel. À quelle condition la dérivation covariante est-elle permutable, c'est-à-dire à quelle condition obtient-on :  $\nabla_k (\nabla_j v_i) = \nabla_j (\nabla_k v_i)$  ?

3. Pour quel genre d'espace ponctuel la dérivation covariante est-elle permutable ?

### Solutions

1. La dérivée covariante seconde a été obtenue par la formule (5.2.40), soit :

$$\begin{aligned} \nabla_k (\nabla_j v_i) &= \partial_{kj} v_i - (\partial_k \Gamma_{ji}^l) v_l - \Gamma_{ji}^l \partial_k v_l \\ &\quad - \Gamma_{ik}^r \partial_j v_r + \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^l v_l - \Gamma_{jk}^r \partial_r v_i + \Gamma_{jk}^r \Gamma_{ri}^l v_l \end{aligned}$$

2. La différence  $\nabla_k (\nabla_j v_i) - \nabla_j (\nabla_k v_i)$  est donnée par la relation (6.6.3), soit :

$$\nabla_k (\nabla_j v_i) - \nabla_j (\nabla_k v_i) = (\partial_j \Gamma_{ik}^l - \partial_k \Gamma_{ij}^l + \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^l - \Gamma_{ij}^r \Gamma_{kr}^l) v_l$$

où le terme entre parenthèses est tenseur de Riemann-Christoffel  $R_i^l{}_{jk}$ . La dérivation covariante est permutable si tous les  $R_i^l{}_{jk}$  sont nuls.

3. Tous les symboles de Christoffel sont nuls dans l'espace euclidien en coordonnées rectilignes ; en conséquence, tous les  $R_i^l{}_{jk}$  sont nuls dans tout autre système de coordonnées curvilignes de l'espace euclidien, car tout tenseur nul pour un système de coordonnées l'est aussi pour tout autre système. La dérivée covariante est donc permutable dans l'espace euclidien. Par contre, le tenseur de Riemann-Christoffel d'un espace de Riemann n'est pas nul en général, et la dérivation covariante ne sera pas permutable, en général, pour un tel espace.

### Exercice 6.4

Si le déterminant  $g$  de la matrice du tenseur fondamental  $g_{ij}$  n'est pas défini positif, une courbe d'un espace de Riemann peut avoir une longueur nulle. C'est ce que nous allons voir en considérant dans  $E_4$  l'élément linéaire :

$$ds^2 = (du^1)^2 + (du^2)^2 + (du^3)^2 - (du^4)^2$$

ainsi que la courbe suivante :  $u^1 = 3 \cos \alpha$  ;  $u^2 = 3 \sin \alpha$  ;  $u^3 = 4 \alpha$  ;  $u^4 = 5 \alpha$

Calculer la longueur de l'arc de courbe lorsque  $\alpha$  varie de 0 à  $b$ , avec  $b \leq 1$ .

### Solutions

Le long de la courbe considérée, on a :

$$du^1 = -3 \sin \alpha d\alpha ; \quad du^2 = 3 \cos \alpha d\alpha ; \quad du^3 = 4 d\alpha ; \quad du^4 = 5 d\alpha$$

L'élément linéaire a pour expression :

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j = (9 \sin^2 \alpha + 9 \cos^2 \alpha + 16 - 25) d\alpha^2 = 0$$

Par conséquent, la longueur de l'arc de courbe est nulle :

$$\int_0^b \sqrt{g_{ij} du^i du^j} = 0$$

### Exercice 6.5

Une géodésique sera de longueur nulle si l'on a :  $g_{ij} du^i du^j = 0$  en tout point de la géodésique.

1. Établir l'équation des géodésiques de longueur nulle lorsque les composantes  $g_{ij}$  du tenseur fondamental sont des constantes.
2. Dans le cas de la Relativité Restreinte, on a :

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{44} = 1 ; \quad g_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

Déterminer l'équation des géodésiques de longueur nulle et la surface engendrée par celles-ci.

## Solutions

1. Lorsque les  $g_{ij}$  sont des constantes, les symboles de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  sont tous nuls. L'équation des géodésiques se réduit à :

$$\frac{d^2 u^i}{d\alpha^2} = 0$$

dont la solution générale est :  $u^i = A^i \alpha + B^i$ . La condition de nullité de longueur de la géodésique :  $g_{ij} du^i du^j = 0$ , nous donne :  $g_{ij} A^i A^j = 0$ ; éliminons les coefficients  $A^i$  de cette équation ; il vient :

$$g_{ij} (u^i - B^i) (u^j - B^j) = 0$$

C'est l'équation des géodésiques de longueur nulle.

2. Dans le cas de la Relativité Restreinte, l'équation des géodésiques devient :

$$(u^1 - u_0^1)^2 + (u^2 - u_0^2)^2 + (u^3 - u_0^3)^2 - (u^4 - u_0^4)^2 = 0$$

C'est l'équation d'un hyperbole ou "cône de lumière" de la Relativité Restreinte. Les régions du "futur absolu" et du "passé absolu" se trouvent respectivement dans l'une ou l'autre des deux nappes du cône.

## Exercice 6.6

Le tenseur de Ricci  $R_{is}$  est donné par la formule (6.7.18), soit :

$$R_{is} = R_{i^k ks} = \partial_k \Gamma_{is}^k - \partial_s \Gamma_{ik}^k + \Gamma_{is}^l \Gamma_{kl}^k - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{sl}^k$$

On se propose de déterminer les valeurs des  $R_{is}$  pour la métrique suivante :

$$g_{11} = 1 \quad ; \quad g_{22} = 2x^1 \quad ; \quad g_{33} = 2x^2 \quad ; \quad g_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

1. Calculer les symboles de Christoffel de deuxième espèce.
2. Calculer les composantes mixtes  $R_{i^k rs}$  du tenseur de Riemann-Christoffel.
3. Calculer les composantes covariantes du tenseur de Riemann-Christoffel.
4. Écrire l'expression des composantes covariantes  $R_{is}$  du tenseur de Ricci en fonction des composantes covariantes du tenseur de Riemann-Christoffel et calculer les  $R_{is}$ .
5. Calculer la courbure scalaire ou courbure de Ricci.

## Solutions

1. Le calcul des symboles de Christoffel de deuxième espèce peut se faire en utilisant les formules de l'exercice (5.4), à savoir :

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^i &= \Gamma_{ji}^i = (1/2) \partial_j \ln |g_{ii}| \\ \Gamma_{jj}^i &= -(1/2 g_{ii}) \partial_i g_{jj} \quad ; \quad \text{avec } i \neq j \\ \text{Tous les autres symboles } \Gamma_{jk}^i &\text{ sont nuls.}\end{aligned}$$

On obtient :

$$\Gamma_{22}^1 = -1 \quad ; \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2x^1} \quad ; \quad \Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2x^1} \quad ; \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2x^2}$$

2. La formule (6.6.4) donne l'expression des composantes mixtes  $R_{i^l jk}$  du tenseur de Riemann-Christoffel, soit :

$$R_{i^l jk} = \partial_j \Gamma_{ik}^l - \partial_k \Gamma_{ij}^l + \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^l - \Gamma_{ij}^r \Gamma_{kr}^l$$

On obtient :

$$\begin{aligned}R_{2^1 12} &= \frac{1}{2x^1} \quad ; \quad R_{3^1 13} = 0 \quad ; \quad R_{3^2 23} = -\frac{1}{4x^1 x^2} \\ R_{2^1 13} &= 0 \quad ; \quad R_{1^2 23} = 0 \quad ; \quad R_{1^3 32} = \frac{1}{4x^1 x^2}\end{aligned}$$

3. Les composantes covariantes du tenseur de Riemann-Christoffel sont données par la formule (6.6.5), soit :

$$R_{ijrs} = g_{jk} R_{i^k rs}$$

De nombreuses valeurs se déduisent les unes des autres à partir des propriétés de symétrie ((6.6.17), (6.6.18) et (6.6.19)). On obtient :

$$\begin{aligned}R_{2112} &= g_{11} R_{2^1 12} = \frac{1}{2x^1} = -R_{2121} = R_{1221} \\ R_{3223} &= g_{22} R_{3^2 23} = -\frac{1}{2x^2} = R_{2332} \\ R_{1332} &= g_{33} R_{1^3 32} = \frac{1}{2x^1} = R_{3123}\end{aligned}$$

4. Les composantes du tenseur de Ricci s'écrivent :

$$R_{ij} = g^{11} R_{1ij1} + g^{22} R_{2ij2} + g^{33} R_{3ij3}$$

et les composantes contravariantes du tenseur fondamental sont données par :

$$g^{11} = 1 \quad ; \quad g^{22} = \frac{1}{2x^1} \quad ; \quad g^{33} = \frac{1}{2x^2}$$

d'où :

$$R_{11} = g^{22} R_{2112} = \frac{1}{4(x^1)^2}$$

$$R_{22} = g^{11} R_{1221} + g^{33} R_{2332} = \frac{1}{2x^1} - \frac{1}{4(x^2)^2}$$

$$R_{33} = g^{22} R_{2332} = -\frac{1}{4x^1 x^2}$$

5. La courbure scalaire ou courbure de Ricci est définie par :

$$R = R_i^i = g^{ij} R_{ij}$$

d'où :

$$R = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} = \frac{2(x^2)^2 - x^1}{(2x^1 x^2)^2}$$