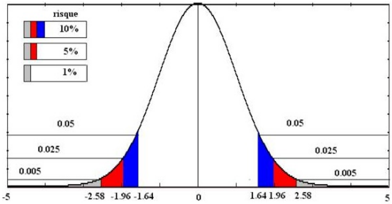


STATISTIQUES

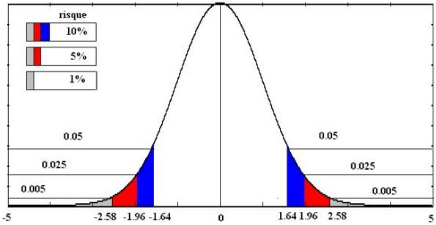
Cours I : Test d'hypothèses

Fabrice Heitz

Octobre 2014

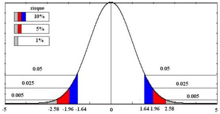
Cours I

TESTS D'HYPOTHÈSES



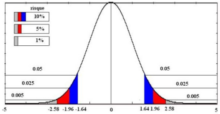
Plan du cours

Test d'hypothèses



1. Rappels de probabilités
2. Introduction aux tests
3. Une étude de cas
4. Caractéristiques générales d'un test d'hypothèses
5. Tests paramétriques classiques : moyennes, variances, proportions (TD)
6. Test du χ^2 de Pearson non traité

Annexe 1 : logiciels de statistique
Annexe 2 : tables statistiques usuelles



1. Rappels de probabilités
2. Introduction aux tests
3. Une étude de cas
4. Caractéristiques générales d'un test d'hypothèses
5. Tests paramétriques classiques : moyennes, variances, proportions
6. Test du χ^2 de Pearson

Notions évaluées (contrôle terminal)

TD : 2 séances

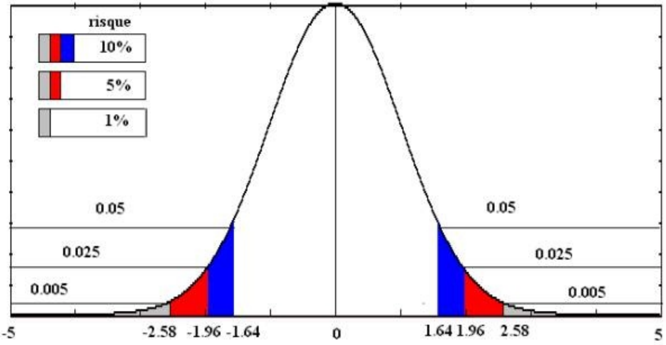
- **Test paramétriques classiques : 7 exercices d'application avec réponses**
- **Test du χ^2 de Pearson : 1 exercice d'application avec réponse**
- **Calcul de la puissance d'un test : 1 exercice avec réponse**

$\Longrightarrow$ Calculatrice : nécessaire

Bibliographie-Sitographie

- Sage publications, Introduction to Hypothesis Testing, www.sagepub.com/upm-data/40007_Chapter8.pdf
- G. Saporta, Probabilités, analyse des données et statistiques, Technip, 3ème édition, 2006.

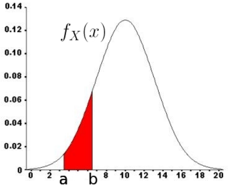
- **BiostaTGV :** http://marne.u707.jussieu.fr/biostatgv/
- **Statistical Java :** https://www.causeweb.org/repository/statjava/
- **Statistical Applets :** http://facultyweb.berry.edu/vbissonnette/applets.html
- **Introduction aux statistiques :** http://www.cons-dev.org/elearning/stat/index.html
- **Cours analyse de données - fouille de données** http://eric.univ-lyon2.fr/~ricco/cours/supports_data_mining.html
- **Introduction to Statistics** http://www.purplemonkeymath.com/index.php/geogebra-worksheets-is



densité de la loi normale et valeurs critiques.

Rappels

1. Rappels : Variable aléatoire, densité de probabilité



- **Variable aléatoire :** X (à valeurs discrètes ou continues)
- **Fonction de répartition :** $\boxed{F_X(x) = p(X \leq x)}$
- **Densité de probabilité** (ou distribution) d'une variable aléatoire continue :

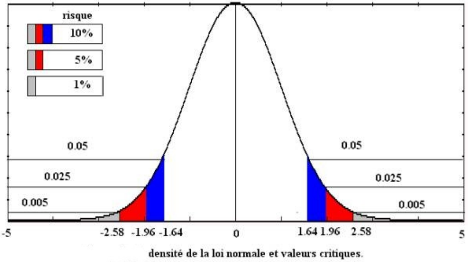
$$\boxed{f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{d}{dx} p(X \leq x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p(x < X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}}$$

- *Propriétés :*

$$f_X(x) \geq 0 \; ; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$$

$$\text{pour } a < b, \quad p(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx = F_X(b) - F_X(a)$$

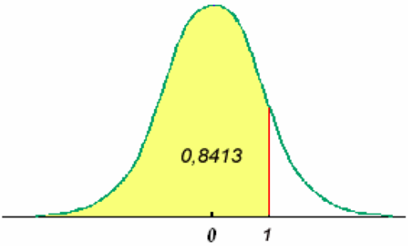
1. Rappels : Loi normale ou gaussienne



C'est la loi la plus importante en raison du théorème de la limite centrale.

- **Loi normale :** $\boxed{X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \ : \ f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- **Loi normale centrée réduite :** $Z \sim \mathcal{N}(0,1) : f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{z^2}{2}$
- *Propriété :* $\boxed{\text{si } X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \text{ alors } \frac{X-\mu}{\sigma} \ \sim \ \mathcal{N}(0,1)}$.

1. Rappels : Loi normale ou gaussienne



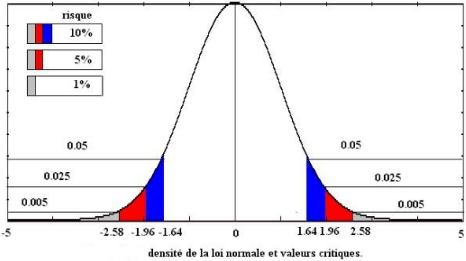
source : M. Raffestin

- Loi normale centrée réduite : $Z \sim \mathcal{N}\ (0,1)$: $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{z^2}{2}$
- **Table de la fonction de répartition** : pour z donné, détermine : $\boxed{F_Z(z) = p(Z \leq z)}$
  ex. : $p(Z \leq 1) = 0,8413$, $p(Z \leq 2) = 0,9772$.

TABLE 3 – Fonction de répartition de la loi normale / de Gauss $\mathcal{N}(0,1)$

La table donne la probabilité cumulée de $-\infty$ à z de la loi normale : $F(z) = Pr(Z \leqslant z)$

-4,0	0,0000	-2,0	0,0228	0,0	0,5000	2,0	0,9772
-3,9	0,0000	-1,9	0,0287	0,1	0,5398	2,1	0,9821
-3,8	0,0001	-1,8	0,0359	0,2	0,5793	2,2	0,9861
-3,7	0,0001	-1,7	0,0446	0,3	0,6179	2,3	0,9893
-3,6	0,0002	-1,6	0,0548	0,4	0,6554	2,4	0,9918
-3,5	0,0002	-1,5	0,0668	0,5	0,6915	2,5	0,9938
-3,4	0,0003	-1,4	0,0808	0,6	0,7257	2,6	0,9953
-3,3	0,0005	-1,3	0,0968	0,7	0,7580	2,7	0,9965
-3,2	0,0007	-1,2	0,1151	0,8	0,7881	2,8	0,9974
-3,1	0,0010	-1,1	0,1357	0,9	0,8159	2,9	0,9981
-3,0	0,0013	-1,0	0,1587	1,0	0,8413	3,0	0,9987
-2,9	0,0019	-0,9	0,1841	1,1	0,8643	3,1	0,9990
-2,8	0,0026	-0,8	0,2119	1,2	0,8849	3,2	0,9993
-2,7	0,0035	-0,7	0,2420	1,3	0,9032	3,3	0,9995
-2,6	0,0047	-0,6	0,2743	1,4	0,9192	3,4	0,9997
-2,5	0,0062	-0,5	0,3085	1,5	0,9332	3,5	0,9998
-2,4	0,0082	-0,4	0,3446	1,6	0,9452	3,6	0,9998
-2,3	0,0107	-0,3	0,3821	1,7	0,9554	3,7	0,9999
-2,2	0,0139	-0,2	0,4207	1,8	0,9641	3,8	0,9999
-2,1	0,0179	-0,1	0,4602	1,9	0,9713	3,9	1



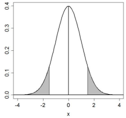
http://public.iutenligne.net/mathematiques_trans/Foucart/StatPC/general/livre/chapitre5/Iintervalledeconfiance.htm

- Loi normale centrée réduite : $Z \sim \mathcal{N}\ (0,1)$: $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{z^2}{2}$
- **Table de l'écart réduit :** pour α donné, détermine z tel que : $\boxed{p(|Z| > z) = \alpha}$

Valeurs utiles (tables) :
$p(|Z| > 1,64) = 0,1,\ p(|Z| > 1,96) = 0,05,\ p(|Z| > 2,33) = 0,02,\ p(|Z| > 2,58) = 0,01$
On en déduit :
$p(Z > 1,64) = 0,05,\ p(Z > 1,96) = 0,025,\ p(Z > 2,33) = 0,01,\ p(Z > 2,58) = 0,005$

TABLE 1 – Table de l'écart-réduit (loi normale / de Gauss $\mathcal{N}(0,1)$)

La table donne la probabilité α que l'écart-réduit égale ou dépasse, en valeur absolue, une valeur donnée ϵ, c'est-à-dire la probabilité extérieure à l'intervalle $(-\epsilon, \epsilon)$.



α	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	∞	2,58	2,33	2,17	2,05	1,96	1,88	1,81	1,75	1,70
0,1	1,64	1,60	1,55	1,51	1,48	1,44	1,41	1,37	1,34	1,31
0,2	1,28	1,25	1,23	1,20	1,17	1,15	1,13	1,10	1,08	1,06
0,3	1,04	1,02	0,99	0,97	0,95	0,93	0,92	0,90	0,88	0,86
0,4	0,84	0,82	0,81	0,79	0,77	0,76	0,74	0,72	0,71	0,69
0,5	0,67	0,66	0,64	0,63	0,61	0,60	0,58	0,57	0,55	0,54
0,6	0,52	0,51	0,50	0,48	0,47	0,45	0,44	0,43	0,41	0,40
0,7	0,39	0,37	0,36	0,35	0,33	0,32	0,31	0,29	0,28	0,27
0,8	0,25	0,24	0,23	0,21	0,20	0,19	0,18	0,16	0,15	0,14
0,9	0,13	0,11	0,10	0,09	0,08	0,06	0,05	0,04	0,03	0,01

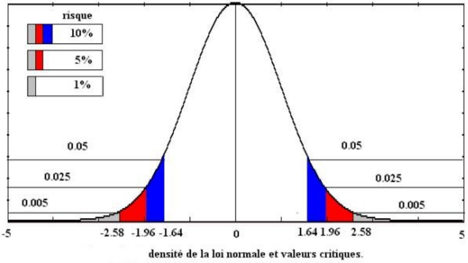
La probabilité α s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

TABLE 2 – Table de l'écart-réduit (loi normale / de Gauss $\mathcal{N}(0,1)$)

Table pour les petites valeurs de la probabilité.

α	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	0,0000001	0,00000001	0,000000001
ϵ	3,29048	3,8906	4,41717	4,89164	5,32672	5,73073	6,10941

1. Rappels : Loi normale ou gaussienne



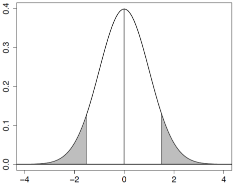
http://public.iutenligne.net/mathematiques_trans/Foucart/StatPC/general/livre/chapitre5/Iintervalledeconfiance.htm

- Loi normale : $X \sim \mathcal{N}\,(\mu, \sigma^2)$: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$
- Loi normale centrée réduite : $Z \sim \mathcal{N}\,(0, 1)$: $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{z^2}{2}$

Applet java

http://www.causeweb.org/repository/statjava/
http://www.causeweb.org/repository/statjava/instructions/NPInstr.html
http://www.causeweb.org/repository/statjava/NormalApplet.html
http://www.causeweb.org/repository/statjava/NormalZApplet.html
http://www.causeweb.org/repository/statjava/NormalPApplet.html

1. Rappels : Somme de variables aléatoires gaussiennes

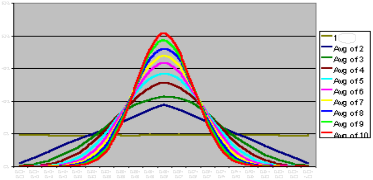


- Toute somme de N variables aléatoires **gaussiennes** $X_1, X_2, ..., X_N$ est encore une variable aléatoire gaussienne. Si de surcroît les variables sont **indépendantes** :
  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ ind. $\Rightarrow \sum_{i=1}^N X_i \; \sim \; \mathcal{N}(\sum_{i=1}^N \mu_i, \sum_{i=1}^N \sigma_i^2)$
- Conséquence : **distribution de la moyenne empirique** : soit $X_1, X_2, ..., X_N$ une suite de v.a. **gaussiennes indépendantes**, de même moyenne μ et d'écart-type σ :

$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ind. $\Rightarrow \bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \; \sim \; \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{N})$

$$\Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} \; \sim \; \mathcal{N}(0, 1).$$

1. Rappels : Théorème de la limite centrale (TLC)



©http ://simulationtutorials.com

- Toute somme de N variables aléatoires **indépendantes et identiquement distribuées** (iid) **tend vers une variable aléatoire gaussienne**. Pour $N > 30$, cette propriété est bien vérifiée, quelle que soit la distribution initiale (loi continue).
- **TLC** : soit $X_1, X_2, ..., X_N$ une suite de v.a. **iid.** de moyenne μ et d'écart-type σ.

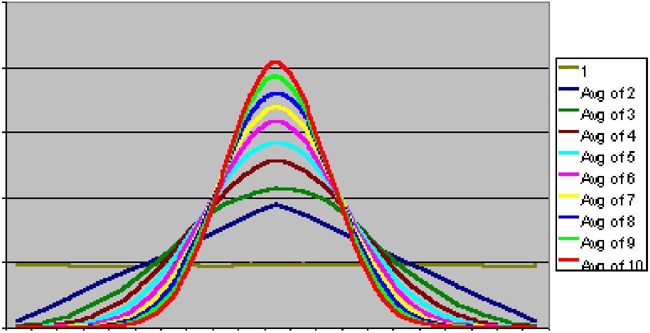
$\boxed{\text{Pour } N > 30}$ la moyenne empirique :

$$\boxed{\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \;\sim\; \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{N})}$$

soit encore :

$$\boxed{Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} \;\sim\; \mathcal{N}(0, 1)}$$

1. Rappels : Théorème de la limite centrale (TLC)

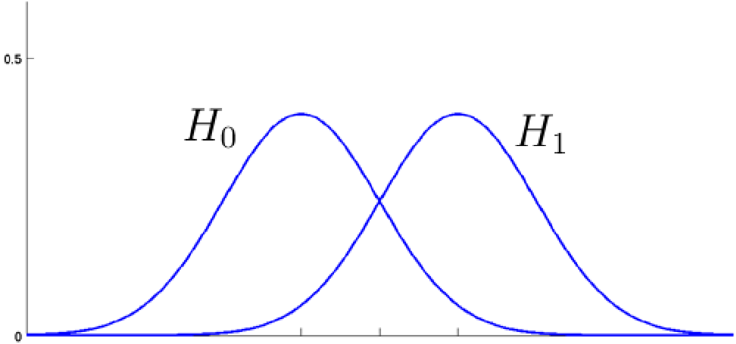


TLC : moyenne de N variables aléatoires indépendantes (de loi uniforme)

©http ://simulationtutorials.com

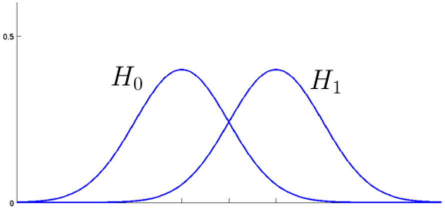
Applets java

`http://www.causeweb.org/repository/statjava/CLT2Applet.html`
`http://www.mathcs.org/java/programs/CLT/clt.html`
`http://www.univ-rouen.fr/LMRS/Vulgarisation/Galton/galton.html`



Introduction aux tests

2. Introduction : Hypothèse nulle H_0

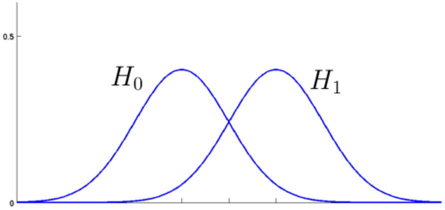


Test d'hypothèse (ou test statistique) : procédé permettant de décider si une hypothèse donnée H_0 peut être acceptée ou est rejetée, au vu des données disponibles.
L'hypothèse H_0 à tester, appelée « hypothèse nulle », correspond à une *absence de différence ou d'effet*.

Exemples :

- H_0 : deux populations d'étudiants (de même niveau) ayant suivi des méthodes pédagogiques différentes ont les mêmes notes moyennes aux examens
- H_0 : le temps moyen de bon fonctionnement de deux marques de disques durs est le même.
- H_0 : la proportion de fumeurs chez les étudiants est la même que dans la population générale.

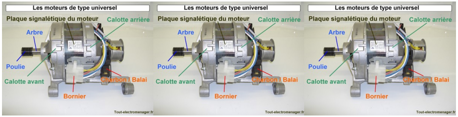
2. Introduction : Hypothèse alternative H_1

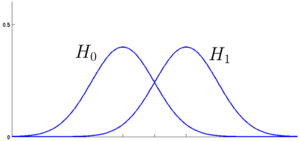


L'hypothèse alternative notée H_1 est l'hypothèse contraire que l'on souhaite prouver en rejetant l'hypothèse nulle. Elle traduit une différence ou un effet *statistiquement significatifs.*

Exemples :

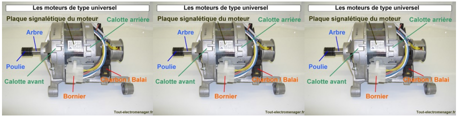
- H_1 : deux populations d'étudiants ayant suivi des méthodes pédagogiques différentes ont des notes moyennes significativement différentes aux examens ;
- H_1 : le temps moyen de bon fonctionnement du disque dur de la marque B est significativement différent de celui de la marque A.
- H_1 : le temps moyen de bon fonctionnement du disque dur de la marque B est significativement supérieur à celui de la marque A.



...


Une étude de cas

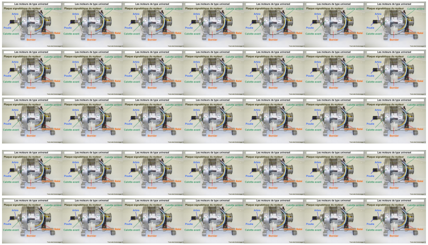
3. Une étude de cas



...

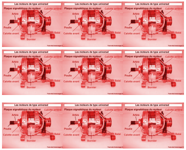
Les moteurs des appareils électroménagers d'une marque M ont une durée de vie moyenne de $\mu_r = 3000$ heures avec un écart-type $\sigma_r = 150$ heures.
A la suite d'une modification dans la fabrication des moteurs, le fabricant affirme que les nouveaux moteurs ont une durée de vie moyenne supérieure à celle des anciens.

- On teste un échantillon de $N = 50$ nouveaux moteurs. On note X_i les durées de vie observées.
- On calcule la durée de vie moyenne (empirique) des nouveaux moteurs : $\bar{X} = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} X_i = 3040,3$ heures.
- Question : les nouveaux moteurs apportent-ils une amélioration *statistiquement significative* dans la duré de vie des appareils électroménagers ?



Référence : anciens moteurs

Durée de vie moyenne : μ_r=3000 h, $\sigma_r = 150$ h.

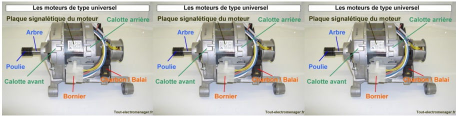


Echantillon : 50 nouveaux moteurs

Durée de vie moyenne empirique (observée) : $\bar{X}$ =3040,3 h.

- **Hypothèse H_0 :** le nouveau procédé *ne change pas* la durée de vie moyenne
- **Hypothèse H_1 :** le nouveau procédé *augmente* la durée de vie moyenne

3. Une étude de cas



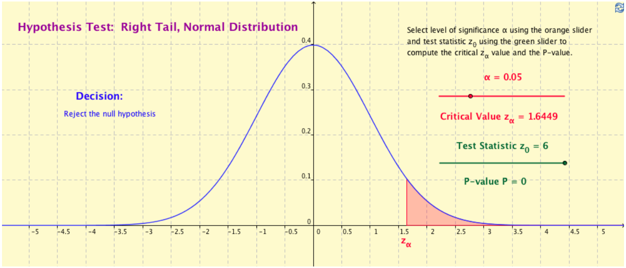
...

Référence : durée de vie moyenne des anciens moteurs : μ_r=3000 h, $\sigma_r = 150$ h.
Données : échantillon de nouveaux moteurs ($N = 50$) : $\bar{X}$ =3040,3 h.

- **Hypothèse H_0 :** le nouveau procédé *ne change pas* la durée de vie moyenne
- **Hypothèse H_1 :** le nouveau procédé *augmente* la durée de vie moyenne

---

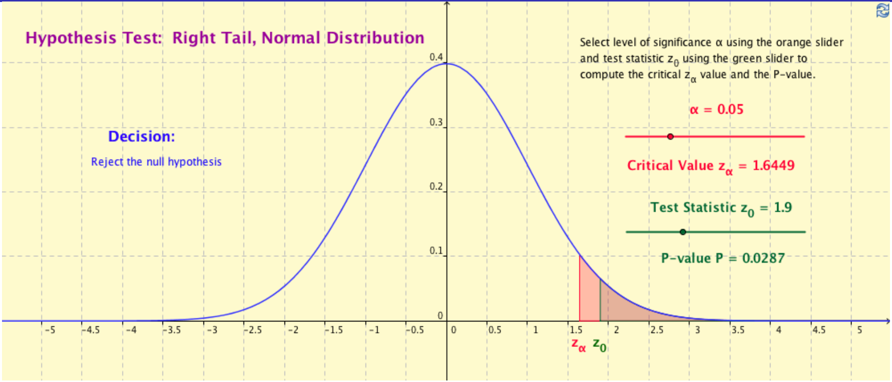
- Comment décider ? $\Rightarrow$ on utilise *l'écart* entre $\bar{X}$ et la référence μ_r :
  - Ecart $(\bar{X} - \mu_r)$ faible $\rightsquigarrow H_0$.
  - Ecart $(\bar{X} - \mu_r) > 0$ et grand $\rightsquigarrow H_1$.
- Question : l'écart observé $\bar{X} - \mu_r = 40,3$ heures est-il « suffisamment grand » pour rejeter H_0 ?
- Intuitivement on comprend que la réponse dépendra de la valeur de l'écart mais aussi de la taille N de l'échantillon de test.



Distribution de l'écart normalisé $Z = \frac{\bar{X} - \mu_r}{\sigma_r / \sqrt{N}}$

- Hypothèse H_0 : le nouveau procédé *ne change pas* la durée de vie moyenne
- L'écart observé $\bar{X} - \mu_r = 40,3$ heures est-il suffisamment grand pour rejeter H_0 ?
- Sous l'hypothèse H_0, la durée de vie d'un moteur testé est une v.a. X de moyenne $\mu_r = 3000$ et d'écart-type $\sigma_r = 150$ (NB. sa distribution n'est pas connue).
- D'après le TLC, sous H_0, la moyenne $\bar{X}$ de l'échantillon (avec $N = 50 > 30$) :

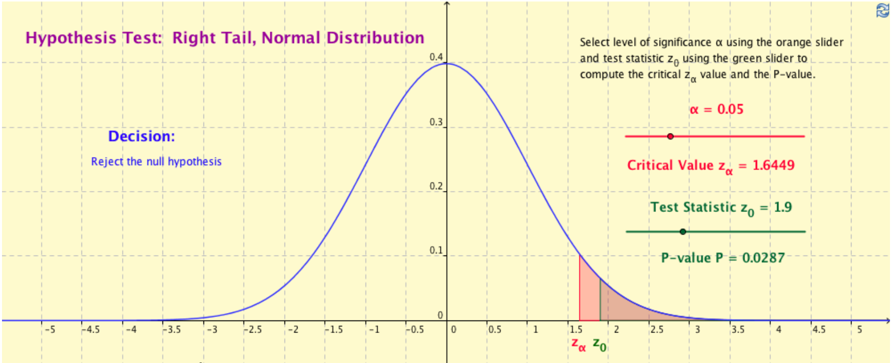
$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i \sim \mathcal{N}\left(\mu_r, \frac{\sigma_r^2}{N}\right) \implies Z = \frac{\bar{X} - \mu_r}{\sigma_r / \sqrt{N}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$



Distribution de l'écart normalisé $Z = \frac{\bar{X} - \mu_r}{\sigma_r / \sqrt{N}}$

- Si H_0 est vraie : Écart normalisé : $Z = \frac{\bar{X} - \mu_r}{\sigma_r / \sqrt{N}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- Si H_0 est vraie : $p(Z > 1,64) = \int_{1,64}^{+\infty} f_Z(z)dz \simeq 0,05 = 5\%$ (faible).
- $\boxed{\text{Écart observé}}$ $Z = z_o = \frac{40,3}{150/\sqrt{50}} = 1,90 \; > \; 1,64$
- $\boxed{\text{Décision}}$ on rejette l'hypothèse H_0 (avec « 5 chances sur 100 » de se tromper).

3. Une étude de cas

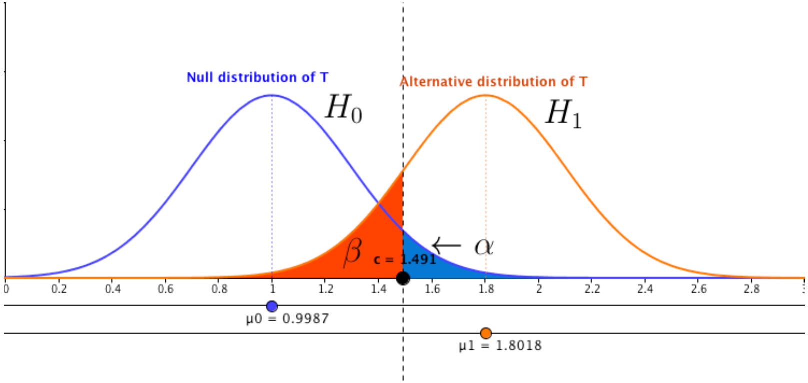


Applet : http://www.purplemonkeymath.com/ISworksheets/Hyp_Tests_Right_Tail.html

Distribution de l'écart normalisé $Z = \frac{\bar{X} - \mu_r}{\sigma_r / \sqrt{N}}$

Applets java

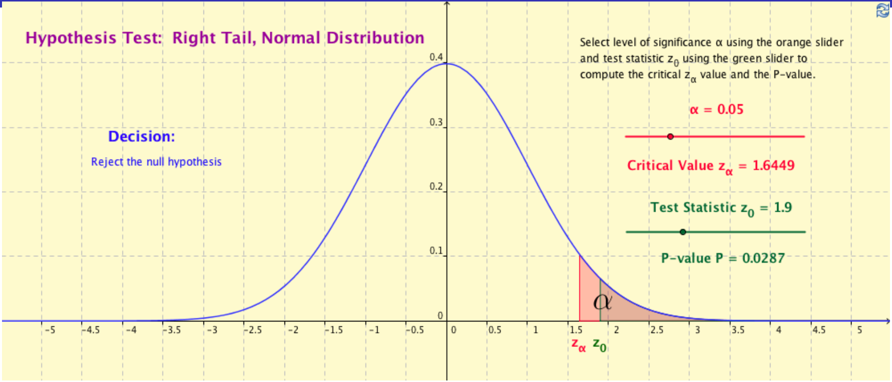
http://www.purplemonkeymath.com/ISworksheets/Hyp_Tests_Right_Tail.html
http://www.purplemonkeymath.com/ISworksheets/Hyp_Tests_Two_Tail.html



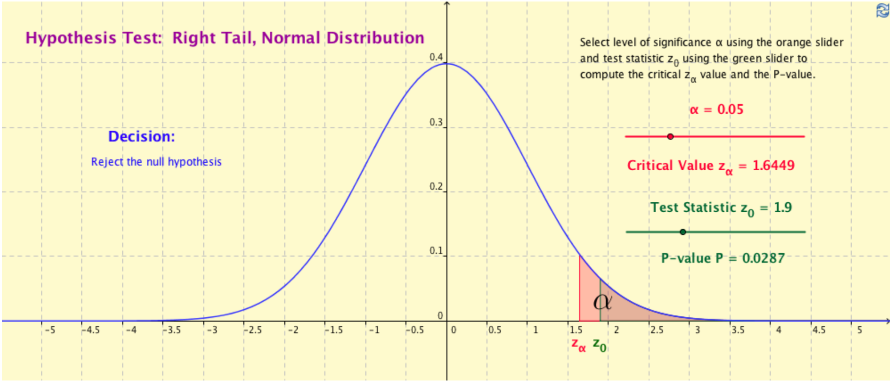
Caractéristiques générales d'un test d'hypothèses

4. Caractéristiques générales d'un test

Test : niveau de risque α, valeur critique ou seuil z_α

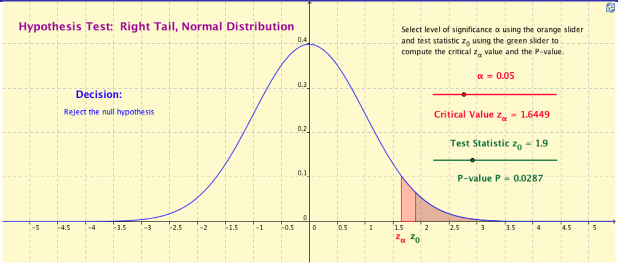


- **Calcul de la statistique** : $Z = \frac{\bar{X} - \mu_r}{\sigma_r / \sqrt{N}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Valeur observée : $Z = z_o$
- On se donne un **niveau de risque** (ou **seuil de signification**) α (= 5% ou 1% ...)
- On détermine z_α tel que : $\alpha = p(Z > z_\alpha) = \int_{z_\alpha}^{+\infty} f_Z(z)dz$.
  z_α : **valeur critique** (ou **seuil de décision**)
  - Si $z_o > z_\alpha$ on rejette l'hypothèse H_0 (on décide H_1)
  - Si $z_o < z_\alpha$ on ne peut rejeter H_0

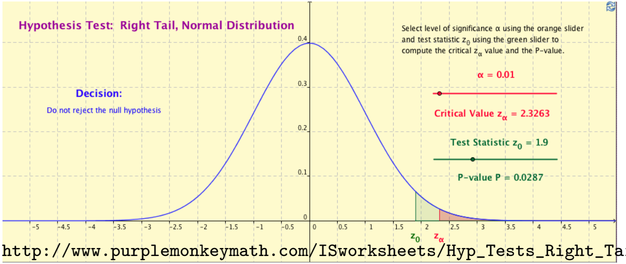


- $\alpha = p(Z >$ seuil de décision $z_\alpha) = \int_{z_\alpha}^{+\infty} f_Z(z)dz$ (sous l'hypothèse H_0).
- α est **la probabilité de décider H_1 alors que H_0 est vraie**. α est encore appelé **risque de première espèce**.
- Le choix de α est lié au risque que l'on accepte de prendre dans la décision. Ici :
  ▷ Au niveau de risque $\alpha = 5\%$: $z_\alpha = 1,64$, $z_o = 1,90 > 1,64 \Rightarrow$ on rejette H_0
  ▷ au niveau de risque $\alpha = 1\%$: $z_\alpha = 2,33$ $z_o = 1,90 < 2,33 \Rightarrow$ on ne peut rejeter H_0

4. Caractéristiques générales d'un test

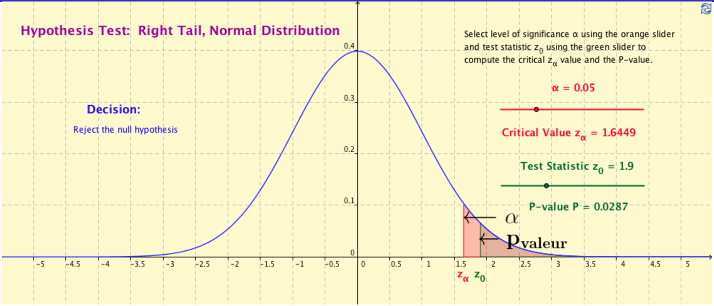


au niveau de risque $\alpha = 5\%$, on rejette H_0



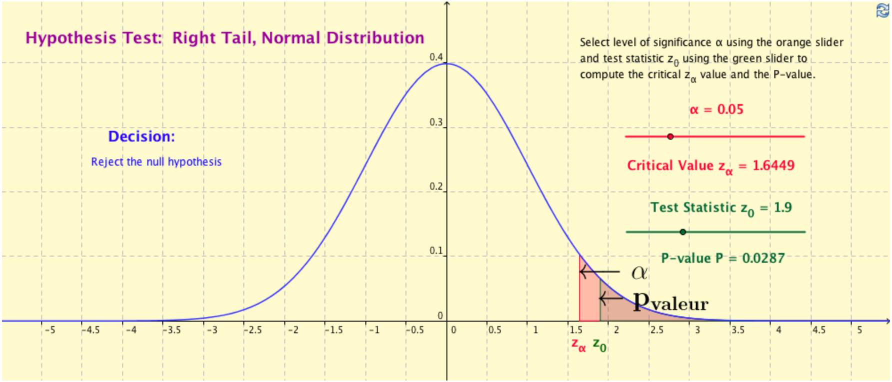
Applet : `http://www.purplemonkeymath.com/ISworksheets/Hyp_Tests_Right_Tail.html`

au niveau de risque $\alpha = 1\%$, on ne peut rejeter H_0



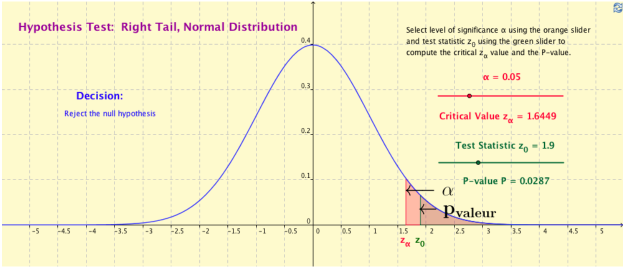
- $\boxed{\text{risque } \alpha = p(Z > z_\alpha) = \int_{z_\alpha}^{+\infty} f_Z(z)dz}$ où z_α est le seuil de décision.
- Pour une observation z_0 donnée, on appelle p-valeur **la plus petite valeur de** α **conduisant à un rejet de** H_0. C'est la valeur de α obtenue en prenant comme seuil de décision : $z_\alpha = z_0$. Dans le cas du test ci-dessus (dit « unilatéral à droite ») :

  $\boxed{\text{p-valeur} = p(Z > z_0) = \int_{z_o}^{+\infty} f_Z(z)dz}$ (pour un test unilatéral à droite)
- A.N. pour $z_o = 1,90$ on a : p-valeur $= 0,0287$. Pour l'écart observé $z_o = 1,90$ on rejettera H_0 pour tout choix du niveau de risque $\alpha \geq 2,87\%$.

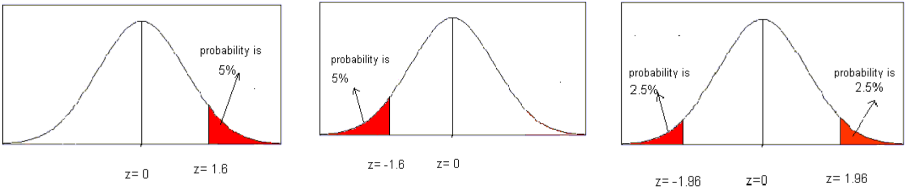


Applets java

http://www.purplemonkeymath.com/ISworksheets/Hyp_Tests_Right_Tail.html



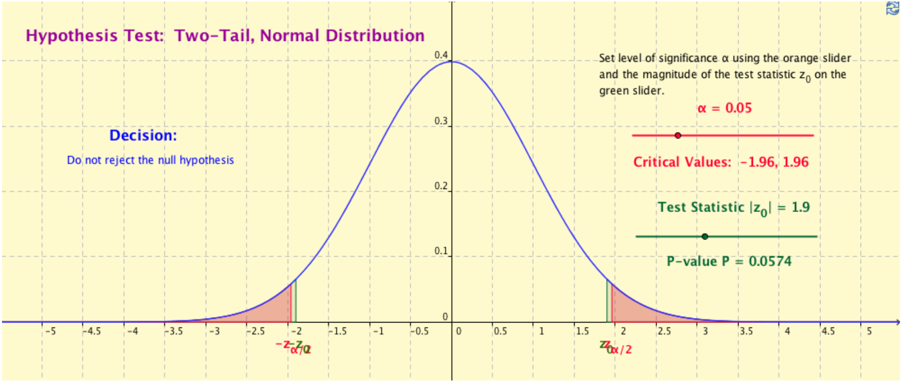
- *p-valeur* $= \int_{z_o}^{+\infty} f_Z(z)dz$ (pour un test unilatéral à droite)
- Autre façon d'exprimer le test :
  - On choisit le risque α (= 5%, 1%, ...)
  - Si p-valeur $<$ α on rejette H_0
  - Si p-valeur $> \alpha$ on ne peut rejeter H_0
- Interprétation : **lorsque H_0 est rejetée, plus la p-valeur est faible, plus fort est le rejet de H_0 (degré de signification du test)**
- On peut aussi faire le test sans choisir α et donner simplement la p-valeur (qui est la valeur de α au-delà de laquelle H_0 est rejetée).



http ://www.ppsw.rug.nl/ bve/stat/module6/5eenzijdigetoetsen.html

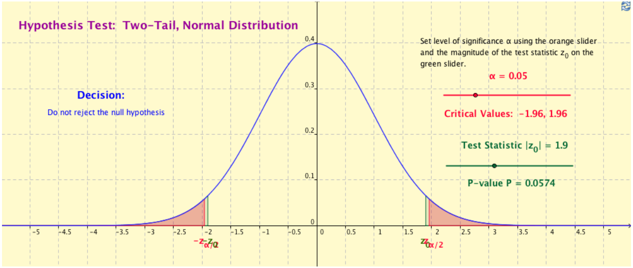
- Hypothèse H_0 : le nouveau procédé *ne change pas* la durée de vie moyenne : $\mu = \mu_r$
- **Test unilatéral 1 (« à droite »)** : $\mu > \mu_r$
  - Hypothèse H_1 : le nouveau procédé *augmente* la durée de vie moyenne
- **Test unilatéral 2 (« à gauche »)** : $\mu < \mu_r$
  - Hypothèse H_1 : le nouveau procédé *diminue* la durée de vie moyenne
- **Test bilatéral** : $\mu \neq \mu_r$
  - Hypothèse H_1 : le nouveau procédé *modifie* la durée de vie moyenne

$\Rightarrow$ Pour un risque α donné, le test bilatéral est plus exigeant pour rejeter H_0



Applets java

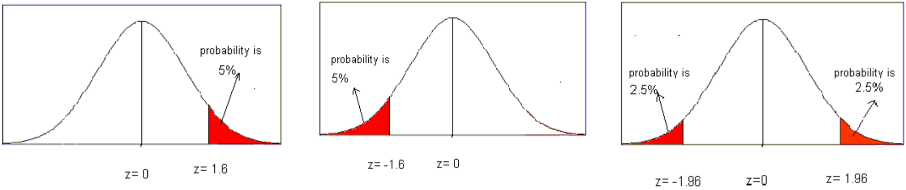
http://www.purplemonkeymath.com/ISworksheets/Hyp_Tests_Two_Tail.html



Test bilatéral : le nouveau procédé *modifie* t-il la durée de vie moyenne ?

- L'écart observé $\bar{X} - \mu_r = 40,3$ heures est-il significatif ?
- On sait que $Z = \frac{\bar{X}-\mu_r}{\sigma_r/\sqrt{N}} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Valeur observée : $Z = z_o = \frac{40,3}{150/\sqrt{50}} = 1,90$
- $z_{\alpha/2}$: valeur critique telle que : $p(|Z| > z_{\alpha/2}) = \int_{-\infty}^{-z_{\alpha/2}} f_Z(z)dz + \int_{z_{\alpha/2}}^{+\infty} f_Z(z)dz = \alpha$
  $\Rightarrow$ Pour $\alpha = 0,05$, la valeur critique est : $z_{\alpha/2} = 1,96$
  - Si $z_o > z_{\alpha/2}$ ou $z_o < -z_{\alpha/2}$ on rejette l'hypothèse H_0
  - Sinon on ne peut rejeter H_0

  $\Rightarrow -1,96 < z_o < 1,96$ donc on ne peut rejeter H_0 au risque de 5%

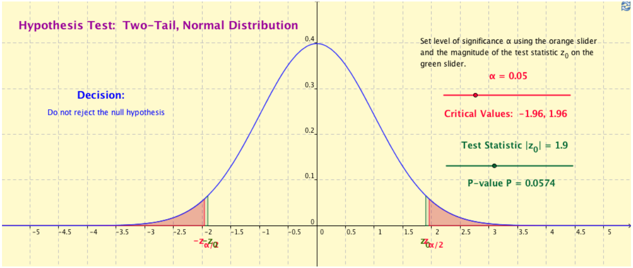


http ://www.ppsw.rug.nl/ bve/stat/module6/5eenzijdigetoetsen.html

Les définitions des p-valeurs sont adaptées comme suit :

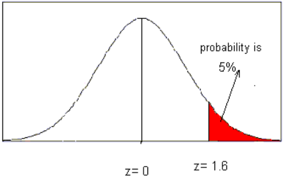
- **Test unilatéral 1 (« à droite »)** : $\mu > \mu_r$
  - $p\text{-}valeur = \int_{z_o}^{+\infty} f_Z(z)dz$
- **Test unilatéral 2 (« à gauche »)** : $\mu < \mu_r$
  - $p\text{-}valeur = \int_{-\infty}^{z_o} f_Z(z)dz$
- **Test bilatéral** : $\mu \neq \mu_r$
  - $p\text{-}valeur = 2 \int_{|z_o|}^{+\infty} f_Z(z)dz$ (pour les distributions symétriques)

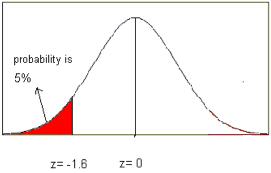
où z_o est la valeur observée pour la statistique Z.

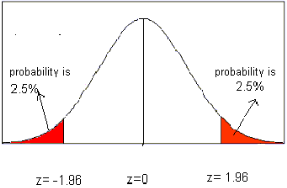


Test bilatéral : le nouveau procédé *modifie* t-il la durée de vie moyenne ?

- L'écart observé $\bar{X} - \mu_r = 40,3$ heures est-il significatif ?
- Valeur observée : $Z = z_o = 1,90$
- *p-valeur* $= 2 \int_{|z_o|}^{+\infty} f_Z(z)dz \simeq 0,0574$
  - La plus petite valeur de α pour laquelle l'hypothèse H_0 est rejetée est $\alpha \simeq 5,74\%$
  - Au seuil de signification $\alpha = 5\%$ l'hypothèse H_o ne peut donc être rejetée.



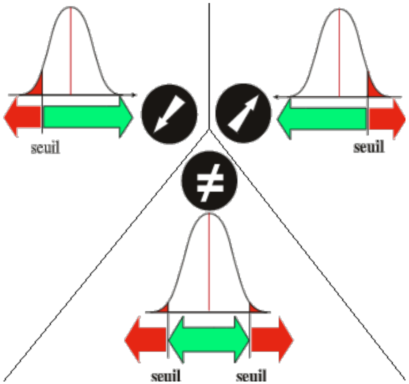




http ://www.ppsw.rug.nl/ bve/stat/module6/5eenzijdigetoetsen.html

- On définit **deux hypothèses** :
  - **Hypothèse nulle** H_0 que l'on cherche à rejeter
  - **Hypothèse alternative** H_1 dont on souhaite démontrer la véracité
- On se donne **un niveau de risque** $\alpha = p(\text{décider } H_1 \mid H_0 \text{ est vraie}) = p(H_1|H_0)$.
- On calcule **une statistique de test** T (grandeur aléatoire, fonction des données, **dont on connaît la distribution sous** H_0), qui prend pour valeur T_{obs}.
- La valeur choisie pour α définit **la zone de rejet de** H_0 (ou région critique) $\mathcal{R}_c$, dont la forme va dépendre du type de test (unilatéral, bilatéral).

  $\Rightarrow$ Le test conduit à la décision suivante :
  - si $T_{obs} \in \mathcal{R}_c$ on rejette H_0
  - si $T_{obs} \notin \mathcal{R}_c$ on ne peut rejeter H_0 (on l'accepte « provisoirement »)



Régions critiques (ou zone de rejet) $\mathcal{R}_c$: en rouge

		Réalité (inconnue)	
		H_0 vraie	H_1 vraie
Décision	rejet de H_0 (décision H_1)	α	$1-\beta$
	non rejet de H_0	$1-\alpha$	β

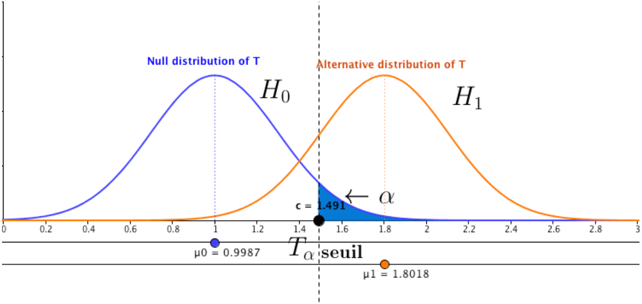
Table : les probabilités d'erreur α et β

Deux types d'erreurs :

- « rejeter H_0 (décider H_1) alors que H_0 est vraie » **(erreur de 1ère espèce)**
  $p(H_1|H_0) = \alpha$ **risque de 1ère espèce** (sa valeur est fixée à l'avance : 5%, 1 %, ...).
- « ne pas rejeter H_0 alors que H_1 est vraie » **(erreur de 2ème espèce)**
  $p(H_0|H_1) = \beta$ **risque de 2ème espèce** (sa valeur ne peut être calculée que si l'on connaît la distribution sous H_1).

Puissance du test :

- **puissance** $= p(H_1|H_1) = 1-\beta$

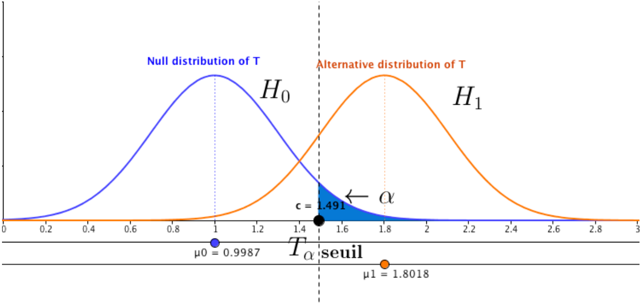


Risque de 1ère espèce : $\alpha = p(H_1|H_0)$

	H_0 vraie	H_1 vraie
rejet de H_0 (décision H_1)	α	$1-\beta$
non rejet de H_0	$1-\alpha$	β

Applets java

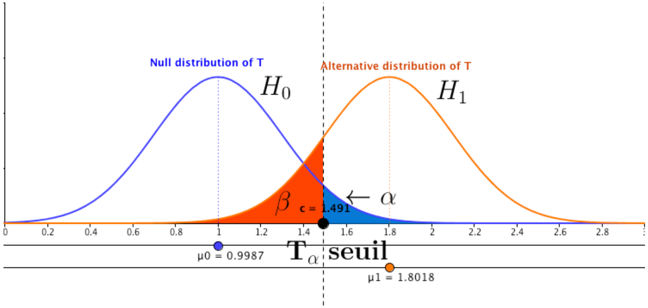
http://www.math.usu.edu/~schneit/CTIS/HTErrors/
http://www.causeweb.org/repository/statjava/HypoTest0Applet.html



Risque de 1ère espèce : $\alpha = p(H_1|H_0) = p(T >$ **seuil** $T_\alpha \,|\, H_0)$

	H_0 vraie	H_1 vraie
rejet de H_0 (décision H_1)	α	$1-\beta$
non rejet de H_0	$1-\alpha$	β

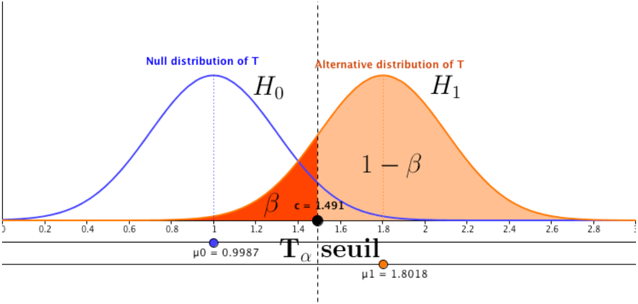
4. Caractéristiques générales d'un test



Risque de 2ème espèce : $\beta = p(H_0|H_1) = p(T <$ **seuil** $T_\alpha \mid H_1)$

	H_0 vraie	H_1 vraie
rejet de H_0 (décision H_1)	α	$1-\beta$
non rejet de H_0	$1-\alpha$	β

- Les deux risques α et β sont **antagonistes** (si $\alpha \searrow$, $\beta \nearrow$ et inversement).
- β ne peut-être calculée que si l'on connaît la distribution sous H_1.

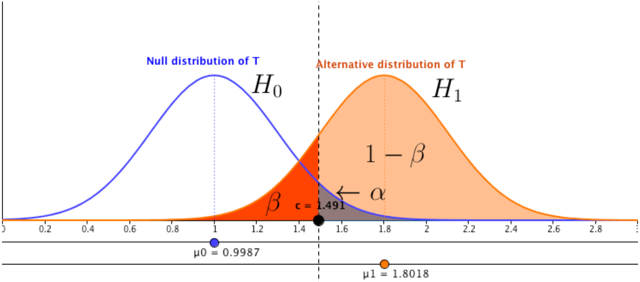


Puissance du test : $1-\beta = p(H_1|H_1) = p(T >$ **seuil** $T_\alpha \mid H_1)$

(β est aussi appelé « manque de puissance » du test).

	H_0 vraie	H_1 vraie
rejet de H_0 (décision H_1)	α	$1-\beta$
non rejet de H_0	$1-\alpha$	β

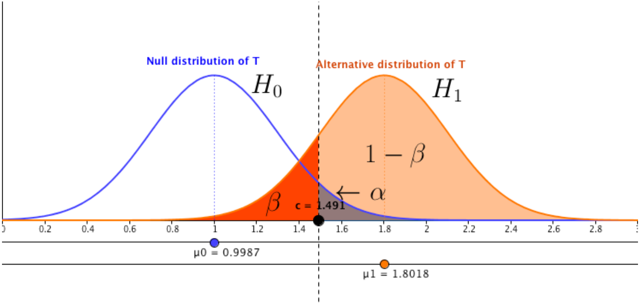
- La puissance ne peut-être calculée que si l'on connaît la distribution sous H_1



Applet : http://www.math.usu.edu/~schneit/CTIS/HTErrors/

$$\alpha = p(H_1|H_0), \text{ puissance du test } 1-\beta = p(H_1|H_1)$$

- Un bon test est un test qui, **pour α donné, maximise la puissance** $1-\beta$.
- Un bon test doit avoir **une puissance** $\geq 0,80$ (la puissance maximale est 1).



$\alpha = p(H_1|H_0)$, puissance du test $1-\beta = p(H_1|H_1)$

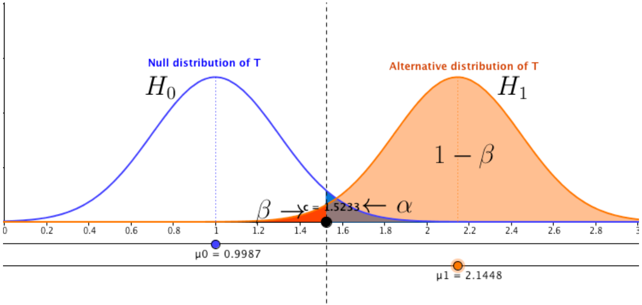
Remarques importantes :

- En général on connaît la distribution sous H_0, mais pas sous H_1 !

  $\Rightarrow$ Formulation du test non symétrique par rapport à H_0 et H_1

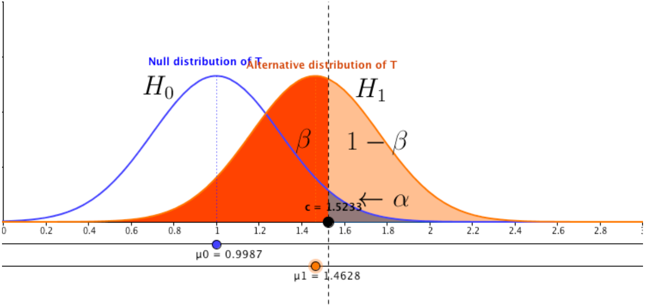
  $\Rightarrow$ Si la statistique T_{obs} est dans la zone de rejet, on rejette H_0 (et donc on accepte H_1)

  $\Rightarrow$ Dans le cas contraire, *on ne peut accepter définitivement l'hypothèse H_0*. On ne peut qu'affirmer que les données ne permettent pas de la rejeter (voir exemple suivant)



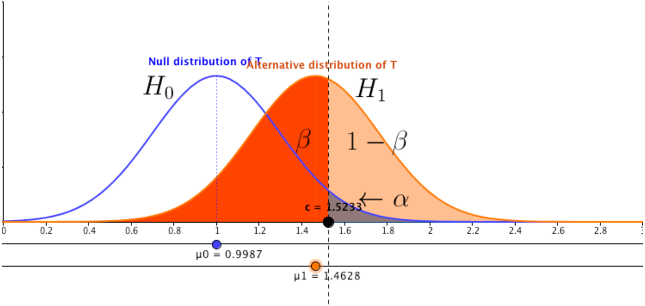
$\alpha = p(H_1|H_0)$, $\beta = p(H_0|H_1)$, puissance du test : $1 - \beta = p(H_1|H_1)$

Bonne situation



$\alpha = p(H_1|H_0)$, $\beta = p(H_0|H_1)$, puissance du test : $1-\beta = p(H_1|H_1)$

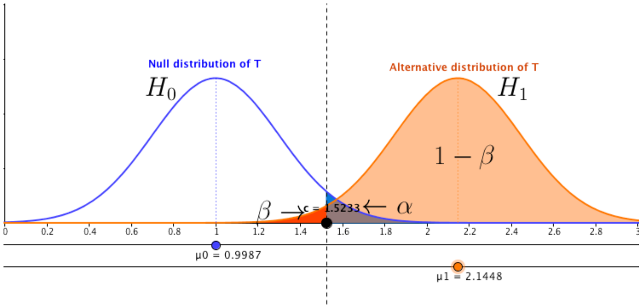
Mauvaise situation



$$\alpha = p(H_1|H_0),\ \beta = p(H_0|H_1),\ \text{puissance du test : } 1-\beta = p(H_1|H_1)$$

Mauvaise situation :

- La différence $|\mu_1 - \mu_0|$ est « trop faible ». On discrimine très mal les deux hypothèses.
- Pour $\alpha = 5\%$, la puissance $1-\beta$ est de $0,42$. $\beta = 0,58$!
- **Même si le test conclut au non rejet de H_0, on ne peut conclure que H_0 est vraie**. On voit que H_1 pourrait également être vraie. Le risque de 2ème espèce β de ne pas rejeter H_0 alors que H_1 est vraie est très grand ($= 0,58$).
  $\Rightarrow$ on ne peut conclure que H_0 est vraie lorsqu'on ne connaît pas la distribution sous H_1
  $\Rightarrow$ la puissance mesure la capacité à discriminer les deux hypothèses

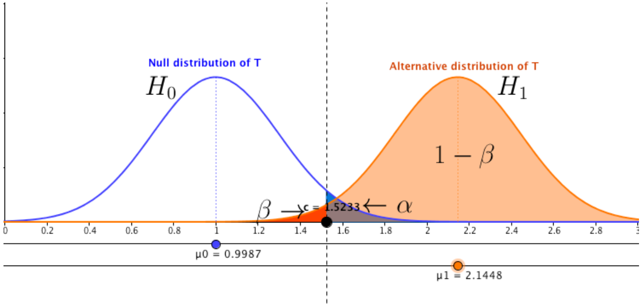


$\alpha = p(H_1|H_0)$, $\beta = p(H_0|H_1)$, puissance du test : $1-\beta = p(H_1|H_1)$

Bonne situation :

- La différence $|\mu_1 - \mu_0|$ est « grande »
- On discrimine facilement les deux hypothèses : α est petit, β est petit et la puissance est proche de 1.
- Pour $\alpha = 5\%$, la puissance du test $1-\beta$ est de $0,98$, $\beta = 2\%$
- Rappel : un test est satisfaisant s'il a une puissance d'au moins $0,80$.
  $\Rightarrow$ la puissance mesure aussi la capacité à bien discriminer les deux hypothèses.

4. Caractéristiques générales d'un test

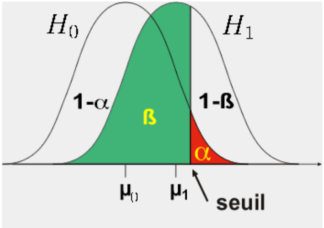


$\alpha = p(H_1|H_0)$, $\beta = p(H_0|H_1)$, puissance du test : $1-\beta = p(H_1|H_1)$

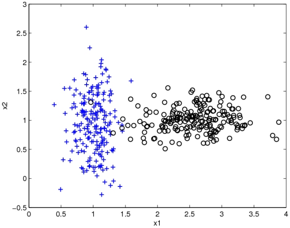
Eléments clés qui jouent sur la puissance du test :

- La différence $|\mu_1 - \mu_0|$. Lorsque $|\mu_1 - \mu_0| \nearrow$, la puissance $\nearrow$.
- les variances sous les deux hypothèses H_0 et H_1 qui dépendent du nombre N d'échantillons $\left(\text{rappel : } \bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{N}\right)\right)$. Lorsque $N \nearrow$, les variances $\searrow$, la puissance $\nearrow$.

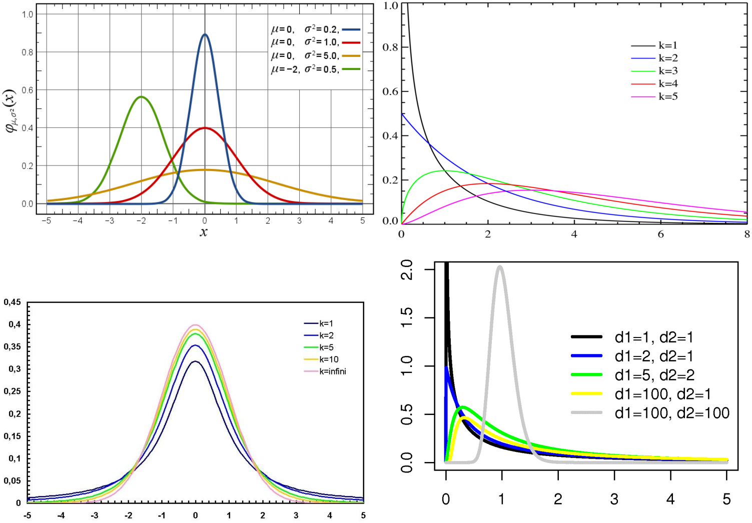
Augmenter le nombre d'échantillons permet d'améliorer la puissance du test.
cf. *http ://www.causeweb.org/repository/statjava/HypoTest0Applet.html*



- Hypothèse H_0 : la durée de vie moyenne ne change pas : $\mu = \mu_0$
- Hypothèse H_1 :
  - la durée de vie moyenne augmente : $\mu > \mu_0$
  - la durée de vie moyenne diminue : $\mu < \mu_0$
  - la durée de vie moyenne change : $\mu \neq \mu_0$
  - la durée de vie moyenne devient : $\mu = \mu_1$ (avec $\mu_1 \neq \mu_0$)
- **Hypothèses *simples* :** $\mu = \mu_0$, $\mu = \mu_1$
- **Hypothèses *composites* :** $\mu > \mu_0$, $\mu < \mu_0$, $\mu \neq \mu_0$.

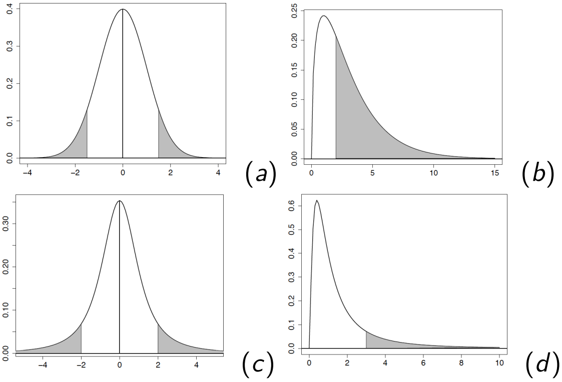


- Les **tests *paramétriques*** supposent que l'on connaît les distributions des statistiques de test.
- Les **tests *non paramétriques*** ne nécessitent pas de connaissance des distributions. On effectue le test directement sur les N échantillons disponibles (avec N suffisamment grand).
- Les tests non paramétriques sont **moins puissants** que les tests paramétriques.



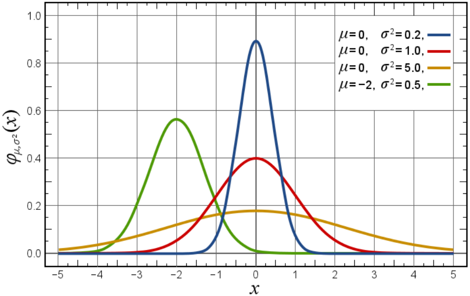
$\mu=0,\ \sigma^2=0.2,$
$\mu=0,\ \sigma^2=1.0,$
$\mu=0,\ \sigma^2=5.0,$
$\mu=-2,\ \sigma^2=0.5,$
$\varphi_{\mu,\sigma^2}(x)$
x
k=1
k=2
k=3
k=4
k=5
k=1
k=2
k=5
k=10
k=infini
d1=1, d2=1
d1=2, d2=1
d1=5, d2=2
d1=100, d2=1
d1=100, d2=100

5. Tests paramétriques classiques



N. Meyer, LBIM, UdS

- Les tests *paramétriques* supposent que l'on connaît les distributions (lois) des statistiques de test sous l'hypothèse H_0.
- Les lois qui interviennent dans les tests paramétriques classiques sont : (a) la loi normale ; (b) la loi du χ^2 à k ddl ; (c) la loi de Student à k degrés de liberté (ddl) ; (d)la loi de Fisher-Snedecor à d_1 et d_2 ddl (d).
- Le nombre de degrés de liberté est égal au nombre d'observations moins le nombre de relations entre ces observations. C'est le nombre de variables *indépendantes*.

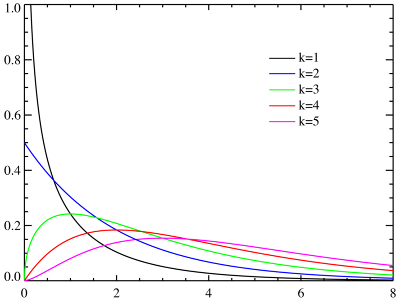


Loi normale $\mathcal{N}\ (\mu, \sigma^2)$

On obtient une loi normale lorsque l'on fait la somme (ou la moyenne) de $N > 30$ variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (iid).

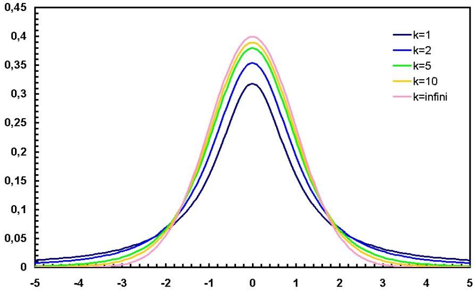
5. Tests paramétriques classiques

Loi du χ^2



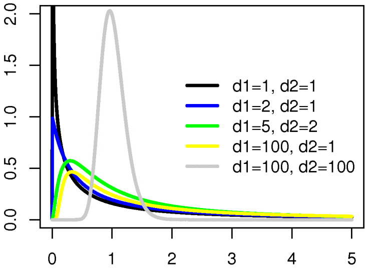
Loi du χ^2 à k ddl

On obtient une loi du χ^2 à k ddl lorsqu'on fait la somme des carrés de k variables indépendantes qui suivent une loi normale centrée réduite.
La distribution du χ^2 est une distribution asymétrique. Elle a une moyenne égale au nombre de ddl k et converge vers une loi normale quand le nombre de ddl (lié au nombre d'observations) augmente.



Loi de Student à k ddl

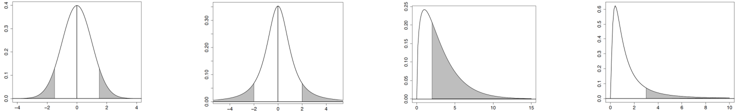
On obtient une loi de Student lorsqu'on fait le quotient entre une variable suivant une loi normale centrée réduite et la racine carrée d'une variable distribuée suivant la loi du χ^2.
La distribution symétrique, centrée en 0, est plus aplatie que la gaussienne. La loi de Student converge vers la loi normale, lorsque le nombre de ddl k (ou d'observations) augmente ($k > 30$).



Loi de Fisher à d_1 et d_2 ddl

On obtient une loi de Fisher (à d_1 et d_2 ddl) lorsqu'on fait le quotient de deux variables aléatoires indépendantes U_1 et U_2, distribuées chacune selon une loi du χ^2 et ajustées pour leur nombre de degrés de liberté (respectivement d_1 et d_2) : $\frac{U_1/d_1}{U_2/d_2}$

Tests sur une seule population (comparaison par rapport à une référence connue)

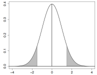
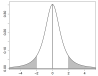
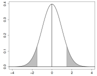
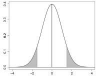


N. Meyer, LBIM, UdS

Il s'agit de déterminer si un paramètre d'une population est identique à une valeur de référence donnée.
Les paramètres testés sont : la moyenne, la variance, la proportion d'une modalité d'une variable qualitative dans la population.
Le test se base sur l'observation de N échantillons X_i tirés aléatoirement et indépendamment dans la population.

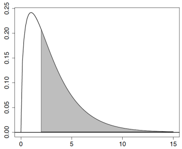
- Moyenne de référence : $\boxed{\mu_r}$ Moyenne empirique des N échantillons : $\boxed{\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i}$
- Variance de référence : $\boxed{\sigma_r^2}$ Variance empirique : $\boxed{S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^2}$
- Proportion de référence : $\boxed{\Pi_r^2}$ Proportion empirique : $\boxed{\pi = \frac{\#\text{occurrences}}{N}}$

Etablir si dans une population $\mathcal{P}$, la moyenne diffère d'une valeur de référence μ_r donnée.
Paramètre à tester : moyenne μ de la population $\mathcal{P}$.
Test réalisé à partir d'une moyenne empirique $\bar{X}$ calculée sur N échantillons, tirés de $\mathcal{P}$.

loi de la population		statistique	loi de la statistique	
normale	σ_r^2 connu	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_r}{\sigma_r / \sqrt{N}}$	$\mathcal{N}(0,1)$ Test z	
	σ_r^2 inconnu	$T = \frac{\bar{X} - \mu_r}{S / \sqrt{N}}$	Student à $N-1$ ddl. Test t de Student	
quelconque ($N > 30$)	σ_r^2 connu	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_r}{\sigma_r / \sqrt{N}}$	$\mathcal{N}(0,1)$ Test z	
	σ_r^2 inconnu	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_r}{S / \sqrt{N}}$	$\mathcal{N}(0,1)$ Test z	

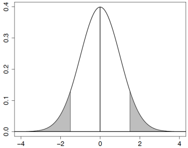
5. Tests paramétriques classiques

Une population. Test sur la variance



Etablir si dans une population $\mathcal{P}$, la variance diffère d'une valeur de référence σ_r^2 donnée.
Paramètre à tester : variance σ^2 de la population $\mathcal{P}$.
Test réalisé à partir d'une variance empirique S^2 calculée sur N échantillons, tirés de $\mathcal{P}$.

loi de la population		statistique	loi de la statistique
normale (ou quelc. $N > 30$)	μ_r connu	$\sum_{i=1}^{N} \frac{(X_i - \mu_r)^2}{\sigma_r^2}$	χ^2 à N ddl.
	μ_r inconnu	$(N-1)\frac{S^2}{\sigma_r^2}$	χ^2 à N-1 ddl.



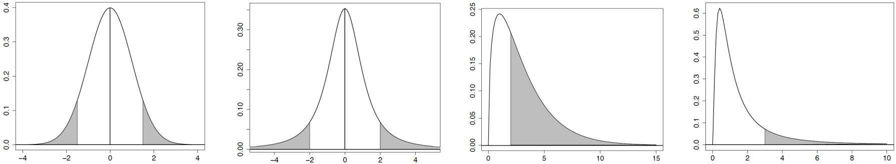
Proportion : part de la population qui possède telle modalité d'une variable qualitative (ex. : proportion de filles à la naissance).

Etablir si dans une population $\mathcal{P}$, une proportion diffère d'une valeur de référence Π_r.
Paramètre à tester : proportion Π dans la population $\mathcal{P}$.
Test réalisé à partir d'une proportion empirique π calculée sur N échantillons de $\mathcal{P}$.

loi de la population	statistique	loi de la statistique
quelconque $N > 30$, $N.\Pi_r > 5$ et $N.(1 - \Pi_r) > 5$	$Z = \frac{\pi - \Pi_r}{\sqrt{\frac{\Pi_r.(1-\Pi_r)}{N}}}$	$\mathcal{N}\ (0, 1)$

voir également : test du χ^2.

Tests (comparaison) de deux populations



Il s'agit de déterminer si deux populations distinctes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ont des paramètres identiques (moyennes, variances, proportions).

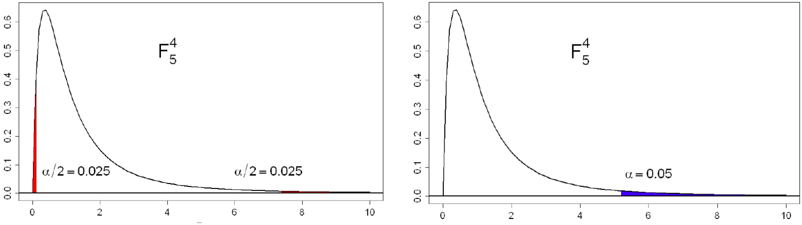
On dispose de N_1 échantillons $\{X_{i,1}\}$ tirés de la population $\mathcal{P}_1$, de N_2 échantillons $\{X_{i,2}\}$ tirés de la population $\mathcal{P}_2$.

- Moyennes empiriques : $\bar{X}_1 = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} X_{i,1}, \quad \bar{X}_2 = \dots$
- Variances empiriques : $S_1^2 = \frac{1}{N_1 - 1} \sum_{i=1}^{N_1} (X_{i,1} - \bar{X}_1)^2, \quad S_2^2 = \dots$
- Proportions empiriques : $\pi_1 = \frac{\#\text{occurrences}}{N_1}, \ \pi_2 = \dots$

Etablir si les moyennes de deux populations $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, diffèrent significativement.
Paramètre à tester : moyennes μ_1 et μ_2 des populations $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
Test réalisé à partir des moyennes empiriques $\bar{X}_1$ et $\bar{X}_2$.

loi de la population		statistique	loi de la stat.
normale **ou quelc. (N_1 et $N_2 > 30$)**	σ_1^2, σ_2^2 **connues**	$\dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{N_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{N_2}}}$	$\mathcal{N}(0,1)$ **Test z**
normale **(N_1 et $N_2 > 30$)**	σ_1^2, σ_2^2 **inconnues**	$\dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{N_1} + \dfrac{S_2^2}{N_2}}}$	**Student à** **($N_1 + N_2 - 2$) ddl.** **Test t de Student**
normale **($N_1 \leq 30$ ou $N_2 \leq 30$)** **(petits effectifs)**	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ **inconnues** **variances égales !** **(homoscédasticité)**	$\dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{S^2\left(\dfrac{1}{N_1} + \dfrac{1}{N_2}\right)}}$ *avec* : $S^2 = \dfrac{(N_1-1)S_1^2 + (N_2-1)S_2^2}{N_1+N_2-2}$	**Student à** **($N_1 + N_2 - 2$) ddl.** **Test t de Student**
normale **($N_1 \leq 30$ ou $N_2 \leq 30$)** **(petits effectifs)**	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ **inconnues** **(hétéroscédasticité)**	$\dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{N_1} + \dfrac{S_2^2}{N_2}}}$	***(non traité)*** $\simeq$ **Student à ν ddl.** **Test t de « Welch-Aspin »**

Extension : comparaison de M moyennes (M populations). Voir : ANOVA = analyse de la variance

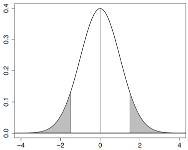


loi de Fisher $\alpha = 0,05$: test bilatéral - test unilatéral (N. Meyer, LBIM, UdS)

Etablir si les variances de deux populations $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, diffèrent significativement.
Paramètre à tester : variances σ_1^2 et σ_2^2 des populations $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
Test réalisé à partir des variances empiriques S_1^2 et S_2^2 (les populations sont renumérotées pour que $S_1^2 > S_2^2$). Seuils pour le test bilatéral : $F_{\frac{\alpha}{2}\,\boldsymbol{inf}} = 1/F_{\frac{\alpha}{2}\,\boldsymbol{sup}}$.

Utilisation : en particulier tester l'*homoscédasticité* ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$) dans le test sur les moyennes.

loi de la population	statistique	loi de la stat.
normale (ou quelc. avec N_1 *et* $N_2 > 30$)	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	Fisher à $(N_1 - 1)$ et $(N_2 - 1)$ ddl. Test de Fisher

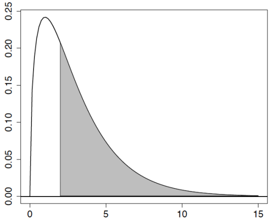


Etablir si les proportions d'une modalité d'une variable qualitative diffèrent significativement dans deux populations $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
Paramètre à tester : proportions Π_1 et Π_2 dans les populations $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
Test réalisé à partir des proportions empiriques π_1 et π_2.

loi de la population	statistique	loi de la stat.
quelconque (N_1 *et* $N_2 > 30$) et : ($N_1.\pi_1 > 5$, $N_1.(1-\pi_1) > 5$, $N_2.\pi_2 > 5$, $N_2.(1-\pi_2) > 5$)	$\frac{\pi_1 - \pi_2}{\sqrt{\pi_c.(1-\pi_c)(\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2})}}$ avec : $\pi_c = \frac{N_1\pi_1 + N_2\pi_2}{N_1+N_2}$	$\mathcal{N}(0,1)$

Extension : test du χ^2 de Pearson, permet de tester l'égalité des proportions de M modalités dans P populations

6. Test du χ^2 de Pearson



Le test du χ^2 (Khi^2 ou Chi^2) permet d'effectuer trois types de comparaison :

- Test d'ajustement ou d'adéquation : ce test établit si la distribution des données observées (variables quantitatives ou qualitatives) suit une distribution théorique connue.
- Test d'homogénéité : teste si des échantillons sont issus d'une même population
- Test d'indépendance : teste l'indépendance entre deux variables qualitatives, dont les différentes modalités sont réparties dans un tableau croisé donnant les effectifs (tableau de contingence). Equivaut à un test sur des proportions.

http://www.iutbayonne.univ-pau.fr/~grau/2A/stat/cadre5.html
http://alea.fr.eu.org/git/doc_khi2.git/blob_plain/HEAD:/khi2.pdf

Exemple : dans une population de 1000 patients on teste l'effet de 2 traitements A ou B. L'effet du traitement est mesuré selon une échelle à trois modalités : état stationnaire, amélioration, guérison. On forme un tableau de contingence en croisant les effectifs des deux variables qualitatives : Traitement / Effet du traitement.

Effet / Traitement	Guérison	Amélioration	Stationnaire	*Total*
A	280	210	110	*600*
B	220	90	90	*400*
Total	*500*	*300*	*200*	*1000*

Effectifs observés

Question : l'effet observé dépend-il du traitement choisi ?
$\Rightarrow$ On teste l'hypothèse H_0 d'*indépendance* entre traitement et effet observé. Ceci revient à tester si les *proportions* observées pour les différents effets (guérison, amélioration, état stationnaire) sont les mêmes pour les traitements A et B.

$\Rightarrow$ Test d'indépendance du χ^2 = test sur des proportions

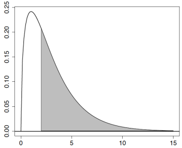
Effet / Traitement	Guérison	Amélioration	Stationnaire	*Total*
A	280	210	110	*600*
B	220	90	90	*400*
Total	*500*	*300*	*200*	*1000*

Effectifs observés : $o_{i,j}$

Méthode : on forme un tableau des effectifs théoriques sous l'hypothèse H_0 (indépendance).

Effet / Trait.	Guérison	Amélioration	Stationnaire	*Total*
A	(600.500)/1000= 300 **proportion=50%**	(600.300)/1000= 180 **proportion=30%**	(600.200)/1000=120 **proportion=20%**	*600* **100%**
B	(400.500)/1000= 200 **proportion=50%**	(400.300)/1000= 120 **proportion=30%**	(400.200)/1000= 80 **proportion=20%**	*400* **100%**
Total	*500* **50%**	*300* **30%**	*200* **20%**	*1000* **100%**

Effectifs théoriques sous H_0 : $e_{i,j}$



Statistique utilisée : écart χ^2 entre les effectifs observés et les effectifs théoriques

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \frac{(o_{i,j} - e_{i,j})^2}{e_{i,j}}$$

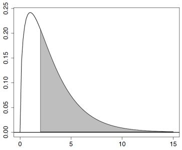
suit une loi du χ^2 à $(I-1).(J-1)$ degrés de liberté.

Condition d'application : tous les $e_{i,j} \geq 5$.

Résultat du test :
$I = 2$, $J = 3$, $ddl = 2$. $\chi^2 = 17,916$. p-valeur : 0.00012866050932067
Conclusion : H_0 est rejeté au niveau $\alpha = 0,02\%$ (très significatif)

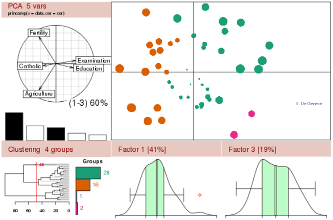
Calcul en ligne : `http://marne.u707.jussieu.fr/biostatgv/?module=tests/chideux`

6. Test du χ^2 de Pearson



Autres tests utilisés dans le même contexte :

- *Test exact de Fisher* : remplace le test du χ^2 pour les petits effectifs $e_{i,j} < 5$.
- *Test de Kolmogorov-Smirnov* : pour des variables continues, teste si les données suivent une loi connue ou si deux échantillons suivent la même loi. Utilise les fonctions de répartition.



Logiciel R

Logiciels de statistique intégrant en particulier les tests d'hypothèses :

- R - langage de programmation et environnement pour les statistiques (libre)
  `http://www.r-project.org/`
- Python : scipy.stats (libre)
  `http://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/stats.html`
- MatLab Statistics Toolbox (commercial)
  `http://www.mathworks.fr/products/statistics/`
- Mathematica (commercial) `http://reference.wolfram.com/mathematica/HypothesisTesting/guide/HypothesisTestingPackage.html`
- Excel (commercial)
  `http://tumor.free.fr/statistiques.html`
- Statistica (commercial)
  `http://www.statsoft.fr`