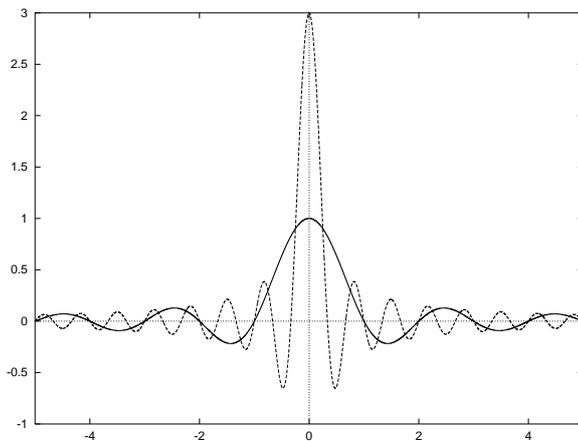


INTRODUCTION AU TRAITEMENT DU SIGNAL

Fabrice HEITZ

Université de Strasbourg / ICube CNRS
Janvier 2015



INTRODUCTION AU TRAITEMENT DU SIGNAL

Fabrice HEITZ

Université de Strasbourg / ICube CNRS
Janvier 2015



Plan du cours

Introduction au traitement du signal : les signaux analogiques déterministes

Introduction : signaux et systèmes

- ① Représentation et classification des signaux
- ② Analyse harmonique des signaux analogiques
- ③ Systèmes de traitement du signal
- ④ Filtrage des signaux analogiques
- ⑤ Modulation – Démodulation
- ⑥ Corrélateurs et analyseurs de spectre



1 Représentation et classification des signaux

1 Les différentes classes de signaux

- 1 Critères de classification des signaux
- 2 Représentation des différentes classes de signaux

2 Représentation des signaux analogiques

- 1 Les fonctions
- 2 Les distributions

3 Décomposition d'un signal comme une somme de distributions de Dirac



2 Analyse harmonique des signaux analogiques

1 Série de Fourier des signaux périodiques

- 1 Décomposition d'un signal périodique quelconque
- 2 Cas particulier des signaux réels
- 3 Autres formes de la série de Fourier
- 4 Convergence de la série de Fourier

2 Transformée de Fourier des signaux analogiques

- 1 Passage de la série de Fourier à la transformée de Fourier
- 2 Existence et convergence de la transformée de Fourier des fonctions
- 3 Transformée de Fourier des distributions
- 4 Transformée de Fourier des signaux périodiques

3 Propriétés de la transformée de Fourier

- 1 Linéarité
- 2 Symétrie
- 3 Propriétés de dualité
- 4 Translation et dilatation en temps et fréquence
- 5 Dérivation
- 6 Théorème de Parseval



Plan détaillé du cours III

- ⑦ Cas des signaux à support temporel ou fréquentiel borné
- ⑧ Transformée de Fourier et produit de convolution
- ④ **Analyse spectrale des signaux analogiques**
 - ① Signaux d'énergie finie
 - ② Signaux de puissance moyenne finie
 - ③ Fenêtre d'observation, résolution spectrale
 - ④ Analyse temps-fréquence
- ⑤ **Transformée de Laplace bilatérale**
 - ① Définition
 - ② Région de convergence
 - ③ Propriétés



Plan détaillé du cours IV

- ③ **Systèmes de traitement du signal**
 - ① Représentation des systèmes de TS
 - ② Systèmes linéaires stationnaires
 - ③ Réponse impulsionnelle des systèmes linéaires stationnaires
 - ① Notion de réponse impulsionnelle
 - ② Propriété de convolution
 - ③ Causalité, stabilité du système
 - ④ Réponse en fréquence des systèmes linéaires stationnaires
 - ① Réponse à une exponentielle complexe
 - ② Relation entrée-sortie dans le domaine fréquentiel
 - ⑤ Exemples de systèmes linéaires stationnaires



4 Filtrage des signaux analogiques

1 Généralités, notion de filtre

- 1 Filtres réalisables
- 2 Filtres idéaux, filtres sans distorsion

2 Filtres définis par une fraction rationnelle

3 Transformations en fréquence

4 Filtres analogiques classiques

- 1 Filtres de Butterworth
- 2 Filtres de Tchebycheff
- 3 Filtres elliptiques

5 Filtrage des signaux d'énergie et de puissance finie

- 1 Signaux d'énergie finie
- 2 Signaux de puissance moyenne finie
- 3 Interprétation des notions de spectre d'énergie et de fréquence

5 Modulation – Démodulation

1 Introduction, définitions

2 Modulation d'amplitude

- 1 Modulation – démodulation avec une porteuse exponentielle complexe
- 2 Modulation – démodulation avec une porteuse sinusoïdale
- 3 Applications de la modulation d'amplitude

3 Modulation angulaire

- 1 Modulation de fréquence et de phase
- 2 Modulation FM à bande étroite
- 3 Modulation FM à bande large
- 4 Démodulation FM

6 Corrélateurs et analyseurs de spectre

1 Les corrélateurs électroniques

- 1 Estimation de la fonction de corrélation
- 2 Corrélateur point par point
- 3 Corrélateurs numériques en temps réel

2 Les analyseurs électroniques de spectre

- 1 Analyseurs de spectre à filtres
- 2 Analyseurs de spectre par Transformée de Fourier Discrète
- 3 Analyseurs de spectre par corrélation



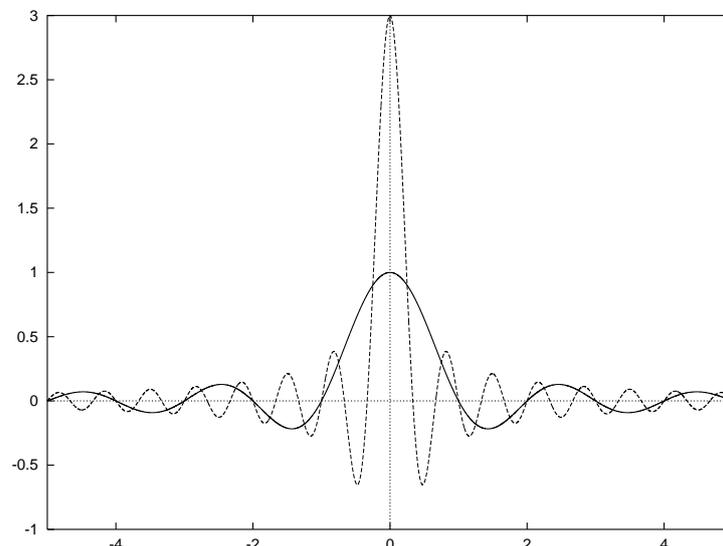
Références

-  J.P. DELMAS, *Éléments de théorie du signal : les signaux déterministes*, Ellipses, Paris, 1991.
-  P. DUVAUT, *Traitement du signal, concepts et applications*, Hermès, Paris, 1991.
-  J. MAX et J.L. LACOUME *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques, Tome 1 : Principes généraux et méthodes classiques*, Masson, Paris, 1996.
-  A.V. OPPENHEIM and A.S. WILLSKY, *Signals and Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1997.
-  B. PICINBONO, *Théorie des signaux et des systèmes avec problèmes résolus*, Dunod, Paris, 1989.
-  P. RÉFRÉGIER, *Théorie du signal : signal, information, fluctuations*, Masson, Paris, 1993.
-  F. RODDIER, *Distributions et transformation de Fourier à l'usage des physiciens et des ingénieurs*, Ediscience, Paris, 1978.
-  Y. THOMAS, *Signaux et systèmes linéaires*, Masson, Paris, 1992.
-  D. VENTRE, *Communications analogiques*, Ellipses, Paris, 1991.



- **Johns Hopkins University : Signals, Systems, Control (applets)**
<http://www.jhu.edu/~signals/>
- **Analog Signal Processing Applets**
<http://cnyack.homestead.com/files/idxpages.htm>
- **Signal processing : démos en ligne (applets)**
<http://users.ece.gatech.edu/~bonnie/book/applets.html>
- **JSyn - Audio Synthesis Software API for Java**
<http://www.softsynth.com/jsyn/examples/index.php>
- **MATLAB Signal Processing Toolbox**
<http://www.mathworks.fr/products/signal/>

INTRODUCTION : SIGNAUX ET SYSTÈMES

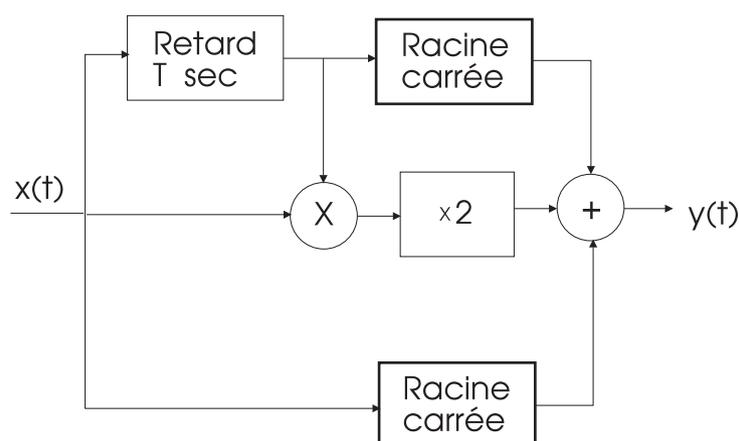


Le traitement du signal (TS)

- Intervient dans **tous les systèmes modernes de traitement de l'information**
- **Bases** : mathématiques, informatique, physique, électronique, etc.
- **Domaines d'applications** :
 - mesures physiques ;
 - télécommunications ;
 - aéronautique, astronautique ;
 - acoustique ;
 - mécanique ;
 - hydraulique ;
 - traitement des images, vision artificielle ;
 - traitement de la parole ;
 - sismologie ;
 - génie biomédical ;
 - contrôle de processus industriels, etc.



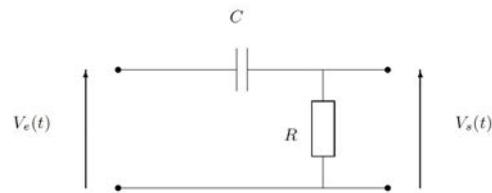
Notion de signal et système



- Signal : fonction d'une ou plusieurs variables qui véhicule de l'information sur un phénomène physique.
- Système (de traitement du signal) : transforme les signaux en d'autres signaux ou en paramètres, dans le but d'en extraire l'information.



Exemples de signaux et systèmes



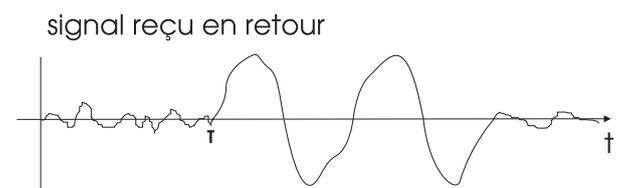
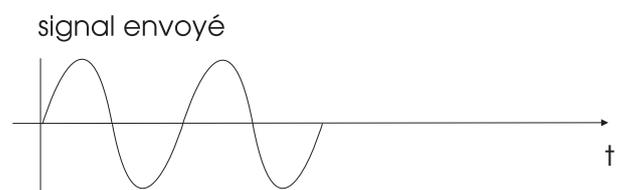
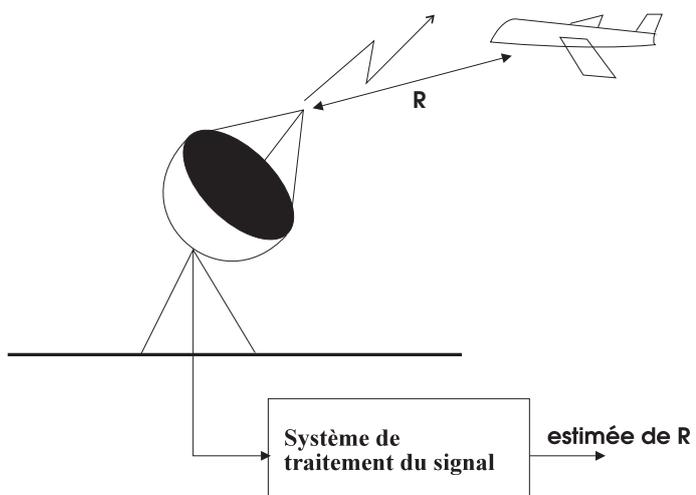
- Système : circuit électrique
 - Signaux : tensions aux bornes du circuit

$$V_s(t) = R i(t)$$
$$\frac{dV_e(t)}{dt} = \frac{dV_s(t)}{dt} + \frac{1}{RC} V_s(t)$$

- Système : automobile
 - Signaux :
 - pression sur l'accélérateur (entrée)
 - vitesse du véhicule (sortie).



Exemple : le RADAR

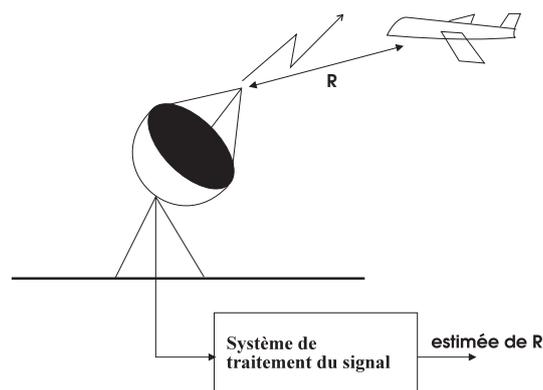


Finalités d'un système de TS

- **Analyse** = extraction des composantes essentielles portant l'information ;
- **Mesure** = estimation d'une grandeur caractéristique avec une certaine confiance ;
- **Détection** = extraction d'un signal utile du bruit (signal présent ? absent ?) ;
- **Filtrage** = élimination des composantes indésirables (souvent le bruit) ;
- **Restauration** = "réparation" des dégradations subies par un signal, connaissant le système ayant provoqué la dégradation.
- **Synthèse** = création d'un signal à partir de signaux élémentaires ;
- **Codage** = mise en forme du signal pour une transmission ;
- **Compression** = réduction de la redondance d'information dans un signal pour "gagner de la place" ;
- **Modulation** = adaptation d'un signal aux caractéristiques d'une voie de transmission ou d'un support d'enregistrement ;
- **Segmentation** = partition (découpage) d'un signal en segments (parties) homogènes ;
- **Reconnaissance** = identification de formes appartenant à un dictionnaire (parole, images).



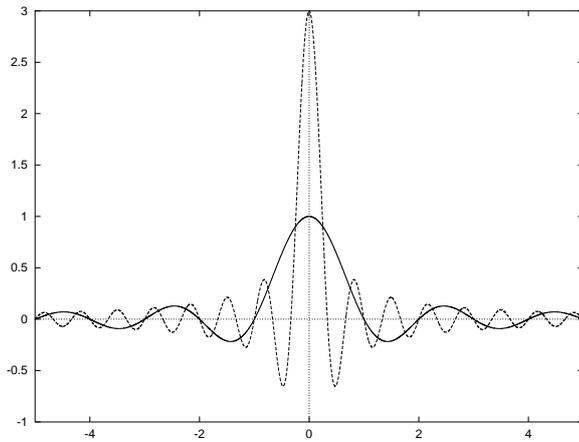
Analyse d'un système de TS



Deux préoccupations différentes :

- Modélisation et analyse d'un système de TS (naturel) existant (sismique, optique, hydraulique, biologie, etc.) ;
- Spécification et réalisation d'un système de TS (artificiel) implantant une transformation souhaitée sur un signal d'intérêt.





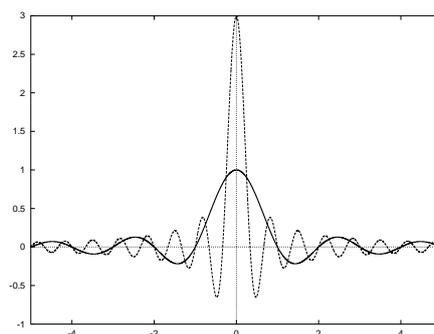
INTRODUCTION AU TRAITEMENT DU SIGNAL

Partie I

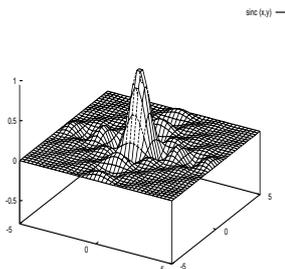
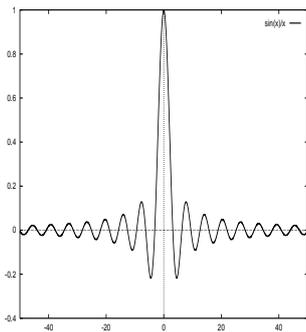


Partie I

REPRÉSENTATION ET CLASSIFICATION DES SIGNAUX



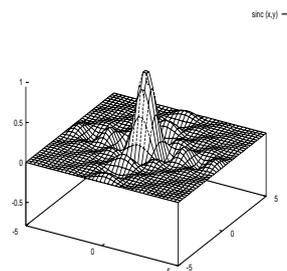
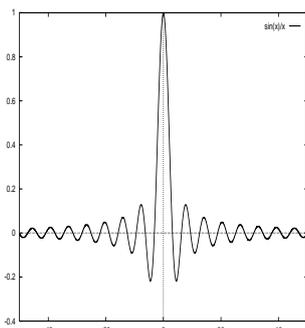
Les différentes classes de signaux



Différents critères de classification :

- Nombre de variables ;
- Signaux réels / complexes ;
- Déterministes / aléatoires ;
- Continus / discrets ;
- Classification énergétique.

Classification en fonction du nombre de variables



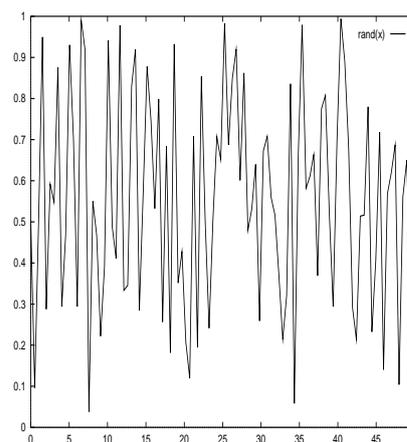
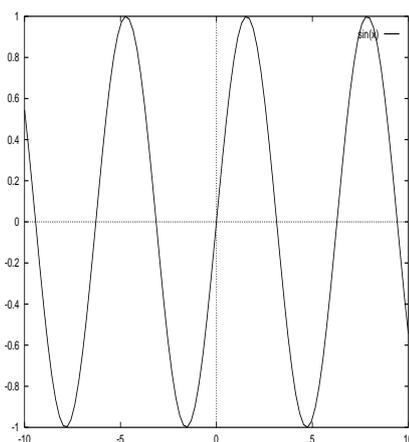
Exemple de signal	N. Variable(s)	Type de signal
tension électrique $v(t)$ spectre $X(f)$	1	monodimensionnel (1-D)
image $f(x, y)$	2	bidimensionnel (2-D)
pression $\Pi(x, y, z)$	3	tridimensionnel (3-D)
⋮	⋮	⋮
onde e.m. $u(x, y, z, t)$	N	multidimensionnel

Signaux réels / Signaux complexes

- Si $x(t) \in \mathbb{R}$: signal réel.
- Si $x(t) \in \mathbb{C}$: signal complexe.
- Notations usuelles :
 - nombre complexe $j : j^2 = -1$
 - si $x(t) = a(t) + j b(t)$
 - $\text{Re}[x(t)] = a(t)$: partie réelle
 - $\text{Im}[x(t)] = b(t)$: partie imaginaire
 - $|x(t)| = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)}$: module
 - $\text{Arg}[x(t)] = \arctan(b(t)/a(t))$: argument
 - $x(t) = |x(t)|e^{j \text{Arg}[x(t)]}$
 - $x^*(t) = a(t) - j b(t) = |x(t)|e^{-j \text{Arg}[x(t)]}$: complexe conjugué



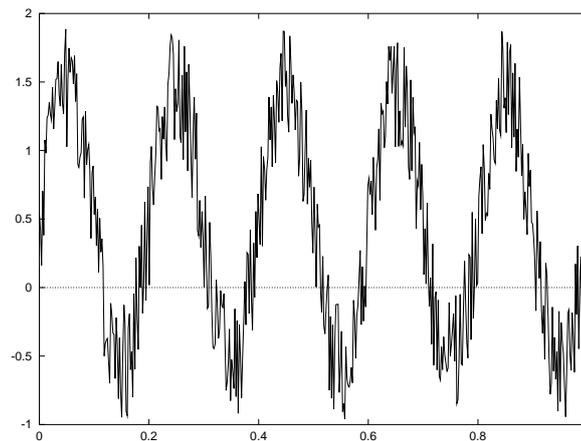
Classification déterministe / aléatoire



- **Signal déterministe** : évolution complètement prédictible par un modèle mathématique approprié.
- **Signal aléatoire** : évolution non prédictible, non reproductible d'une expérience à l'autre.

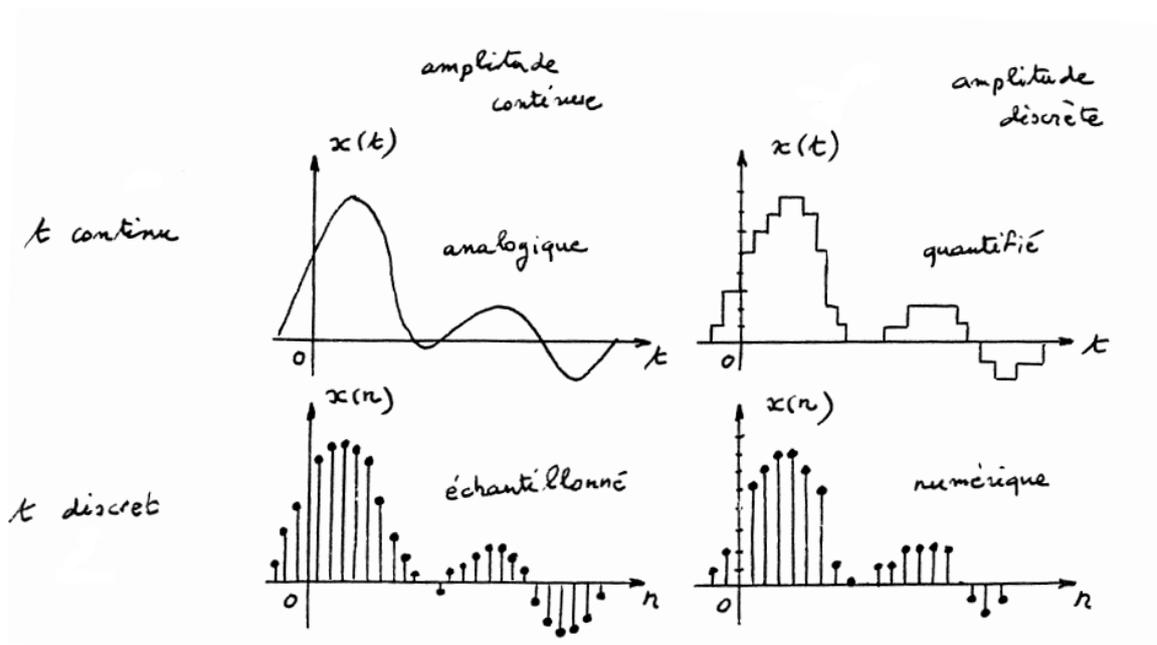


Classification déterministe / aléatoire

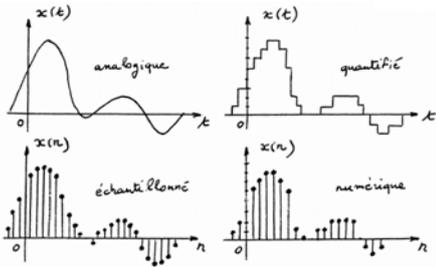


On a souvent : Signal réel
= Signal déterministe + Signal aléatoire

Classification continu / discret

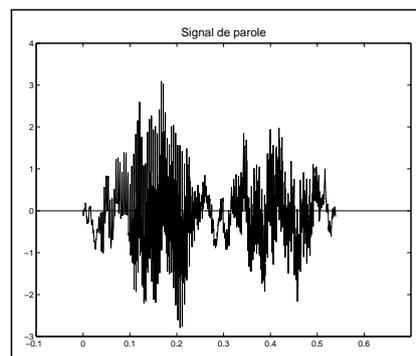


Classification continu / discret



Amplitude : $x(t) \rightarrow$	continue	discrète
Variable : $t \downarrow$		
continue	signal analogique	signal quantifié
discrète	signal échantillonné	signal numérique

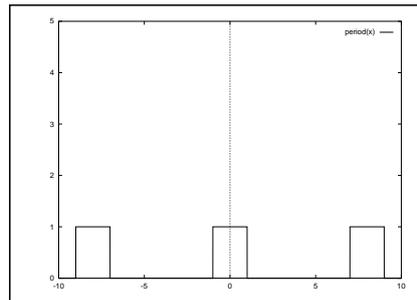
Classification énergétique



Signal à énergie finie

- Énergie d'un signal $x(t)$: $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$
- Signaux à énergie finie (ou de « carré intégrable ») : $0 \leq E_x < +\infty$.
- Exemples :
 - signaux transitoires ;
 - signaux à support temporel borné ;
 - en pratique tous les signaux physiques.

Classification énergétique

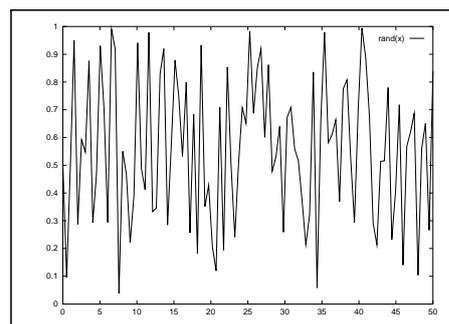
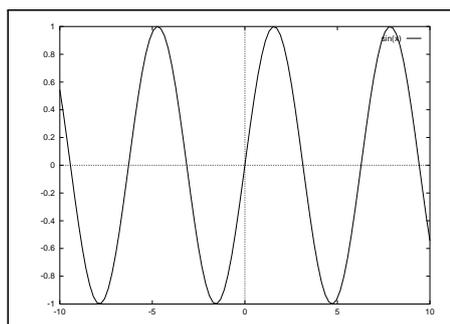


Signal à puissance moyenne finie

- Puissance moyenne d'un signal $x(t)$: $P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$
- Signaux à puissance moyenne finie : $0 < P_x < +\infty$ ($\Rightarrow E_x = +\infty$)
- Exemples :
 - signaux idéaux issus d'un générateur de fonction ;
 - signaux périodiques ;
 - signaux permanents non périodiques ;
 - signaux permanents aléatoires.



Représentations mathématiques

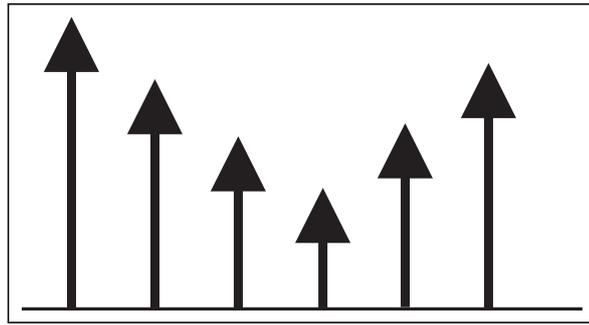
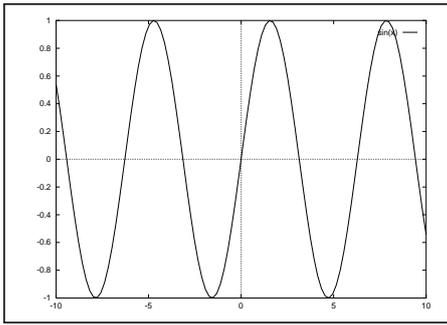


Des représentations différentes en fonction de la nature du signal :

Nature du signal		Représentation mathématique
déterministe	temps continu temps discret	fonctions, distributions suite numérique
aléatoire	temps continu temps discret	fonctions aléatoires suite aléatoire



Représentation des signaux analogiques



- Fonctions.
- Distributions : outils mathématiques commodes pour représenter certains signaux.

Les fonctions : propriétés utiles 1

- Fonction : $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $x(t) \in \mathbb{R}$ ou $x(t) \in \mathbb{C}$
- Propriétés utiles :
 - continuité, dérivabilité ;
 - support borné (ou non) ;
 - intégrabilité :

$$x \in L_1 \quad \text{si} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty$$

$$x \in L_2 \quad \text{si} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$$

L_1 et L_2 : espaces vectoriels normés.

- propriétés de symétrie :

$$\text{fonction paire : } x(t) = x(-t)$$

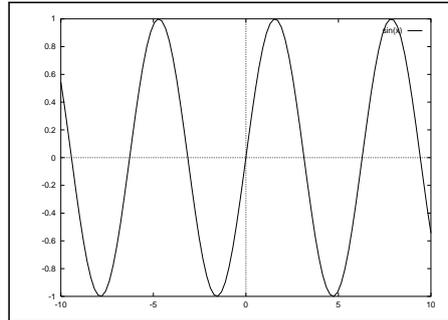
$$\text{fonction impaire : } x(t) = -x(-t)$$

\Rightarrow décomposition d'un signal quelconque :

$$x(t) = \underbrace{\frac{1}{2} \{x(t) + x(-t)\}}_{\text{partie paire}} + \underbrace{\frac{1}{2} \{x(t) - x(-t)\}}_{\text{partie impaire}}$$

Les fonctions : propriétés utiles 2

- Propriétés utiles :



- Propriété de périodicité

$$\exists T > 0 \text{ tel que } \forall t \quad x(t + T) = x(t) \quad (1)$$

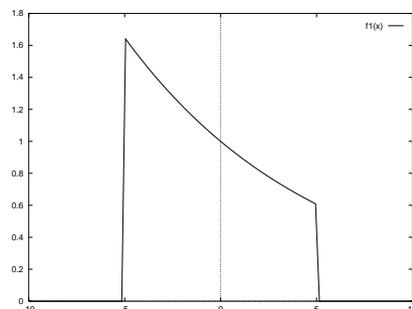
- Période : T
- Période fondamentale T_0 : plus petit T vérifiant (1).
- Fréquence : $f_0 = \frac{1}{T_0}$
- Signal constant : T_0 non défini, $f_0 = 0$.
- Signal non périodique = signal «apériodique».



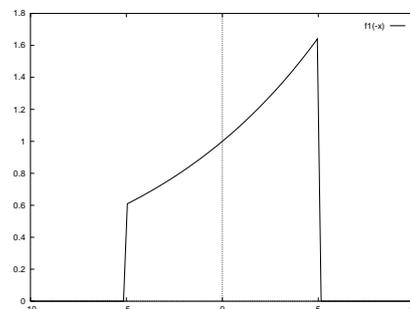
Transformations de la variable t

- Retournement : symétrie par rapport à 0.

$$x(t) \longrightarrow x(-t)$$



signal $x(t)$



signal $x(-t)$

- Translation : de $+t_0$

$$x(t) \longrightarrow x(t - t_0)$$

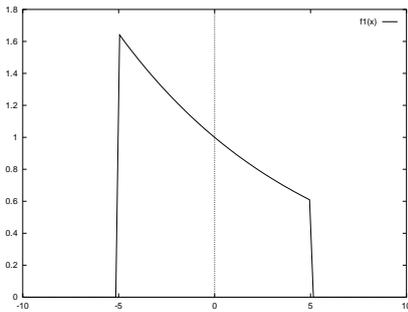


Transformations de la variable t

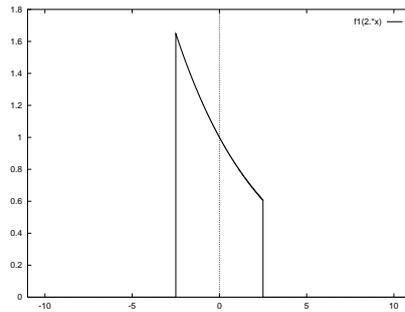
- Changement d'échelle :

$$x(t) \longrightarrow x(2t) \quad \text{contraction}$$

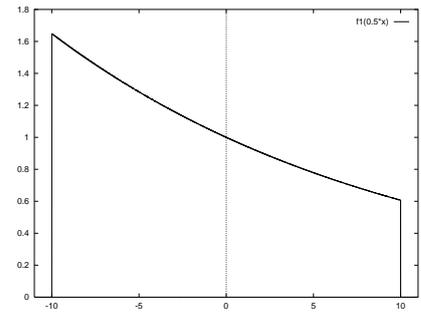
$$x(t) \longrightarrow x(t/2) \quad \text{dilatation}$$



signal $x(t)$



signal $x(2t)$

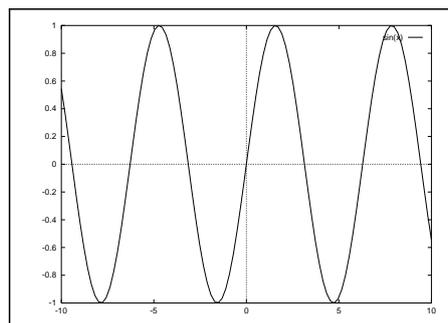


signal $x(t/2)$



Fonctions et signaux élémentaires (1)

- Exponentielles complexes



$$x(t) = Ae^{\pm j\omega_0 t}$$

Signal périodique de période fondamentale :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (\text{en s})$$

de fréquence fondamentale :

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (\text{en Hz})$$



Fonctions et signaux élémentaires (2)

- Signaux sinusoïdaux (périodiques de période fondamentale T_0)

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \Phi) = A \cos(2\pi f_0 t + \Phi)$$

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \Phi) = A \sin(2\pi f_0 t + \Phi)$$

Relations avec les exponentielles complexes :

$$A \cos(2\pi f_0 t + \Phi) = \frac{A}{2} \{ e^{j\Phi} e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j\Phi} e^{-j2\pi f_0 t} \}$$

$$A \cos(2\pi f_0 t + \Phi) = A \Re \{ e^{j(2\pi f_0 t + \Phi)} \}$$

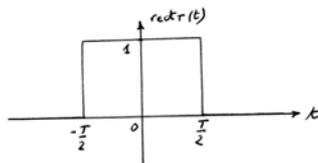
$$A \sin(2\pi f_0 t + \Phi) = \frac{A}{2j} \{ e^{j\Phi} e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j\Phi} e^{-j2\pi f_0 t} \}$$

$$A \sin(2\pi f_0 t + \Phi) = A \Im \{ e^{j(2\pi f_0 t + \Phi)} \}$$



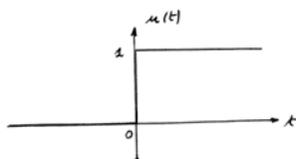
Fonctions et signaux élémentaires (3)

- Fonction porte (créneau)



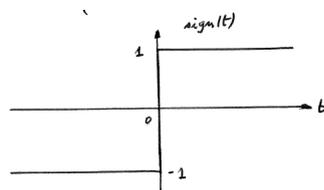
$$\text{rect}_T(t) = \begin{cases} 0 & |t| > \frac{T}{2} \\ 1 & |t| < \frac{T}{2} \end{cases}$$

- Fonction d'Heaviside (échelon unité)



$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

- Fonction signe

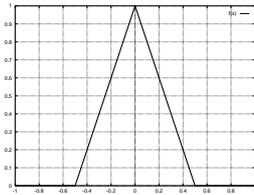


$$\text{sign}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



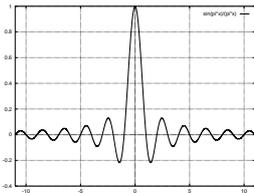
Fonctions et signaux élémentaires (4)

- Fonction triangulaire



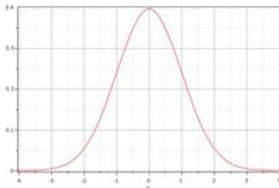
$$\text{tri}_T(t) = \begin{cases} 0 & |t| \geq \frac{T}{2} \\ 1 - \frac{|t|}{T/2} & |t| < \frac{T}{2} \end{cases}$$

- Fonction sinus cardinal



$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

- Fonction gaussienne

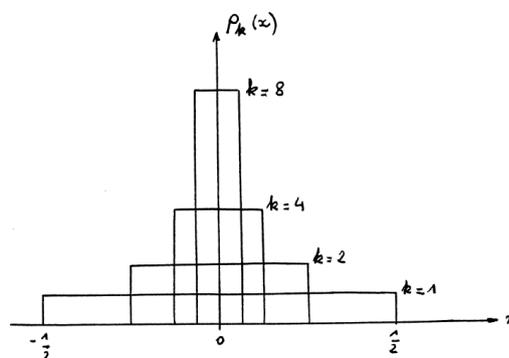


$$\text{gauss}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$$



Les distributions : de la nécessité de généraliser la notion de fonction

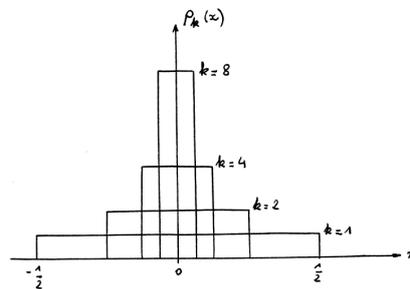
- Exemple 1 : distribution de charge ponctuelle en électrostatique



- densité linéique de charge : $\rho_k(x) = k \text{rect}_{T=1}(kx)$, $k \in \mathbb{N}^*$ (en C/m)
- charge totale sur la droite : $Q = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_k(x) dx = 1$ (en C)
- charge « ponctuelle » : densité : $\delta(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \rho_k(x)$ (en C/m)



Les distributions : de la nécessité de généraliser la notion de fonction



Charge « ponctuelle » : $\delta(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \rho_k(x)$

Représentation sous forme d'une fonction de $\delta(x)$? Cette fonction vérifierait :

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} \text{ avec : } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

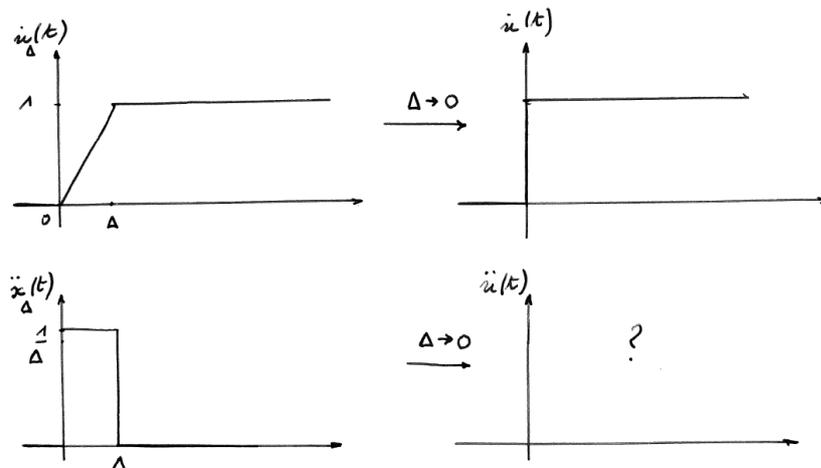
ce qui est absurde.

$\delta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} k \text{rect}_{T=1}(kx)$ n'est pas une fonction mais une distribution !



Les distributions

- Exemple 2 : chocs et phénomènes « instantanés »



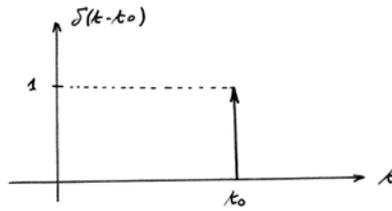
$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \ddot{x}_{\Delta}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t) = \delta(t)$$

→ Propriété importante : $\delta(t) = u'(t)$



La distribution de Dirac (« pic » ou « impulsion » de Dirac)

- Représentation :



- Propriété caractéristique : $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$ pour $x(t)$ continue en $t = t_0$.

- Autres propriétés :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)dt = 1 \quad \text{surface} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$$

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

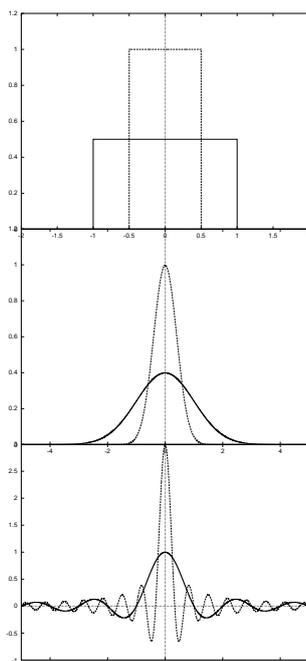
$$\delta(t-t_0) = \delta(t_0-t) \quad \text{symétrie}$$

$$\delta\left(\frac{t-t_0}{k}\right) = |k|\delta(t-t_0)$$

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0) \quad \text{translation de } +t_0$$



Distribution de Dirac, limite de familles de fonctions



$$\delta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} k \text{rect}(kx)$$

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$$

$$\delta(t) = \lim_{B \rightarrow \infty} B \frac{\sin(\pi Bt)}{\pi Bt}$$



Autres distributions...

Les distributions S sont définies de façon générale comme des «fonctionnelles» linéaires continues qui associent à une «fonction test» $\phi(t)$ un scalaire.

Les «fonctions tests» $\phi(t)$ doivent être continues, indéfiniment dérivables et de support borné.

Le scalaire associé par la distribution S à la fonction ϕ est noté : $\langle S, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t)\phi(t)dt$.

- Exemple : la distribution de Dirac δ

$$\langle \delta, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\delta(t)dt = \phi(0)$$

- Propriétés des distributions :

- linéarité :

$$\begin{aligned}\langle S, \phi_1 + \phi_2 \rangle &= \langle S, \phi_1 \rangle + \langle S, \phi_2 \rangle \\ \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \langle S, \lambda\phi \rangle &= \lambda \langle S, \phi \rangle\end{aligned}$$

- continuité :

Si $\phi_k \rightarrow \phi$ alors $\langle S, \phi_k \rangle \rightarrow \langle S, \phi \rangle$.

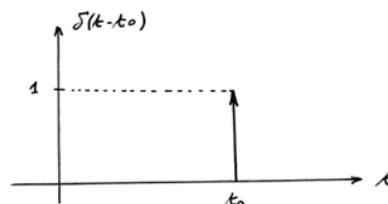


Distributions régulières, singulières

- Les distributions régulières** : associées à des fonctions $f(t)$ localement sommables et caractérisées par

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi(t)dt \quad \forall \phi(t)$$

- Les distributions singulières** :

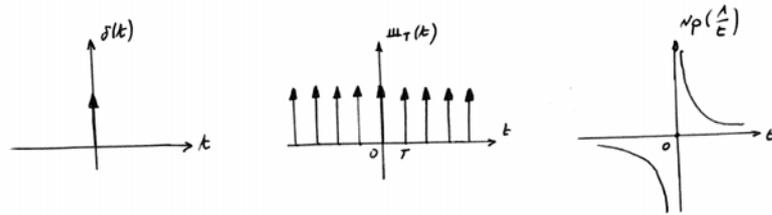


- La distribution de Dirac $\delta(t)$:

$$\langle \delta, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\phi(t)dt = \phi(0)$$



- **Autres distributions singulières :**



- Le peigne de Dirac $\text{III}_T = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$:

$$\langle \text{III}_T, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{III}_T(t) \phi(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi(kT)$$

- La valeur principale de $\frac{1}{t}$: $v.p.(\frac{1}{t})$ caractérisée par :

$$\langle v.p.(\frac{1}{t}), \phi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \int_{-\infty}^{\epsilon} \frac{\phi(t)}{t} dt + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\phi(t)}{t} dt$$

(encore appelée «valeur de Cauchy» de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(t)}{t} dt$).



Opérations sur les distributions

- **Somme de deux distributions, produit par un scalaire...**

- **Dérivation**

Les distributions sont indéfiniment dérivables. La distribution S' dérivée de S est définie par :

$$\langle S', \phi \rangle = - \langle S, \phi' \rangle$$

Dans le cas des distributions régulières $f(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) \phi(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \phi'(t) dt$$

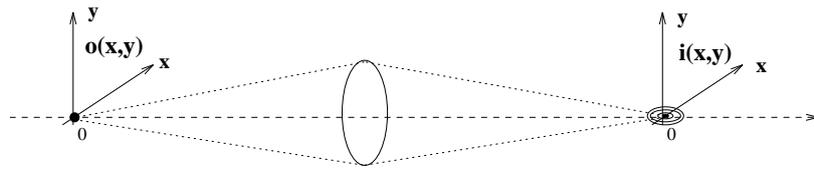
- **Produit par une fonction**

On peut définir le produit : $S(t)x(t)$ où $x(t)$ est une fonction indéfiniment dérivable.

$\delta(t - a)\delta(t - b)$, $u(t)\delta(t)$ n'ont pas de sens !



Produit de convolution (fonctions)



De nombreux systèmes physiques peuvent être représentés par des opérateurs de convolution. Produit de convolution $z(t)$ de deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ localement sommables :

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$$

- Propriétés :

- commutativité

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$

soit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

- distributivité

$$x(t) * (y_1(t) + y_2(t)) = x(t) * y_1(t) + x(t) * y_2(t)$$



Produit de convolution (distributions)

La notion de produit de convolution s'étend aux distributions. Cette extension pose toutefois des problèmes techniques. On retiendra les résultats suivants :

- Convolution avec une impulsion de Dirac = translation

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

en particulier :

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

La distribution de Dirac à l'origine est donc l'élément unité pour le produit de convolution.

- Convolution avec un peigne de Dirac = périodisation

$$x(t) * \text{III}_{T_0}(t)$$
$$= x(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT_0)$$

- Convolution par la dérivée de δ : δ'

$$x(t) * \delta'(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$



Produit de convolution : interprétation

La convolution de $x(t)$ par $y(t)$:

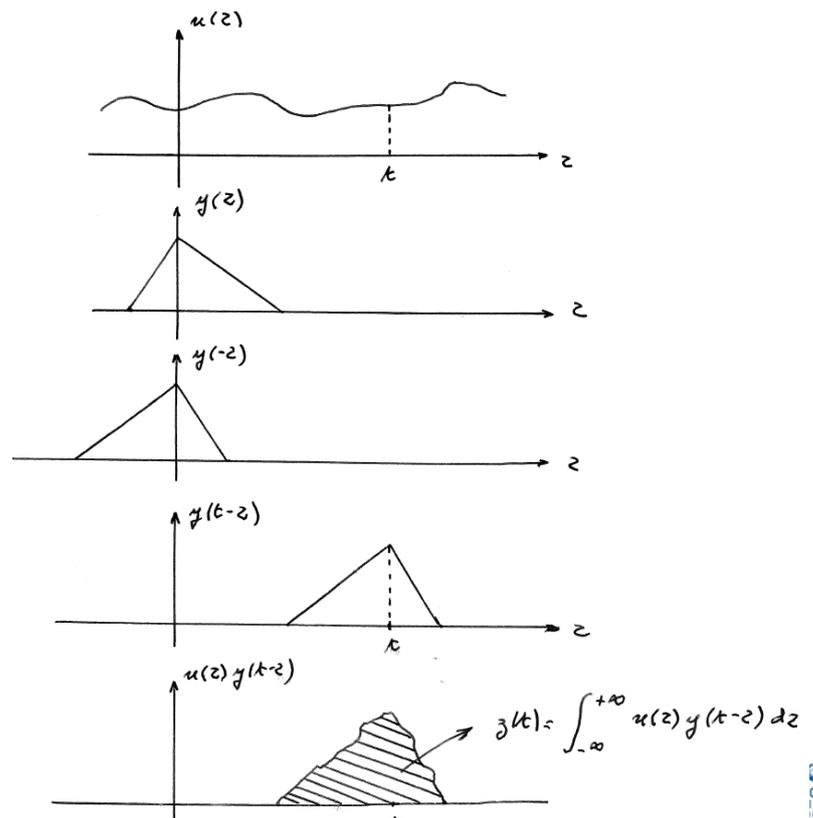
$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$$

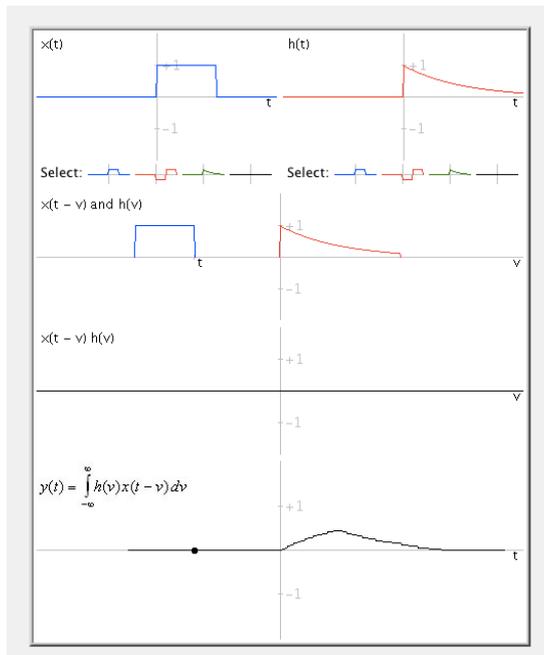
peut se décomposer en :

- un retournement $y(\tau) \rightarrow y(-\tau)$
- une translation de $+t$!! $y(-\tau) \rightarrow y(t - \tau) = y(-(\tau - t))$
- une multiplication $x(\tau)y(t - \tau)$
- une intégration : $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$

Produit de convolution : interprétation graphique

$x(\tau)$
$y(\tau)$
$y(\tau) \rightarrow y(-\tau)$
$y(-\tau) \rightarrow y(t - \tau)$
$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$



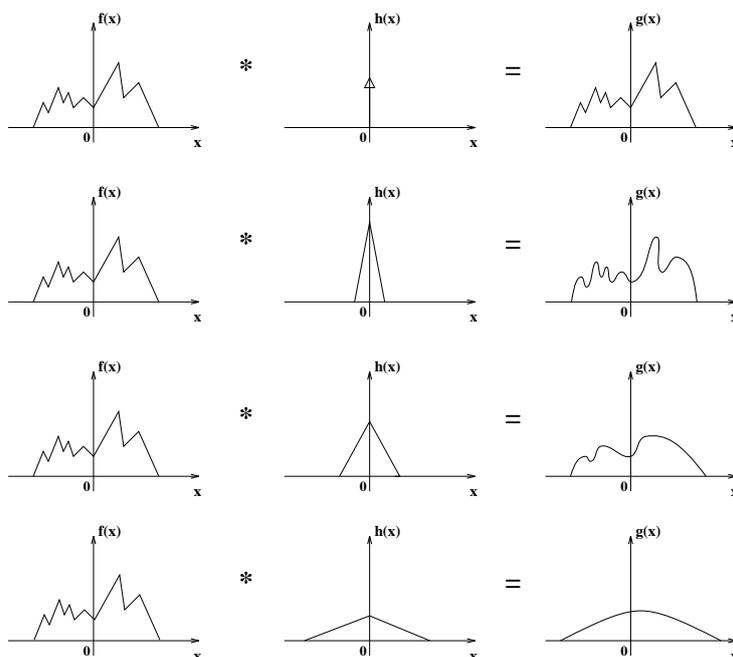


Applet java

<http://www.jhu.edu/signals/convolve/>



Exemple de produits de convolution



Les produits de convolution représentés ici correspondent à des systèmes physiques qui ont pour effet d'atténuer les variations rapides du signal (càd ses « hautes fréquences »).

Ils correspondent à des « filtres passe-bas ». Exemple : diffraction des systèmes optiques.



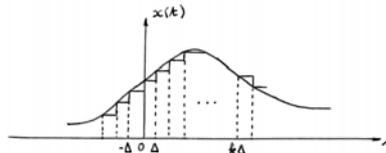
Décomposition d'un signal ... comme une somme de distributions de Dirac

- La distribution de Dirac est caractérisée par :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

⇒ décomposition du signal $x(t)$ comme une somme de distributions de Dirac translattées $\delta(t - \tau)$ pondérées par $x(\tau)$.

- Interprétation :



- soit :

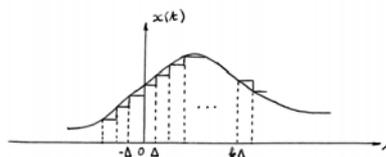
$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0 < t < \Delta \\ \text{sinon} & 0 \end{cases}$$

- approximation $\hat{x}(t)$ de $x(t)$ (fonctions en escalier) :

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta$$

Décomposition d'un signal ... comme une somme de distributions de Dirac

- Interprétation (suite) :



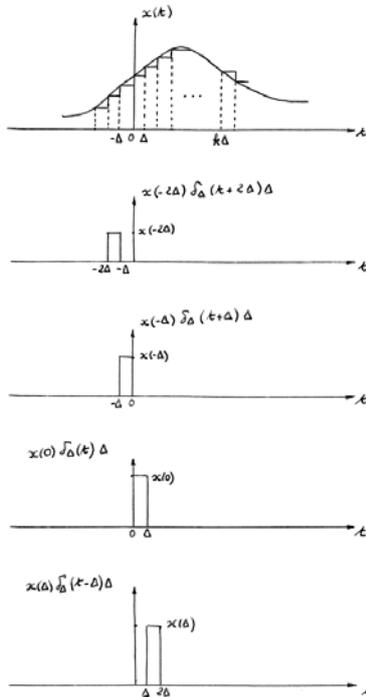
- Approximation $\hat{x}(t)$ de $x(t)$ (fonctions en escalier) :

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta$$

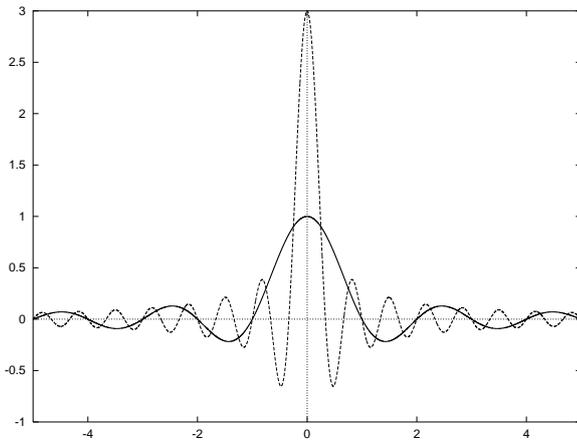
- Passage à la limite :

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \end{aligned}$$

Décomposition d'un signal ... comme une somme de distributions de Dirac



$$\begin{aligned}
 x(t) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau
 \end{aligned}$$



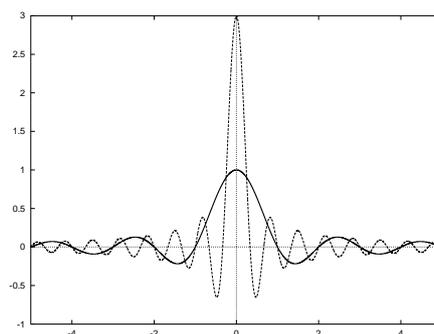
INTRODUCTION AU TRAITEMENT DU SIGNAL

Partie II

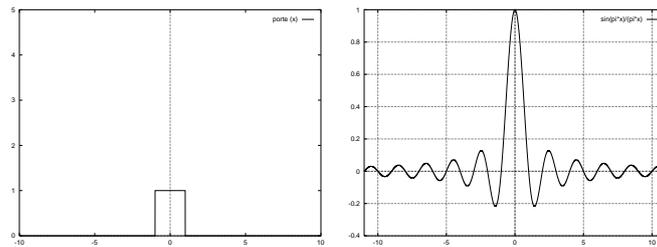


Partie II

ANALYSE HARMONIQUE DES SIGNAUX ANALOGIQUES



Intérêts de l'analyse harmonique



$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$$

- **Deux représentations équivalentes :**

- représentation temporelle : $x(t)$
- représentation fréquentielle : $X(f)$ (transformée de Fourier : TF).

- **Principe :** décomposition du signal sur une base de fonctions exponentielles de fréquences variables.

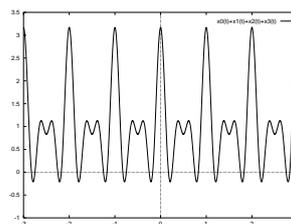
- **Intérêts :**

- TF = outil d'analyse du signal ;
- TF = outil d'analyse des systèmes de traitement du signal.

⇒ analyse harmonique = analyse spectrale = analyse fréquentielle des signaux et des systèmes.



Rappel : série de Fourier des signaux périodiques



Soit $x(t)$ un signal périodique de période fondamentale T_0 ($f_0 = \frac{1}{T_0}$).

- **Décomposition en série de Fourier :**

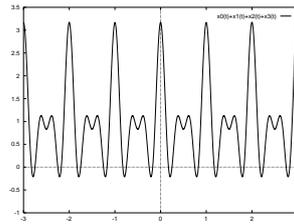
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

avec : $a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$

- $k = 0$: $a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt$ est la « composante continue » (valeur moyenne du signal sur une période).
- $k = \pm 1$: $a_1 e^{j2\pi f_0 t} + a_{-1} e^{-j2\pi f_0 t}$ est le « fondamental » de $x(t)$.
- $k = \pm 2, \pm 3, \dots$: $a_k e^{j2\pi k f_0 t}$ sont les « harmoniques » d'ordre k .



Série de Fourier : autre forme



- Autre forme de la décomposition :

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [\alpha_k \cos 2\pi k f_0 t + \beta_k \sin 2\pi k f_0 t]$$

avec : $\alpha_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos 2\pi k f_0 t dt$

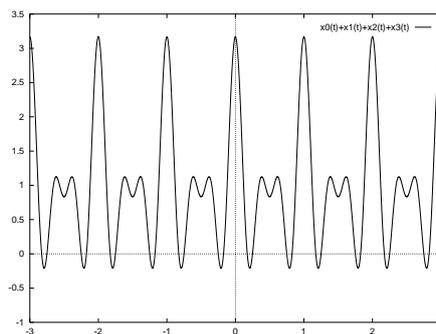
$$\beta_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin 2\pi k f_0 t dt$$

- Relation entre les deux formes :

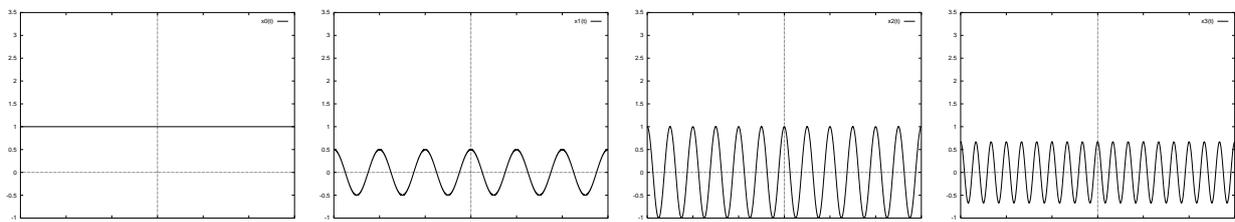
$$\begin{cases} \alpha_k = a_k + a_{-k} \\ \beta_k = j(a_k - a_{-k}) \end{cases}$$



Série de Fourier



==



signal $x(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3} \cos(6\pi t)$



Série de Fourier : propriétés

Signal périodique	Coefficients de la série
$x(t)$ (période T_0)	a_k
$y(t)$ (période T_0)	b_k
$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t_0}$
$e^{jM(\frac{2\pi}{T_0})t} x(t)$	a_{k-M}
$x^*(t)$	a_{-k}^*
$x(-t)$	a_{-k}
$x(\alpha t)$, $\alpha > 0$ (période $\frac{T_0}{\alpha}$)	a_k

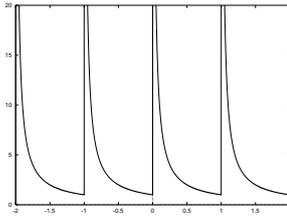


Série de Fourier : propriétés

Signal périodique	Coefficients de la série
$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$	$a_k b_k$
$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk \frac{2\pi}{T_0} a_k$
$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$ (avec $a_0 = 0$)	$\left(\frac{1}{jk(\frac{2\pi}{T_0})} \right) a_k$
$x(t)$ réel	$a_k = a_{-k}^*$
$x(t)$ réel et pair	a_k réel et $a_k = a_{-k}$
relation de Parseval : (signaux périodiques)	$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) ^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k ^2$



Série de Fourier : convergence



Tous les signaux périodiques
n'admettent pas une décomposition
en série de Fourier !

- Signaux $x(t)$ pour lesquels la série converge :

- les signaux continus périodiques ;
- les signaux d'énergie finie sur une période : $\int_{T_0} |x(t)|^2 dt < +\infty$;
- les signaux vérifiant les conditions de Dirichlet :

C1 $\int_{T_0} |x(t)| dt < +\infty$,

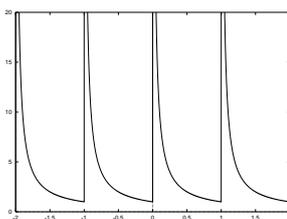
C2 $x(t)$ présente un nombre fini de maxima et de minima sur une période,

C3 $x(t)$ présente un nombre fini de discontinuités dans tout intervalle temporel fini.
Ces discontinuités sont d'amplitude finie.

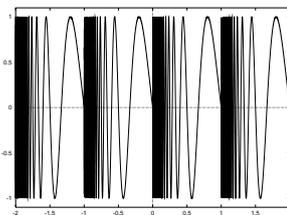
- Les signaux pour lesquels la série ne converge pas sont plutôt **pathologiques** !



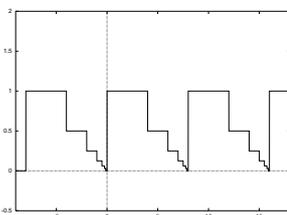
Série de Fourier : convergence



signal périodique :
 $x(t) = 1/t \quad 0 < t \leq 1$
(viole la condition C1)



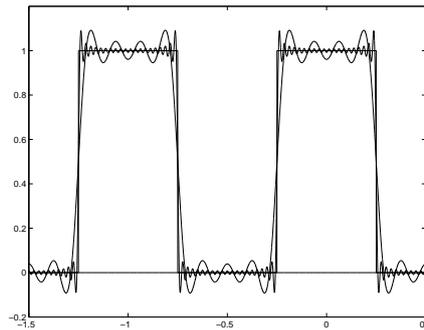
signal périodique :
 $x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right) \quad 0 < t \leq 1$
(viole la condition C2)



signal périodique :
 $x(t) = 1 \quad 0 \leq t < 4$;
 $x(t) = 1/2 \quad 4 \leq t < 6$;
 $x(t) = 1/4 \quad 6 \leq t < 7$;
 $x(t) = 1/8 \quad 7 \leq t < 7,5 \dots$
(viole la condition C3)



Séries de Fourier tronquées : approximations



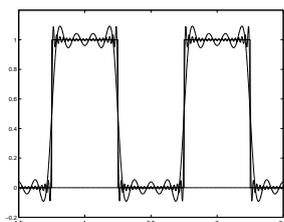
On cherche à **approcher un signal périodique** $x(t)$ par une série de Fourier tronquée ($2N + 1$ termes) :

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{+N} a_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

où les a_k sont à déterminer pour avoir la « meilleure » approximation de $x(t)$.



Séries de Fourier tronquées : approximations



$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{+N} a_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Critère de détermination des a_k ?

- Erreur d'approximation : $e_N(t) = x(t) - x_N(t)$
- Énergie de l'erreur (EQM) : $E_N = \int_{T_0} |e_N(t)|^2 dt$
- Critère : $\min_{a_k} E_N \Rightarrow a_k$ optimaux

- Expression des a_k optimaux pour N donné :

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad \text{qui sont précisément les coef. de la DSF}$$

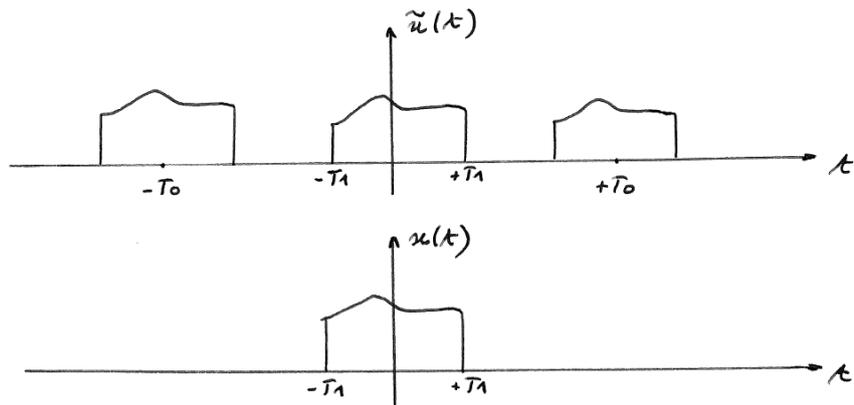
- Convergence en moyenne quadratique :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{T_0} |e_N(t)|^2 dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{T_0} |x(t) - x_N(t)|^2 dt = 0$$

Ce n'est pas une convergence uniforme !



Passage à la transformée de Fourier



Signal apériodique = signal périodique dont la période tend vers $+\infty$.

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j2\pi k f_0 t} \xrightarrow{T_0 \rightarrow +\infty} x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

Passage à la transformée de Fourier

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j2\pi k f_0 t} \xrightarrow{T_0 \rightarrow +\infty} x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

- Signal périodique $\tilde{x}(t)$ (période T_0) :

$$\text{série de Fourier : } \begin{cases} a_k & = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \tilde{x}(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\ \tilde{x}(t) & = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j2\pi k f_0 t} \end{cases}$$

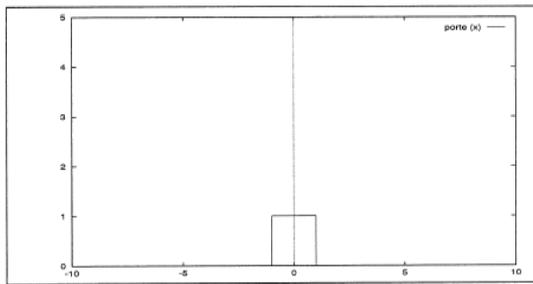
- Signal apériodique $x(t)$:

$$\text{transformée de Fourier : } \begin{cases} X(f) & = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \\ x(t) & = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \end{cases}$$

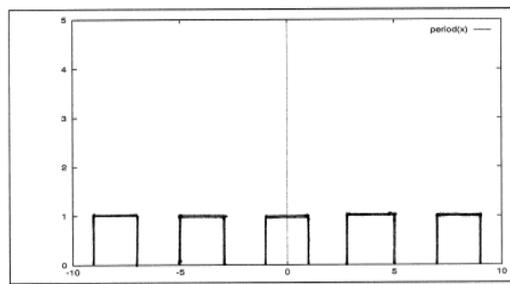
- Relation entre les deux représentations :

$$a_k = \frac{1}{T_0} X(f) \Big|_{f = k f_0}$$

Décomposition en SF et transformée de Fourier

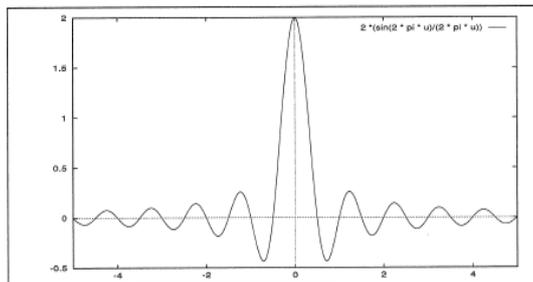


Fonction porte 1D : $x(t)$

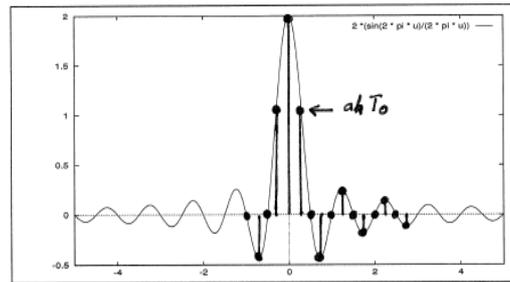


Fonction porte 1D périodisée : $\tilde{x}(t)$

$T_0 = 4$



T.F. de la fonction porte 1D : $X(f)$



a_k : coefficients série de Fourier de $\tilde{x}(t)$

$a_k T_0 = X\left(\frac{k}{T_0}\right)$



Transformée de Fourier : remarques

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

- $x(t)$ = somme d'exponentielles complexes de fréquences f et d'amplitudes $X(f)df$.
- $X(f)$: transformée de Fourier de $x(t)$ ou « spectre complexe » de $x(t)$.
- Notations :

$$\begin{aligned} x(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \\ X(f) &= \mathcal{F}[x(t)] \\ x(t) &= \mathcal{F}^{-1}[X(f)] \end{aligned}$$

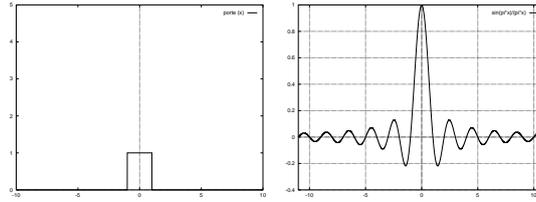
- $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$ est la « composante continue » du signal, $X(f)$ est la « composante fréquentielle » à la fréquence f .
- Spectres d'amplitude et de phase :

$$\begin{aligned} X(f) &= |X(f)| e^{j\text{Arg}[X(f)]} \\ |X(f)| &: \text{spectre d'amplitude} \\ \text{Arg}[X(f)] &: \text{spectre de phase} \end{aligned}$$

les analyseurs de spectre mesurent $|X(f)|^2$.



Définitions de la transformée de Fourier



$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$$

Plusieurs définitions sont utilisées pour la TF :

- Variable f :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

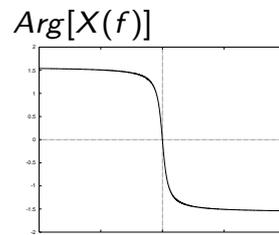
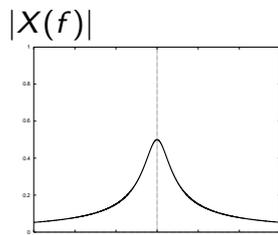
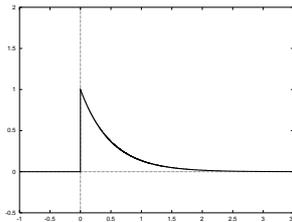
- Variable $\omega = 2\pi f$:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

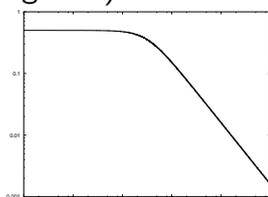
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$



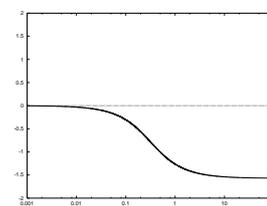
$$x(t) = \exp(-2t) u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f) = \frac{1}{2+j2\pi f}$$



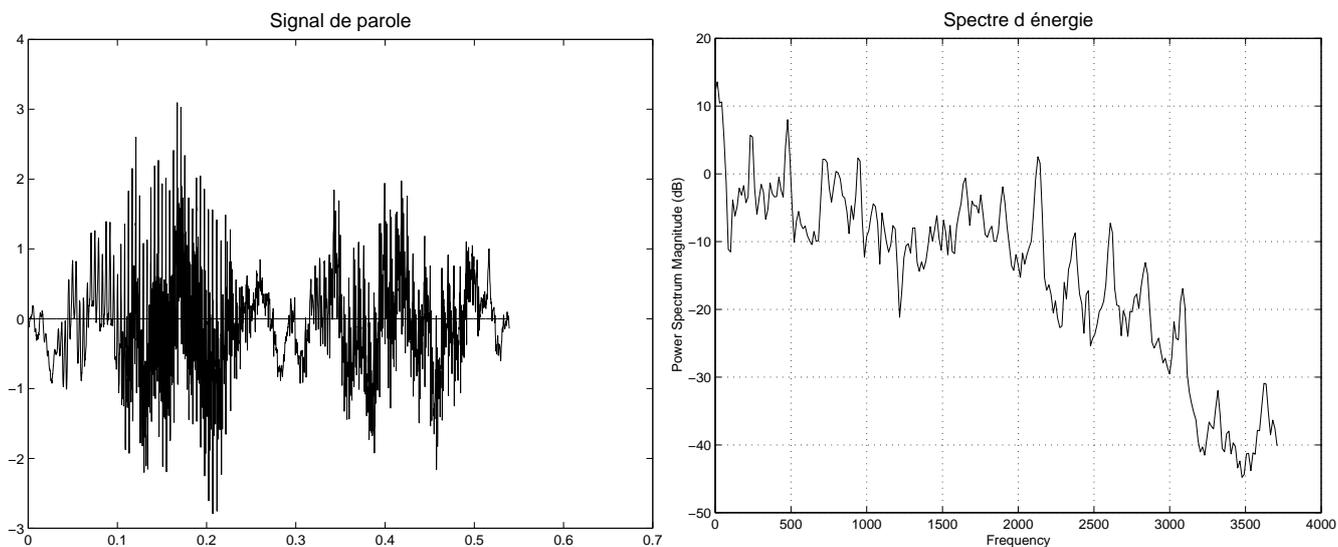
$20 \log_{10} |X(f)|$ (en dB) (échelle log en f)



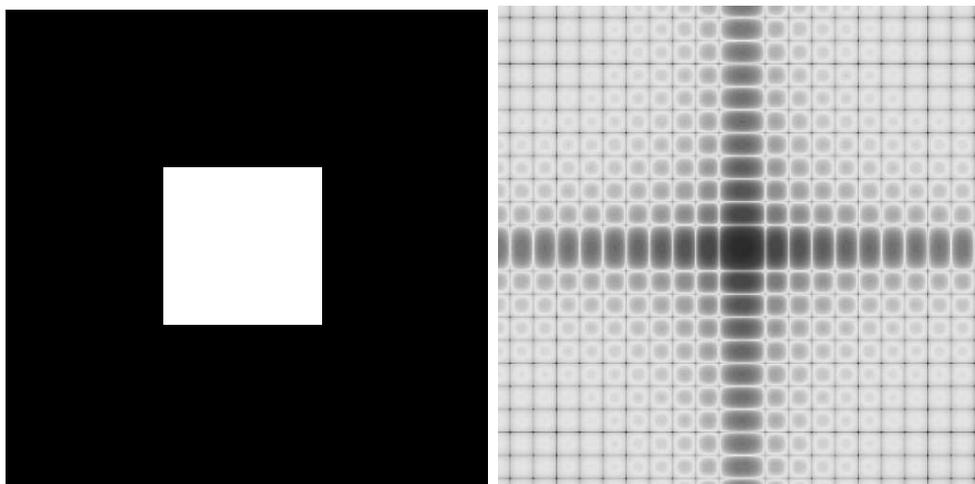
$Arg[X(f)]$ (échelle log en f)



Exemple de spectre



Spectre d'un signal de parole, calculé sur ordinateur.



$$f(x, y) \xleftrightarrow{\mathcal{F}_{2D}} F(f_x, f_y)$$

Transformée de Fourier d'une image :

$$\mathcal{F}_{2D}(f_x, f_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy$$

(seul le module est représenté).



$$f(x, y) \xleftrightarrow{\mathcal{F}_{2D}} F(f_x, f_y)$$

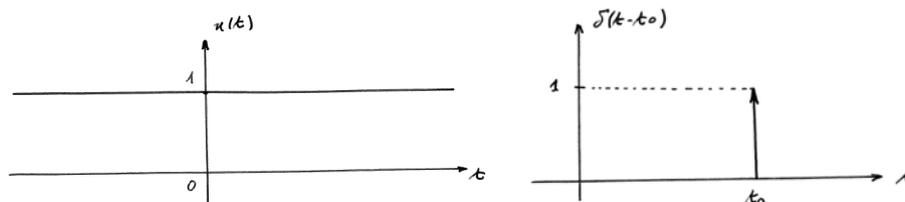
Transformée de Fourier d'une image :

$$\mathcal{F}_{2D}(f_x, f_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy$$

(seul le module est représenté).



Convergence de la transformée de Fourier



Toutes les fonctions n'admettent pas une transformée de Fourier !

- **Signaux pour lesquels la transformée converge :**

- les signaux d'énergie finie : $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$
- les signaux vérifiant les conditions de Dirichlet :

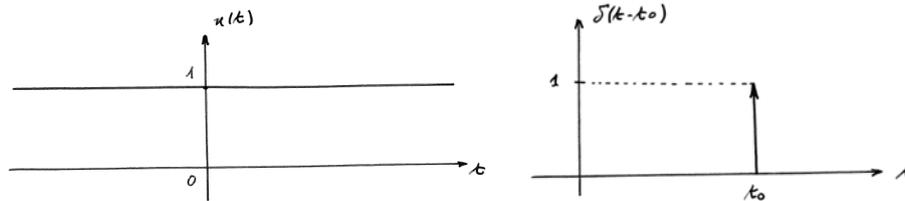
C1 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty$

C2 $x(t)$ présente un nombre fini de maxima et de minima dans tout intervalle fini.

C3 $x(t)$ présente un nombre fini de discontinuités dans tout intervalle fini. Ces discontinuités sont d'amplitude finie.



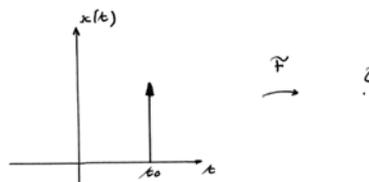
Convergence de la transformée de Fourier



Toutes les fonctions n'admettent pas une transformée de Fourier !

- **Conséquence : de nombreux signaux n'admettent pas de TF au sens des fonctions :**
 - $x(t) = 1$;
 - les signaux périodiques ;
 - les distributions singulières (Dirac, etc.)

Transformée de Fourier des distributions



On est amené à étendre la TF aux distributions. Ceci permet en particulier de traiter le cas des signaux périodiques. La TF d'une distribution S est définie par :

$$\langle \mathcal{F}[S], \Phi \rangle = \langle S, \mathcal{F}[\Phi] \rangle$$

- $\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1$
- $1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \delta(f)$
- $\delta(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j2\pi f t_0}$
- $e^{j2\pi f_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \delta(f - f_0)$

Transformée de Fourier des distributions

- **Signaux sinusoïdaux :**

$$\begin{aligned}\cos 2\pi f_0 t &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \\ \sin 2\pi f_0 t &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]\end{aligned}$$

- **Autres distributions :**

$$\begin{aligned}\text{sign}(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} v.p. \frac{1}{j\pi f} \\ v.p. \frac{1}{t} &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} -j\pi \text{sign}(f) \\ u(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} \delta(f) + v.p. \frac{1}{j2\pi f}\end{aligned}$$



Transformée de Fourier des signaux périodiques

Un signal périodique $\tilde{x}(t)$ est d'énergie infinie et n'a donc pas de TF au sens des fonctions. Il admet toutefois une TF au sens des distributions. **Cette TF est une somme pondérée de distributions de Dirac (spectre de raies).**

- **Décomposition en série de Fourier de $\tilde{x}(t)$ (période $T_0 = \frac{1}{f_0}$) :**

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

- **Transformée de Fourier de $\tilde{x}(t)$:**

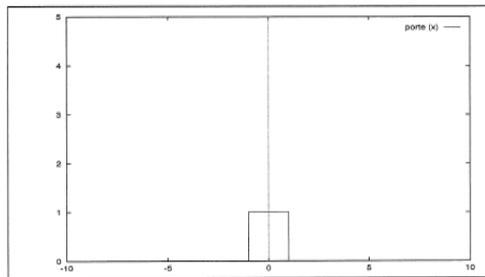
$$\tilde{x}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{X}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(f - k f_0)$$

Exemple important : la TF du peigne de Dirac

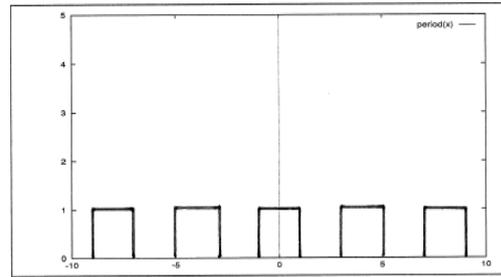
$$\text{III}_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k f_0)$$



Transformée de Fourier des signaux périodiques

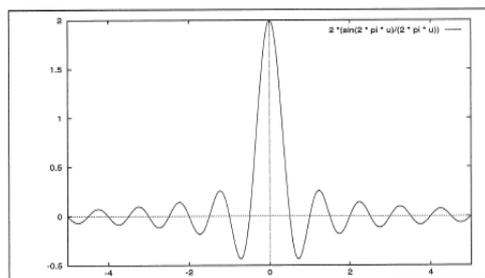


Fonction porte 1D

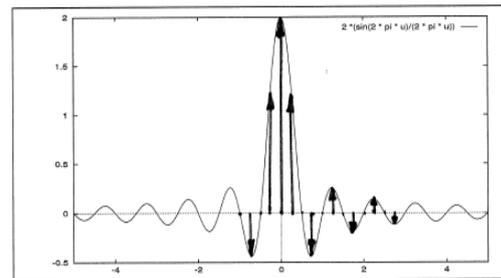


Fonction porte 1D périodisée : $z(t)$

$T_0 = 4$



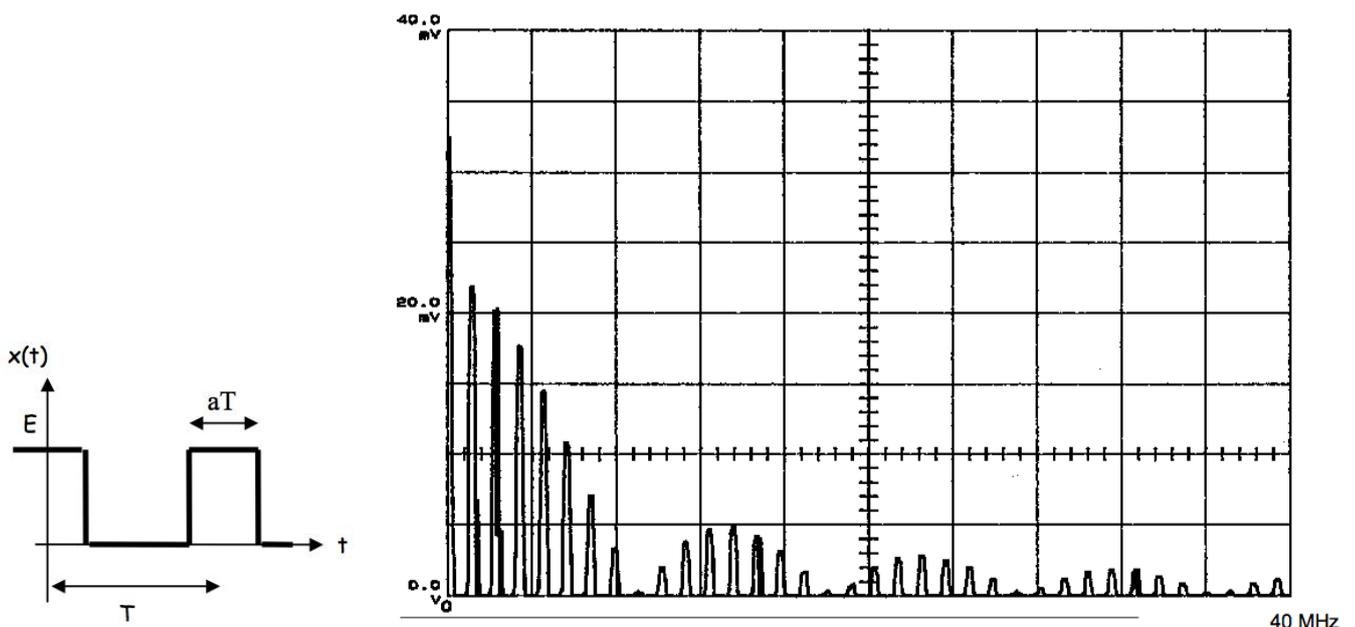
T.F. de la fonction porte 1D



Représentation de : $Z(f)T_0 = T_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(f - kf_0)$



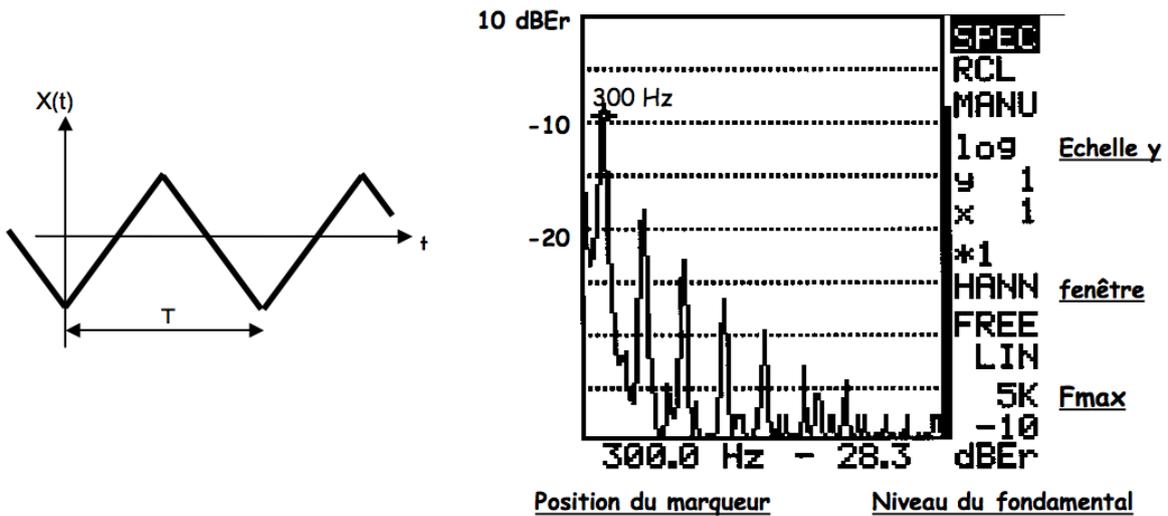
Spectre réel des signaux périodiques



Source : Jean-Philippe Muller 2002



Spectre réel des signaux périodiques



Source : Jean-Philippe Muller 2002



Transformée de Fourier : propriétés

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

- Linéarité

$$si \quad x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(f)$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(f)$$

$$alors \quad a x_1(t) + b x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} a X_1(f) + b X_2(f)$$



Transformée de Fourier : propriétés

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

• Symétries

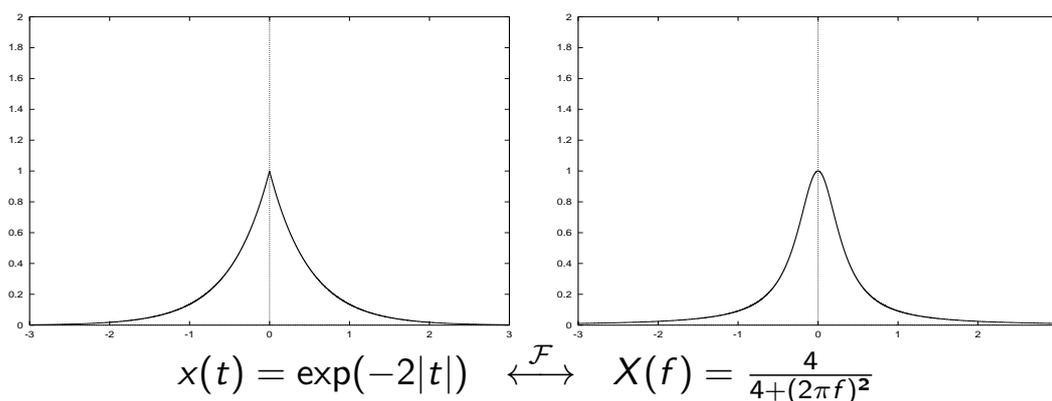
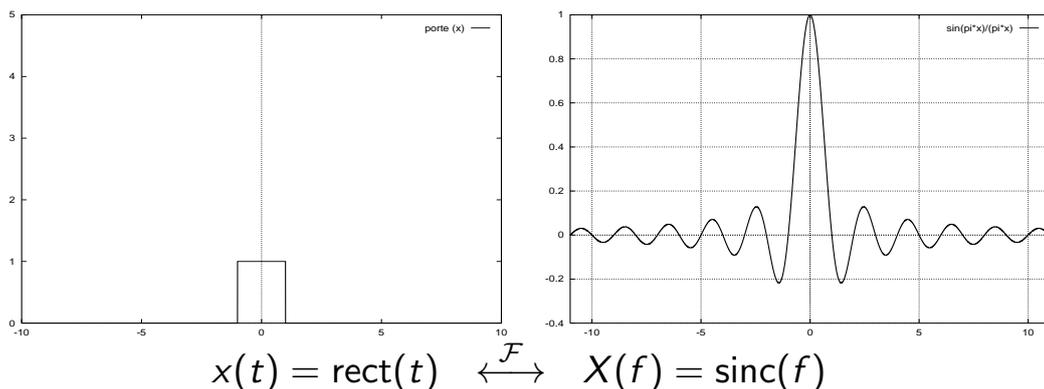
- si $x(t)$ est réel :

$$\begin{aligned} X(-f) &= X^*(f) \\ |X(-f)| &= |X(f)| \\ \text{Arg } X(-f) &= -\text{Arg } X(f) \end{aligned}$$

⇒ représentation de la seule partie $f \geq 0$.

- si $x(t)$ est réel et pair $X(f)$ est réel et pair ;
- si $x(t)$ est réel et impair $X(f)$ est imaginaire pur et impair

Transformée de Fourier : propriétés



Transformée de Fourier : propriétés

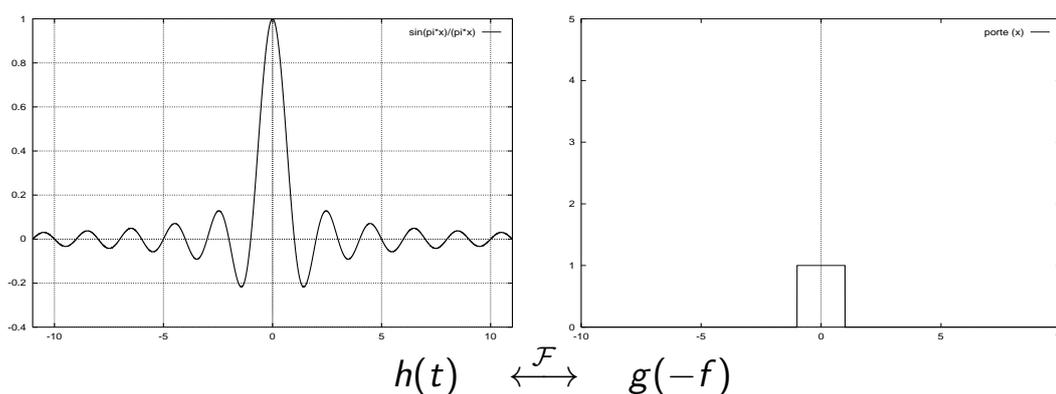
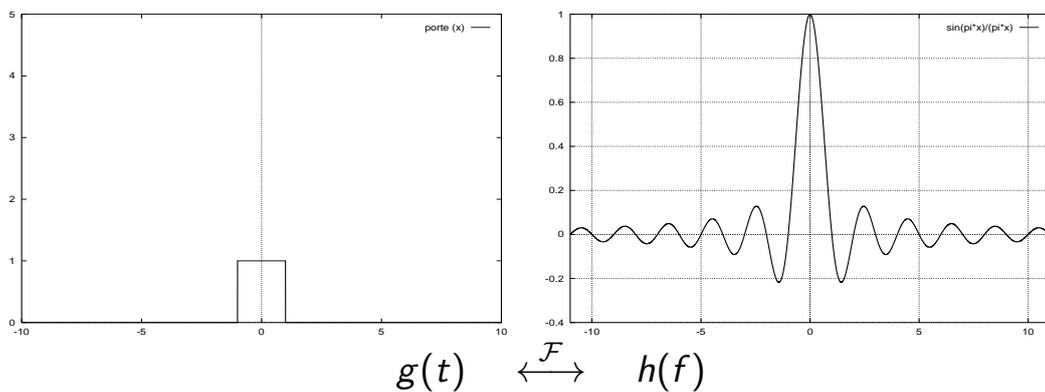
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

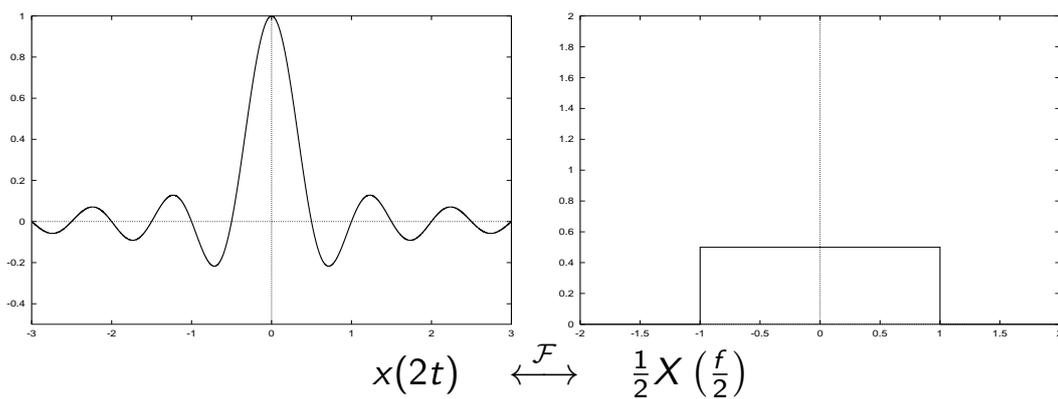
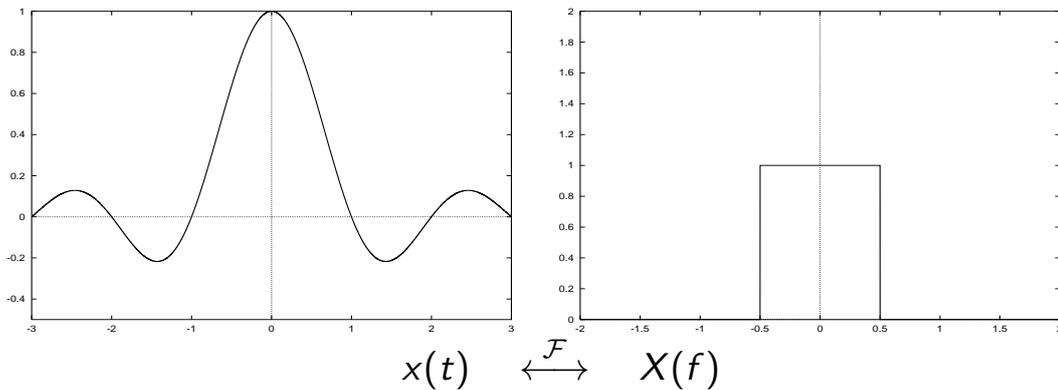
- Dualité

$$\begin{aligned} \text{si } g(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} h(f) \\ h(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} g(-f) \end{aligned}$$

- Translation et dilatation

$$\begin{aligned} x(t - t_0) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j2\pi ft_0} X(f) \\ e^{j2\pi f_0 t} x(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f - f_0) \\ x(at) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \end{aligned}$$





Transformée de Fourier : propriétés

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

- Dérivation, intégration

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} j2\pi fX(f) \\ -j2\pi tx(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{dX(f)}{df} \\ \int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j2\pi f}X(f) + \frac{1}{2}X(0)\delta(f) \end{aligned}$$



$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

• Formules de Parseval-Plancherel

- Signaux à énergie finie : $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t)^* dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) Y(f)^* df$
- Signaux périodiques : $\frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) y(t)^* dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k b_k^*$

• Cas particuliers

- Signaux à énergie finie :
 $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$ énergie
- Signaux périodiques :
 $P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$ puissance moyenne

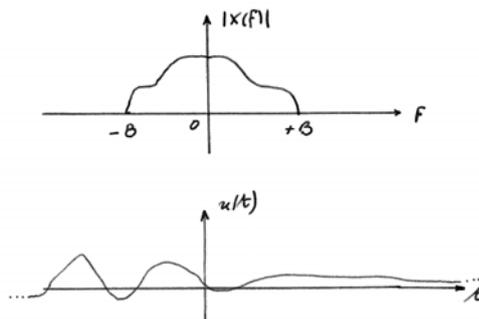


Cas des signaux à support borné

La plupart des signaux physiques sont à support borné (dans le domaine temporel ou fréquentiel) :

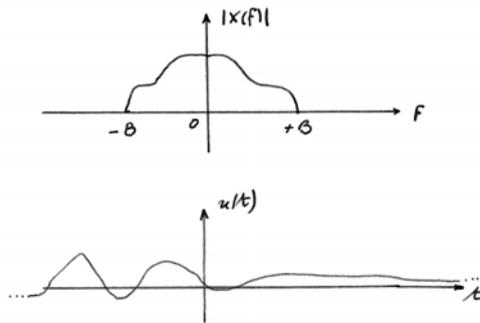
- signaux transitoires (support temporel borné) ;
- signaux observés à la sortie d'un appareil de mesure (support fréquentiel borné).

• Signaux $x(t)$ à support fréquentiel borné (bande limitée $[-B, +B]$)

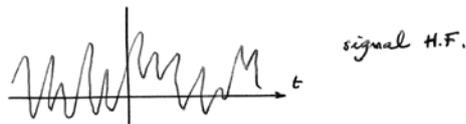
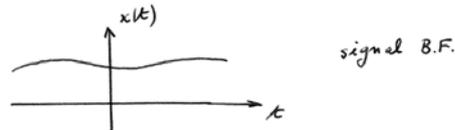


⇒ $x(t)$ est à support temporel illimité !



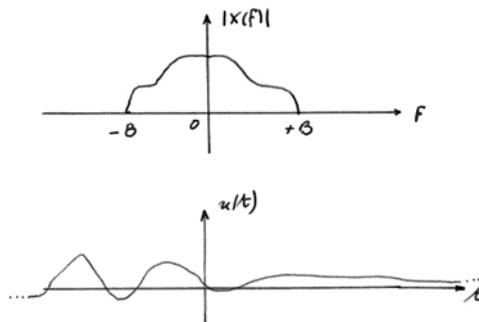


- Signaux $x(t)$ à support fréquentiel borné (bande limitée $[-B, +B]$)



- Signal basses fréquences : à variations lentes (B petit)
Signal hautes fréquences : à variations rapides (B grand)

- Signaux $x(t)$ à support fréquentiel borné (bande limitée $[-B, +B]$)

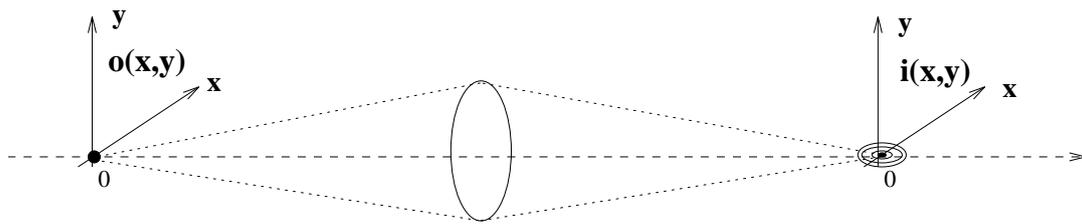


- $x(t)$ ne peut présenter des variations arbitrairement rapides :

$$\text{si } |x(t)| < M$$

$$\text{alors : } \frac{|x(t) - x(t + \tau)|}{M} \ll 1 \text{ pour } \tau \ll \frac{1}{B}$$

- temps de montée de $-M$ à $+M$: $\tau \geq \frac{1}{\pi B}$
- Signaux à support temporel borné ... ont forcément un spectre illimité (dualité temps-fréquence).



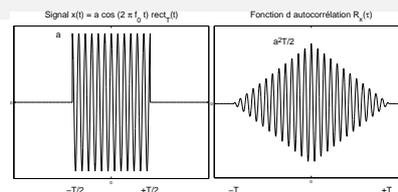
La TF d'un produit de convolution est un produit simple. Ce résultat fondamental a plusieurs applications :

- calcul d'un produit de convolution par passage par la TF puis TF^{-1} ;
- analyse très simple des systèmes linéaires dans le domaine fréquentiel ;
- implantation des systèmes linéaires dans le domaine fréquentiel.

- **TF d'un produit de convolution** : $z(t) = x(t) * y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Z(f) = X(f) \cdot Y(f)$
- **TF d'un produit simple** : $z(t) = x(t) \cdot y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Z(f) = X(f) * Y(f)$



Corrélation (autocorrélation et intercorrélation)



Les fonctions de corrélation (autocorrélation et intercorrélation) sont utilisées dans l'analyse spectrale des signaux à énergie finie ou à puissance moyenne finie. La fonction d'intercorrélation permet par ailleurs de mesurer le degré de ressemblance de deux signaux.

• Cas des signaux d'énergie finie

soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux d'énergie finie.

- **Fonction d'intercorrélation** (produit de corrélation de x par y) :

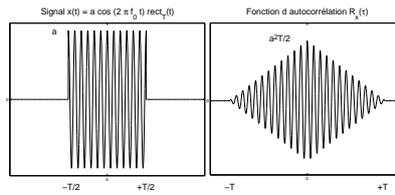
$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t - \tau)dt$$

- **Fonction d'autocorrélation** de $x(t)$:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t - \tau)dt$$



Corrélation (autocorrélation et intercorrélation)



- Propriétés (signaux d'énergie finie) :

relation avec

la convolution : $R_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau)$

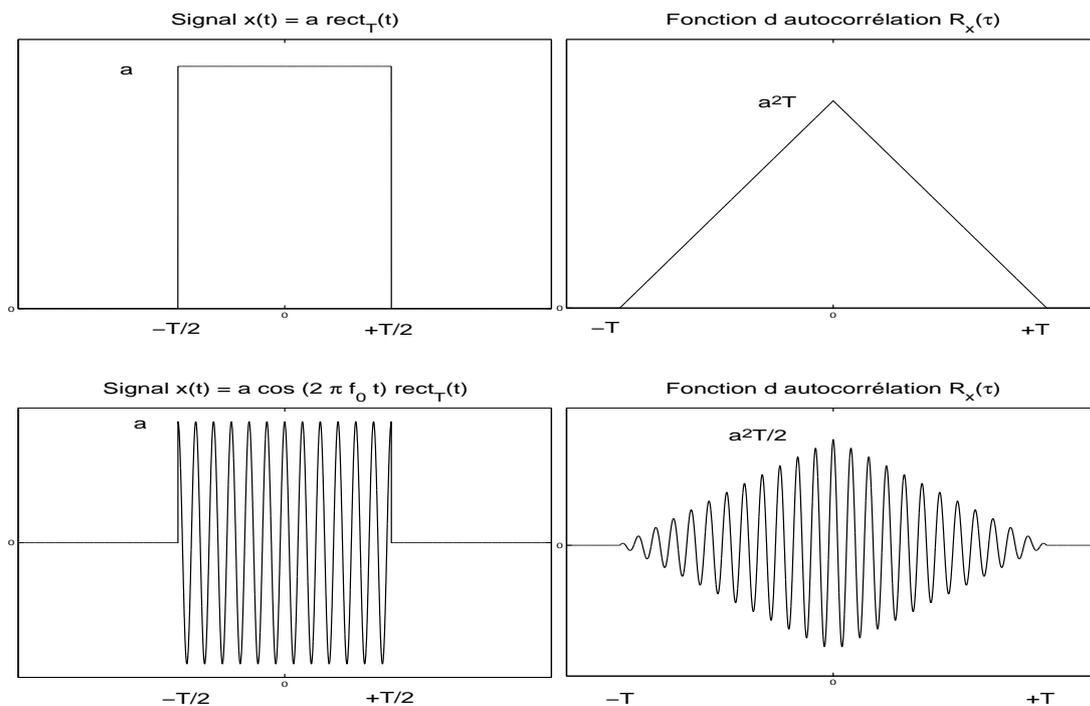
symétrie : $R_{xy}(-\tau) = R_{yx}^*(\tau)$

$R_x(-\tau) = R_x^*(\tau)$

si x est réel : $R_x(-\tau) = R_x(\tau)$

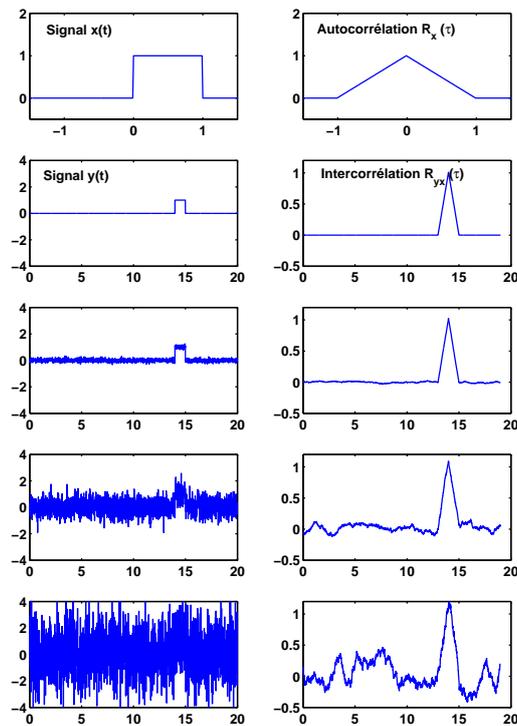
énergie du signal : $E_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$

$|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$



Fonctions d'autocorrélation : signaux d'énergie finie





Détection d'un signal $x(t)$ connu dans du bruit : **utilisation de la fonction d'intercorrélation comme mesure de ressemblance. $R_{yx}(\tau)$ est max. pour $\tau = 14$**

$$x(t) = \text{rect}_{T=1}(t - \frac{1}{2}); y(t) = x(t - 14) + \text{bruit}; R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot x(t - \tau) dt$$



Corrélation (autocorrélation et intercorrélation)

- **Cas des signaux de puissance moyenne finie**

Ils sont d'énergie infinie et couvrent en particulier les signaux périodiques. Les définitions précédentes sont modifiées comme suit :

- **Fonction d'intercorrélation de $x(t)$ et $y(t)$:**

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) y^*(t - \tau) dt$$

- **Fonction d'autocorrélation de $x(t)$:**

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) x^*(t - \tau) dt$$



Corrélation (autocorrélation et intercorrélation)

- Propriétés (signaux de puissance moyenne finie) :

$$\text{symétrie : } R_{xy}(-\tau) = R_{yx}^*(\tau)$$

$$R_x(-\tau) = R_x^*(\tau)$$

$$\text{si } x \text{ est réel : } R_x(-\tau) = R_x(\tau)$$

$$\text{puissance moyenne du signal : } P_x = R_x(0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$
$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$$



Corrélation (autocorrélation et intercorrélation)

- Cas particulier : signaux périodiques de période T_0

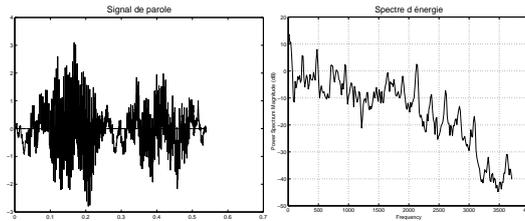
$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)x^*(t-\tau) dt$$
$$= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t)x^*(t-\tau) dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

où les a_k sont les coefficients du développement en série de Fourier de $x(t)$.
On remarque que cette fonction d'autocorrélation est aussi périodique de période T_0 . On en déduit la *puissance moyenne du signal* :

$$P_x = R_x(0)$$
$$= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$



Analyse spectrale : spectre d'énergie



Les analyseurs de spectre permettent de mesurer des spectres d'énergie ou de puissance.

• Cas des signaux d'énergie finie

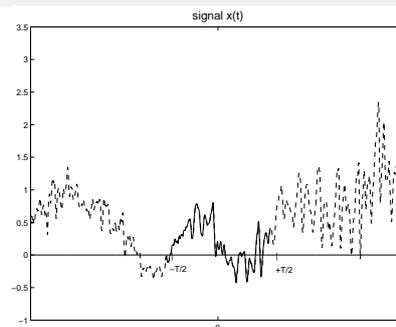
- Le spectre d'énergie (ou densité spectrale d'énergie) $S_x(f)$ du signal $x(t)$ est la TF de la fonction d'autocorrélation :

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S_x(f) = X(f).X^*(f) = |X(f)|^2$$

- Théorème de Parseval : $E_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df$



Analyse spectrale : spectre de puissance



• Cas des signaux de puissance finie

- Le spectre de puissance (ou densité spectrale de puissance) $S_x(f)$ du signal $x(t)$ est la TF de la fonction d'autocorrélation.

Si $x_T(t)$ désigne le signal $x(t)$ tronqué sur $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$: $x_T(t) = x(t).rect_T(t)$

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)x^*(t-\tau)dt \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S_x(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$$

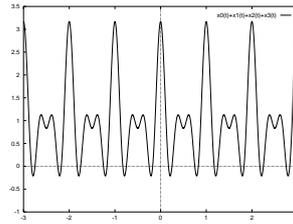
où $X_T(f)$ est la TF de $x_T(t)$.

- Théorème de Parseval :

$$P_x = R_x(0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df$$



Analyse spectrale : spectre de puissance



• Cas particulier des signaux périodiques

- Le spectre de puissance est un spectre de raies :

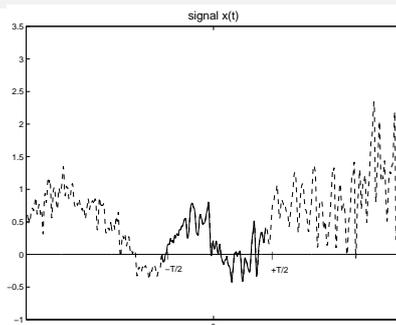
$$R_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 \delta(f - k f_0)$$

- Théorème de Parseval :

$$P_x = R_x(0) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$



Analyse spectrale sur une fenêtre finie

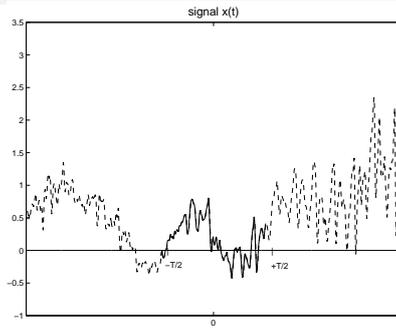


En pratique les analyseurs de spectre analysent les signaux sur une fenêtre finie $[0, T]$ ou $[-T/2, T/2]$. On adopte alors les approximations suivantes (fonction d'autocorrélation) :

	Energie finie	Puissance finie
$R_x(\tau)$ théorique	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t - \tau) dt$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \frac{\tau}{2})x^*(t - \frac{\tau}{2}) dt$	$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x^*(t - \tau) dt$
$R_x(\tau)$ approx. sur $[0, T]$ $ \tau \ll T$	$\int_{\frac{ \tau }{2}}^{T - \frac{ \tau }{2}} x(t + \frac{\tau}{2})x^*(t - \frac{\tau}{2}) dt$	$\frac{1}{T} \int_{\frac{ \tau }{2}}^{T - \frac{ \tau }{2}} x(t + \frac{\tau}{2})x^*(t - \frac{\tau}{2}) dt$
$R_x(\tau)$ approx. sur $[-T/2, T/2]$ $ \tau \ll T$	$\int_{-\frac{T}{2} + \frac{ \tau }{2}}^{\frac{T}{2} - \frac{ \tau }{2}} x(t + \frac{\tau}{2})x^*(t - \frac{\tau}{2}) dt$	$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2} + \frac{ \tau }{2}}^{\frac{T}{2} - \frac{ \tau }{2}} x(t + \frac{\tau}{2})x^*(t - \frac{\tau}{2}) dt$



Analyse spectrale sur une fenêtre finie

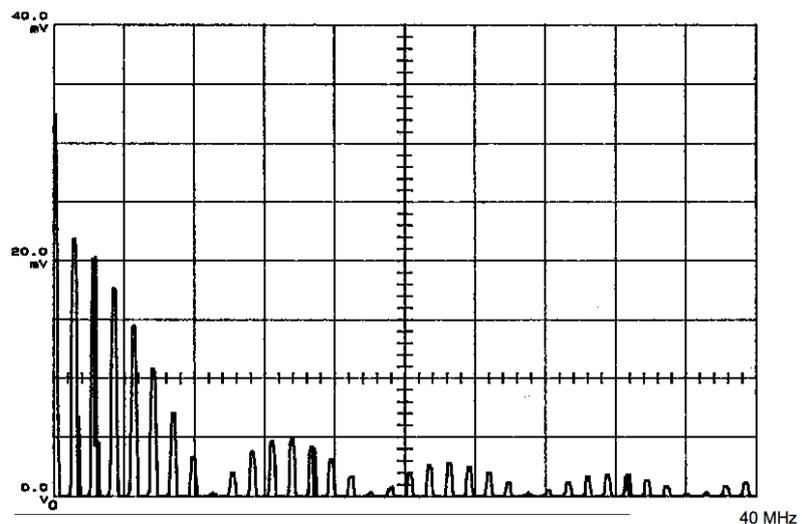
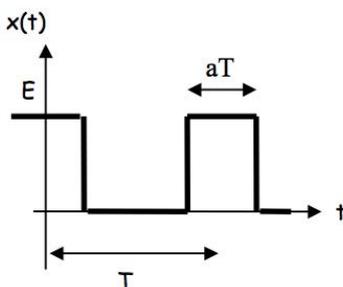


En pratique les analyseurs de spectre analysent les signaux sur une fenêtre finie $[0, T]$ ou $[-T/2, T/2]$. On adopte alors les approximations suivantes (spectres d'énergie et de puissance) :

	Energie finie	Puissance finie
$S_x(f)$ théorique	$ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt ^2$	$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-j2\pi ft} dt ^2$
$S_x(f)$ approx. sur $[0, T]$	$ \int_0^T x(t)e^{-j2\pi ft} dt ^2$	$\frac{1}{T} \int_0^T x(t)e^{-j2\pi ft} dt ^2$
$S_x(f)$ approx. sur $[-T/2, T/2]$	$ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-j2\pi ft} dt ^2$	$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-j2\pi ft} dt ^2$



Analyse spectrale sur une fenêtre finie

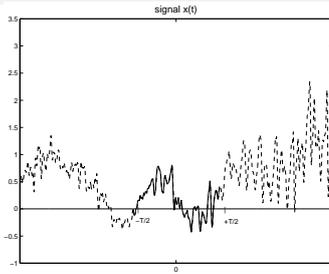


Source : Jean-Philippe Muller 2002

Le spectre d'un signal périodique analysé sur une fenêtre temporelle de durée finie n'est pas constitué de Diracs mais de raies physiques ayant une certaine largeur.
La résolution spectrale est limitée par la durée de la fenêtre d'observation.



Fenêtre d'observation, résolution spectrale



Supposons que l'on observe le signal $x(t)$ à travers une fenêtre d'observation finie $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Le signal $x(t)$ tronqué sur $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ est noté $x_T(t)$.

Il vient : $x_T(t) = x(t) w(t)$ avec :

$$\begin{cases} w(t) = 1 & \text{si } |t| \leq \frac{T}{2} \\ w(t) = 0 & \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

d'où :

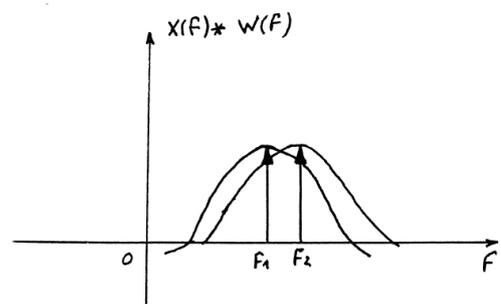
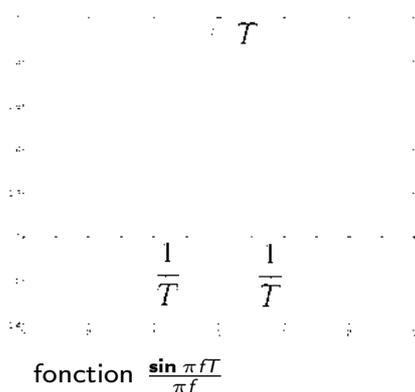
$$X_T(f) = X(f) * \frac{\sin \pi f T}{\pi f}$$

$$S_x(f) \simeq \frac{1}{T} |X(f) * \frac{\sin \pi f T}{\pi f}|^2$$

Pour une « fréquence pure » $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$:

$$S_x(f) \simeq \frac{1}{T} \left| \frac{\sin \pi(f - f_0) T}{\pi(f - f_0)} \right|^2$$

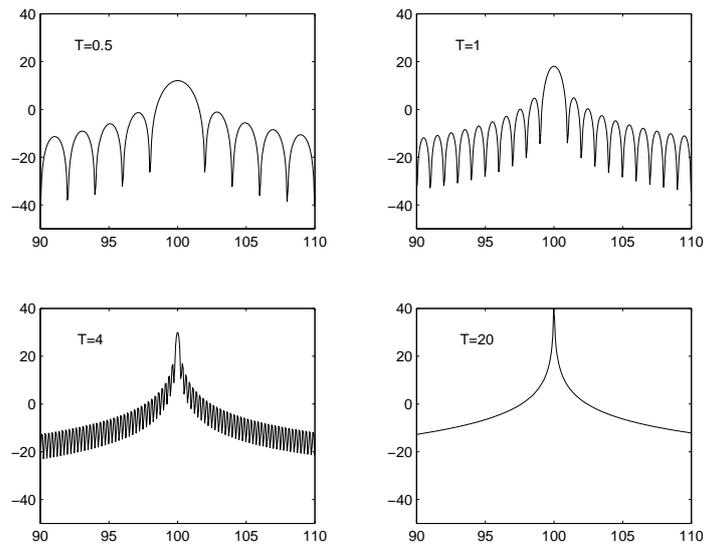
Fenêtre d'observation, résolution spectrale



La convolution de $X(f)$ par le sinus cardinal rend impossible la séparation en fréquence de deux sinusoïdes dont les fréquences f_1 et f_2 se retrouvent dans le lobe principal du sinus cardinal.

La résolution de l'analyse spectrale est donc physiquement limitée par la largeur de la fenêtre d'analyse. On ne peut « résoudre » deux sinusoïdes séparées de moins de $\frac{1}{T}$ où T est la largeur de la fenêtre d'analyse du signal.

Fenêtre d'observation, résolution spectrale

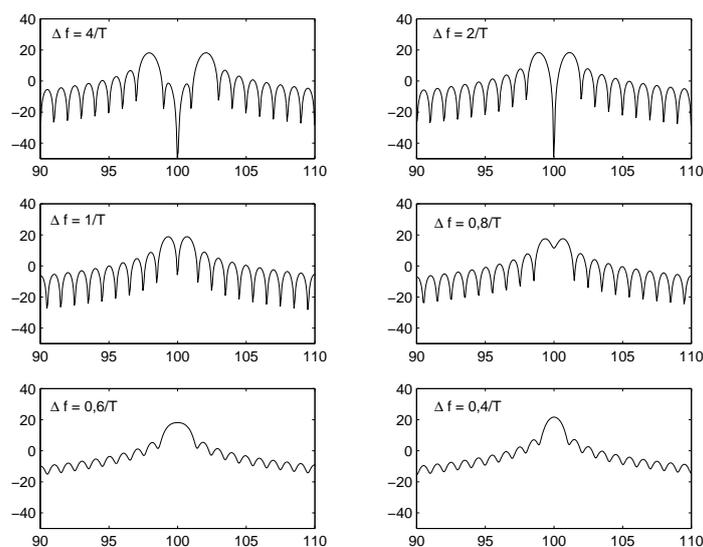


spectres de puissance du signal :

$$\cos(2\pi f_0 t) ; \quad f_0 = 100$$

(fenêtre d'observation rect. de largeur T variable)

Fenêtre d'observation, résolution spectrale

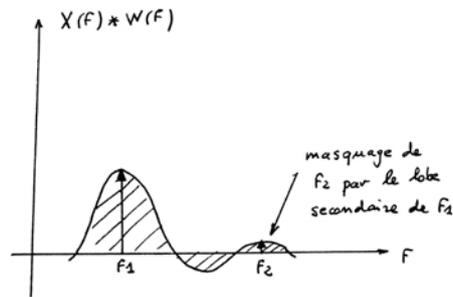


spectres de puissance du signal :

$$\cos(2\pi(f_0 - \frac{\Delta f}{2})t) + \cos(2\pi(f_0 + \frac{\Delta f}{2})t)$$

(fenêtre d'observation rect. de largeur $T = 1$, Δf variable)

Effet de masquage des signaux faibles

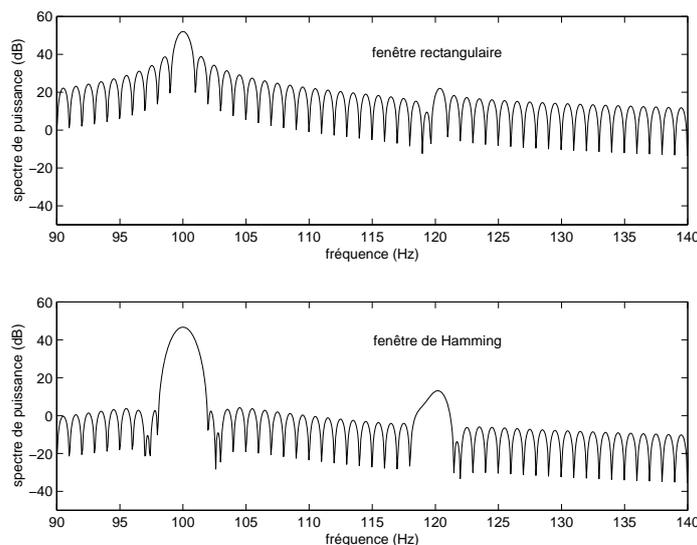


Les lobes secondaires du sinus cardinal viendront également masquer les composantes fréquentielles plus éloignées mais de faible amplitude.

Pour pallier cet inconvénient on multiplie généralement le signal avant analyse par une fenêtre dite d'« apodisation » (autre que la fenêtre rectangulaire), qui présente des lobes secondaires moins élevés. Le gain au niveau des lobes secondaires se paie par un élargissement du lobe principal (perte en résolution spectrale). La fenêtre « de Hamming » offre un bon compromis.



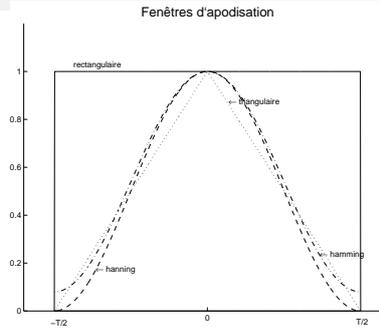
Effet de masquage des signaux faibles



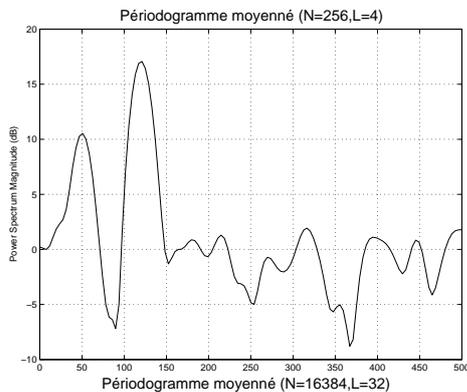
Effet de masquage : spectres de puissance du signal :
 $50 \cos(2\pi f_0 t) + \cos(2\pi f_1 t)$; $f_0 = 100$, $f_1 = 120$
(fenêtres d'apodisation de même largeur)



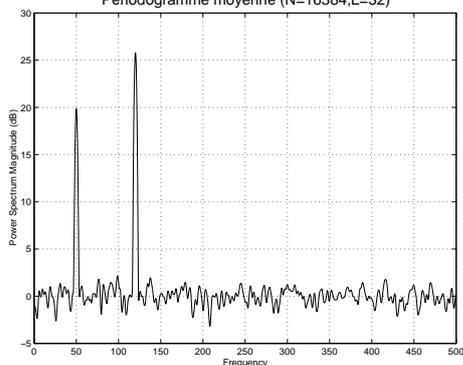
Fenêtres d'apodisation classiques



Nom	Définition de $w(k)$	1/2-largeur du lobe principal de $W(f)$	Niveau des lobes secondaires de $W(f)$
Rectangulaire	$w(t) = \begin{cases} 1 & t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{1}{T}$	- 13 dB
Triangulaire	$w(t) = \begin{cases} 1 - \frac{ t }{T/2} & t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{2}{T}$	- 26 dB
Hanning	$w(t) = \begin{cases} 0,5 + 0,5 \cos \frac{\pi t}{T/2} & t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{2}{T}$	- 32 dB
Hamming	$w(t) = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos \frac{\pi t}{T/2} & t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{2}{T}$	- 43 dB



Durée d'observation : $T = 0,256s.$



Durée d'observation : $T = 16,384s.$

Spectres de puissance (fenêtre d'apodisation de Hamming) :
 signal : $x(t) = \sin 2\pi 50t + 2 \sin 2\pi 120t + \text{bruit blanc}$



Transformée de Laplace bilatérale (TLB)

Certains signaux n'ont pas de TF car l'intégrale : $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$ diverge.
On introduit alors un facteur $e^{-\sigma t}$ qui peut éventuellement faire converger l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

- Transformée de Laplace bilatérale :

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

avec : $s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$.

- Notations :

$$\begin{aligned} X(s) &= \mathcal{L}[x(t)] \\ x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \\ x(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \end{aligned}$$

- Relation avec la TF (si elle existe) :

$$X(\omega) = X(s) \Big|_{s = j\omega}$$

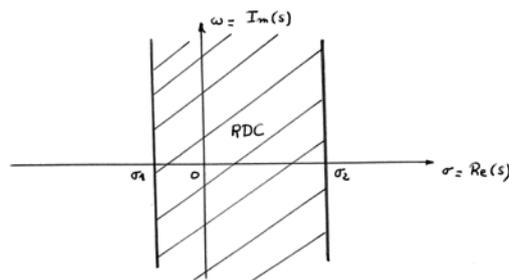
- Transformée inverse :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Delta} X(s)e^{st} ds$$

où Δ est une droite parallèle à $s = j\omega$ et située dans la région de convergence de $X(s)$.



TLB : région de convergence



- La région de convergence (RDC) est le domaine du plan complexe pour lequel l'intégrale :

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

converge.

- Elle est constituée dans tous les cas par un domaine du type :

$$R = \{ \sigma_1 < \text{Re}(s) < \sigma_2 \}$$

où σ_1, σ_2 peuvent être ∞ .

- Lorsque l'on donne une TLB il faut toujours préciser la RDC (deux signaux différents peuvent avoir même TLB avec des RDC différentes).
- La TF existe si $0 \in R$.

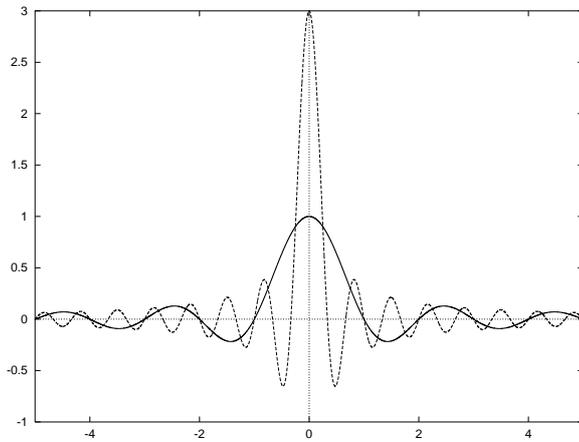


Signal	Transformée	RDC
$x(t)$	$X(s)$	R
$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$	au moins $R_1 \cap R_2$
$x(t - t_0)$	$e^{-st_0} X(s)$	R
$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$	R translaté de s_0
$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{s}{a}\right)$	$s \in RDC$ si $\frac{s}{a} \in R$
$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	au moins $R_1 \cap R_2$
$\frac{d}{dt} x(t)$	$sX(s)$	au moins R
$-tx(t)$	$\frac{d}{ds} X(s)$	R
$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$	au moins $R \cap \{\text{Re}(s) > 0\}$
Th. valeur finale		$\lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = x(+\infty)$
Th. valeur initiale $x(t) = 0, t < 0$		$\lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s) = x(0^+)$

! Différence avec la transformée de Laplace monolatérale définie par : $\mathcal{L}^+[x(t)] = X^+(s) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$

On a la relation : $\mathcal{L}^+\left[\frac{d}{dt} x(t)\right] = sX^+(s) - x(0^-)$ si $x(t)$ ne présente pas d'impulsions à l'origine.





INTRODUCTION AU TRAITEMENT DU SIGNAL

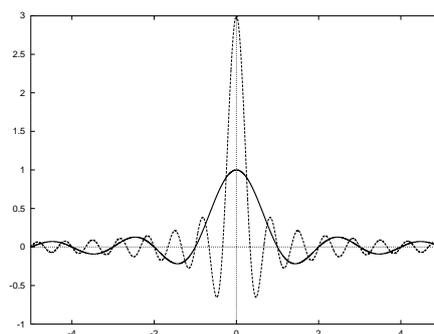
Partie III



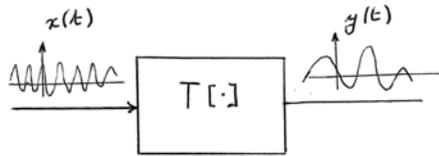
Partie III

SYSTEMES

DE TRAITEMENT DU SIGNAL



Représentation des systèmes de TS

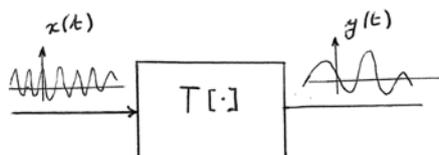


Les systèmes de TS permettent de transformer les signaux et/ou d'extraire l'information qu'ils contiennent.

- Un système est un **opérateur** T qui fait correspondre à un signal $x(t)$ (entrée du système) un signal $y(t)$ (sortie du système).
On écrira : $y(t) = T[x(t)]$
- Pour décrire complètement un système quelconque il faut indiquer quelle est sa réponse à une entrée arbitraire. Une telle description peut être très complexe.



Systemes LIT



Les systèmes linéaires et invariants dans le temps se décrivent de façon particulièrement simple et parcimonieuse. **Un système $T[\cdot]$ linéaire invariant dans le temps (LIT) vérifie :**

- **Linéarité**

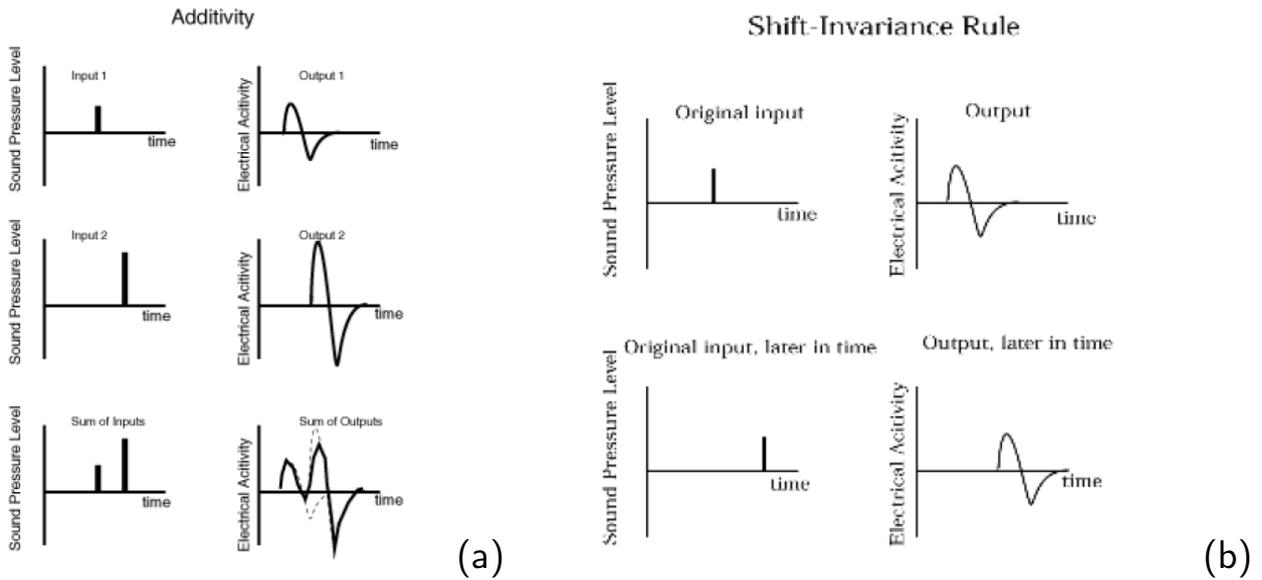
$$\forall a, b \in \mathbb{C} \quad T[ax_1(t) + bx_2(t)] = aT[x_1(t)] + bT[x_2(t)]$$

- **Invariance dans le temps (=stationnarité)**

$$\text{si } y(t) = T[x(t)] \text{ alors } \forall \tau \in \mathbb{R} \quad T[x(t - \tau)] = y(t - \tau)$$

- 1 les systèmes LIT couvrent une large classe de systèmes physiques ;
- 2 modélisation au premier ordre d'un système réel ;
- 3 ces systèmes sont encore appelés *filtres*.





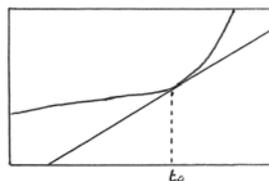
Source : David Heeger

(a) : Linéarité

(b) : Invariance dans le temps



Systèmes linéaires / non-linéaires



Exemples de systèmes linéaires :

- $y(t) = a_0x(t) + a_1x(t - \Delta t) + a_2x(t - 2\Delta t)$
- Systèmes décrits par des équations différentielles linéaires à coefficients constants (CI nulles) :

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$\text{avec : } y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \dots = \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0$$

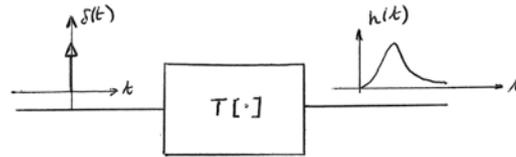
- Certains systèmes optiques
- Filtres audio

Exemples de systèmes non linéaires :

- $y(t) = x^2(t)$ $y(t) = x(t)x(t - \Delta t)$ $y(t) = e^{x(t)}$
- Limiteur idéal, mélangeur en électronique, etc.



Réponse impulsionnelle



La réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un système LIT est la réponse du système à une impulsion de Dirac à l'origine $\delta(t)$:

$$h(t) = T[\delta(t)]$$

- Réponse $y(t)$ du système à une entrée $x(t)$ quelconque :

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

$$\text{soit : } y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

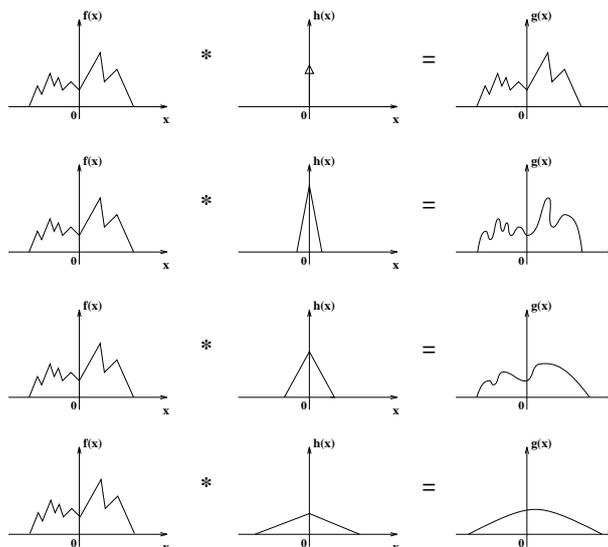
- Interprétation :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \text{somme de Diracs}$$

$$T[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)T[\delta(t-\tau)]d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



Exemples de réponses impulsionnelles



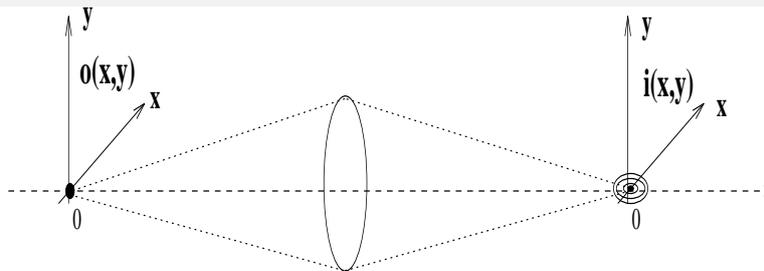
Les systèmes physiques peuvent avoir des réponses impulsionnelles variées.

Les systèmes représentés ici ont des réponses impulsionnelles qui ont pour effet d'atténuer les variations rapides du signal (càd ses « hautes fréquences »). Ils correspondent à des « filtres passe-bas ».

Exemple : diffraction des systèmes optiques.

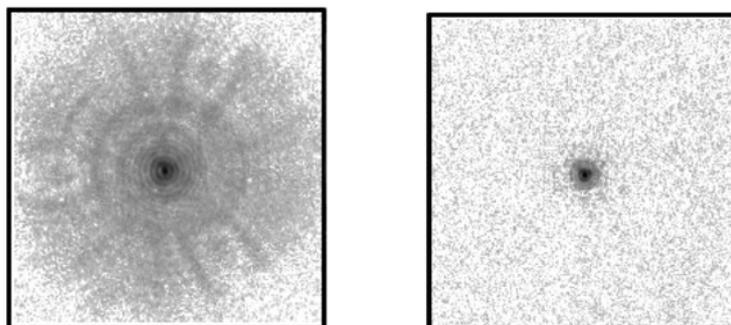
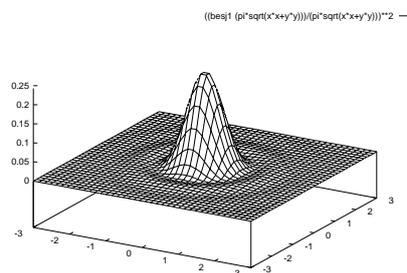


Exemple 1 : Téléscope spatial Hubble

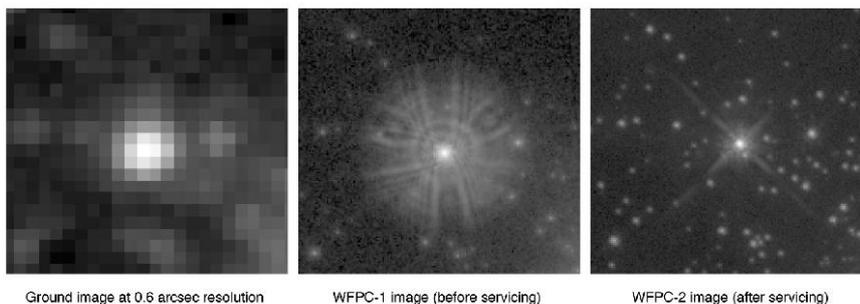


Dans le cas d'un système optique LIT, la réponse impulsionnelle correspond   l'image d'une source ponctuelle $\delta(x, y)$. L'image d'une source ponctuelle est généralement une tache ("tache d'Airy" ou "figure de diffraction").

Exemple : image d'une étoile en astronomie.



Comparison of ground-based observations of a field of stars in 30 Doradus with Hubble Space Telescope images taken before and after replacement of the first Wide Field and Planetary Camera with WFPC-2



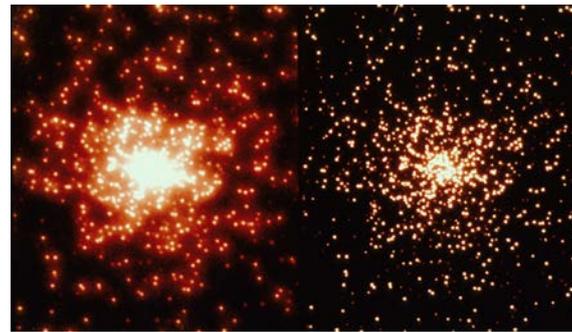
Réponse impulsionnelle du t el escope Hubble avant et après intervention (1993)

Source : <http://hubblesite.org>



M100 Galactic Nucleus

Hubble Space Telescope
Wide Field Planetary Camera 2

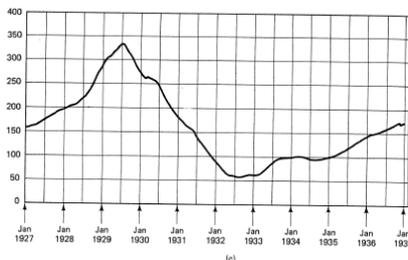
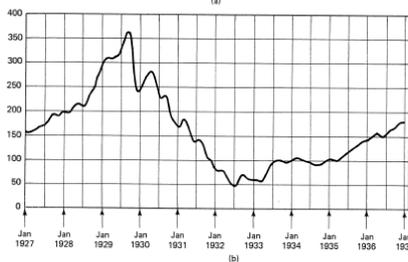
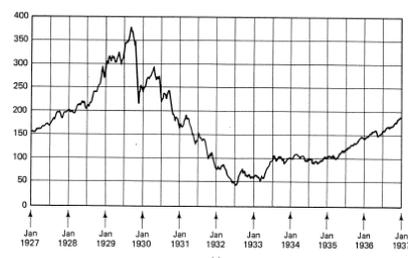


Images du télescope Hubble avant et après intervention (1993)

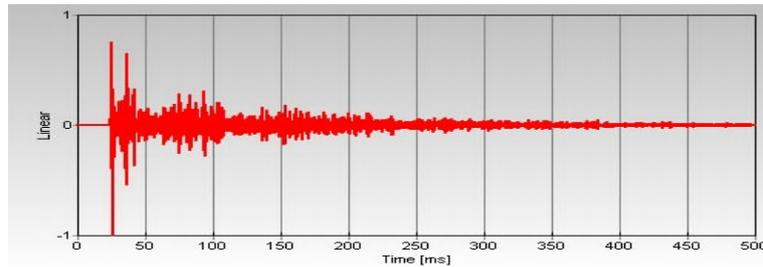
Source : <http://hubblesite.org>



Exemple 2 : Cours de la bourse



Exemple 3 : Salle de concert



Réponse impulsionnelle d'une salle

source : <http://www.duanrevig.com/RI.htm>

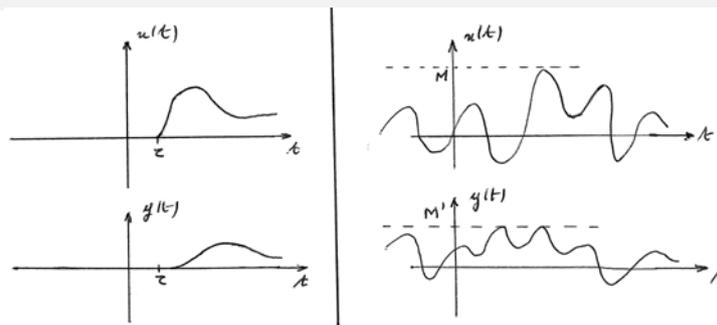
La réponse impulsionnelle d'une salle de concert donne des informations sur les réflexions (réverbérations) de la salle.

En 1949, Helmut Haas a montré que ces réflexions, quand elles arrivent de 1 à 30 ms après le son direct, ne perturbent pas la perception de la direction d'origine du son, mais augmentent le volume sonore perçu et la dimension spatiale perçue de la source.

L'acoustique architecturale a pour objet la maîtrise de la qualité sonore des bâtiments.



Causalité, stabilité



(a) Causalité

(b) Stabilité

- **Système causal** : l'effet ne peut précéder la cause. La réponse $y(\tau)$ à $t = \tau$ ne peut dépendre que des valeurs de $x(t)$ pour $t \leq \tau$.

Une CNS de causalité est :

$$h(t) = 0, \quad t < 0$$

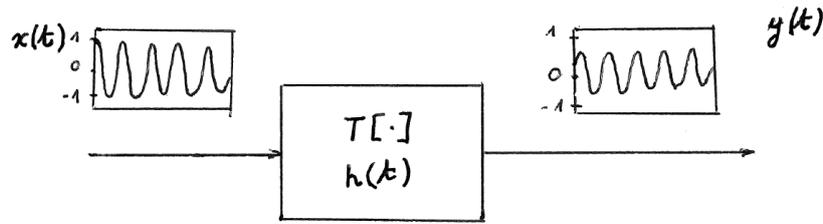
- **Système BIBO-stable** : à toute entrée bornée doit correspondre une sortie bornée.

Une CNS de BIBO-stabilité est :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < +\infty$$



Réponse en fréquence d'un système LIT



- **Réponse harmonique** = réponse du système à une « fréquence pure » (exponentielle complexe) :

$$T[e^{j2\pi f_0 t}] = H(f_0)e^{j2\pi f_0 t}$$

avec : $H(f) = \mathcal{F}[h(t)]$

- $H(f)$ est la « **réponse en fréquence** » du système :

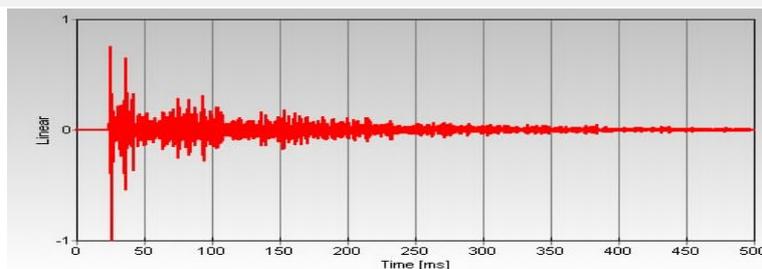
$$H(f) = |H(f)| e^{j \text{Arg } H(f)}$$

- Le signal $e^{j2\pi f_0 t}$ subit, au passage du système, un gain $|H(f_0)|$ et un déphasage d'angle $\text{Arg } H(f_0)$.
- Réponse à un signal sinusoïdal :

$$T[\cos(2\pi f_0 t + \Phi)] = |H(f_0)| \cos(2\pi f_0 t + \Phi + \text{Arg } H(f_0))$$

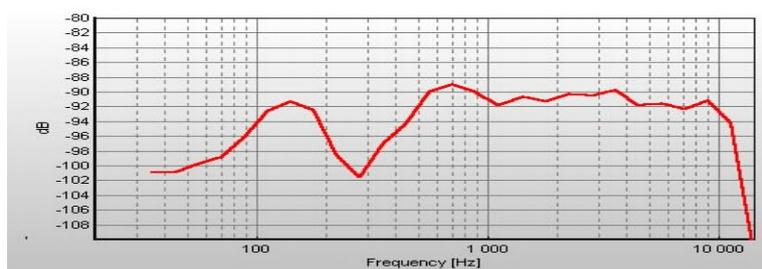


Exemple : Salle de concert



Réponse impulsionnelle d'une salle

source : <http://www.duanrevig.com/RI.htm>

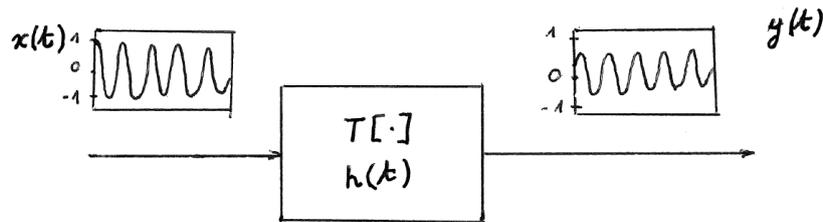


Réponse en fréquence

source : <http://www.duanrevig.com/RI.htm>



Fonction de transfert d'un système LIT

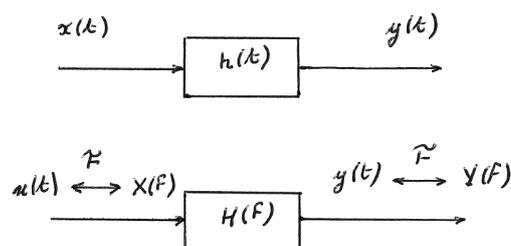


La propriété établie précédemment pour les signaux $e^{j2\pi f_0 t}$ s'étend également aux exponentielles complexes de la forme : e^{st} avec $s = \sigma + j\omega$. On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}[e^{st}] &= H(s)e^{st} \\ \text{avec : } H(s) &= \mathcal{L}[h(t)] \end{aligned}$$

$H(s)$ est appelé « **fonction de transfert** » du système. La réponse en fréquence s'obtient à partir de $H(s)$ en posant $s = j\omega = j2\pi f$.

Relations entrée–sortie des systèmes LIT



Un système LIT peut être indifféremment décrit par les relations entrée–sortie suivantes :

- Dans le domaine temporel : convolution par la réponse impulsionnelle $h(t)$

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

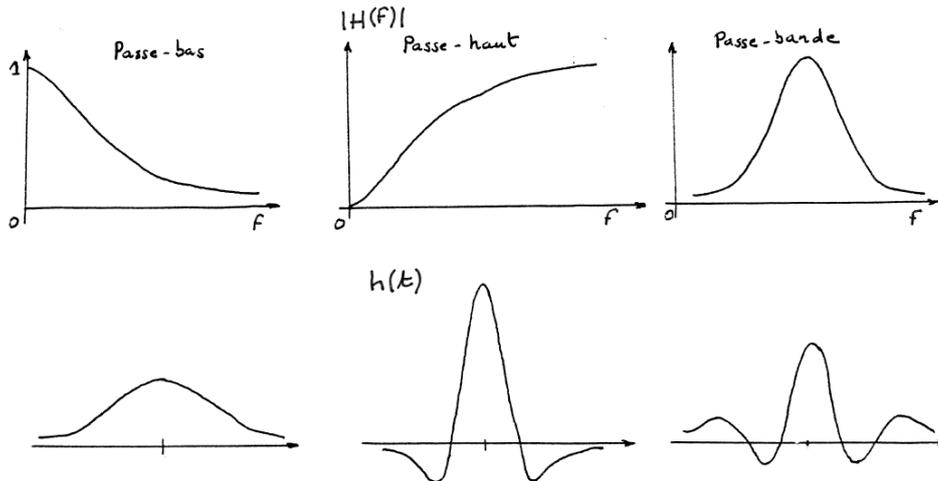
- Dans le domaine fréquentiel (Fourier) : multiplication par la réponse en fréquence $H(f)$

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$

- Dans le domaine défini par la transformée Laplace : multiplication par la fonction de transfert $H(s)$

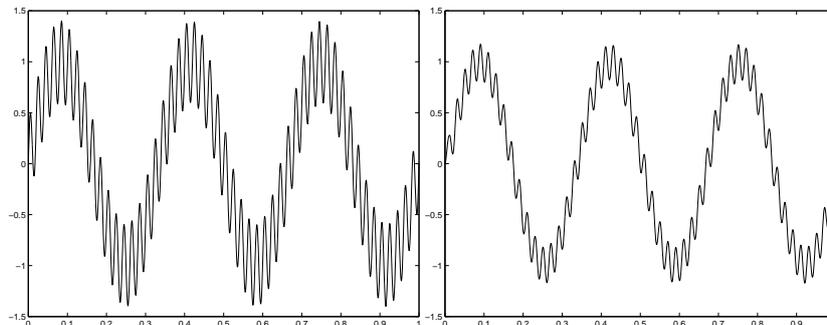
$$Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

Les grandes classes de systèmes LIT

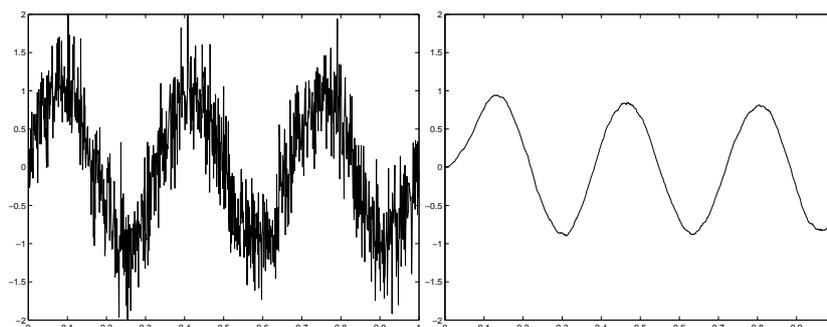


Les grandes classes :

- **Systèmes passe-bas** : coupure des hautes fréquences, lissage, moyennage, atténuation du bruit.
- **Systèmes passe-haut** : accentuation des hautes fréquences, coupure des basses fréquences.
- **Systèmes passe-bande** : sélection de bandes fréquentielles spécifiques.



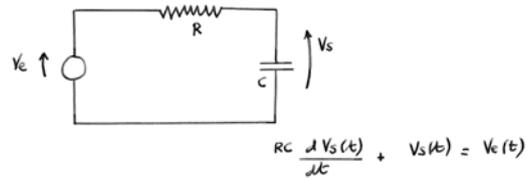
Filtrage passe-bas de la somme de deux sinusoides



Filtrage passe-bas d'une sinusoïde bruitée



Exemple 1 : Systèmes du 1^{er} ordre



- Relation entrée–sortie :

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

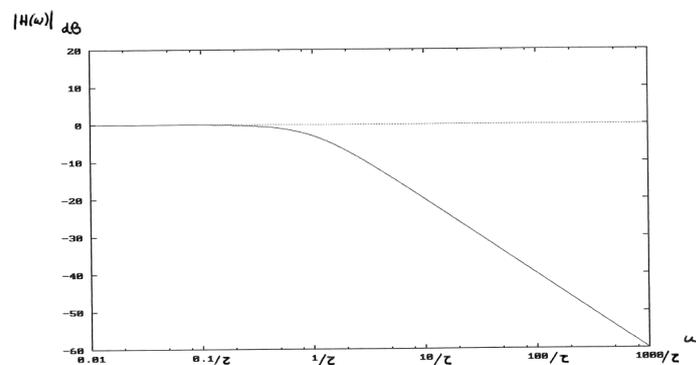
- Réponse en fréquence :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

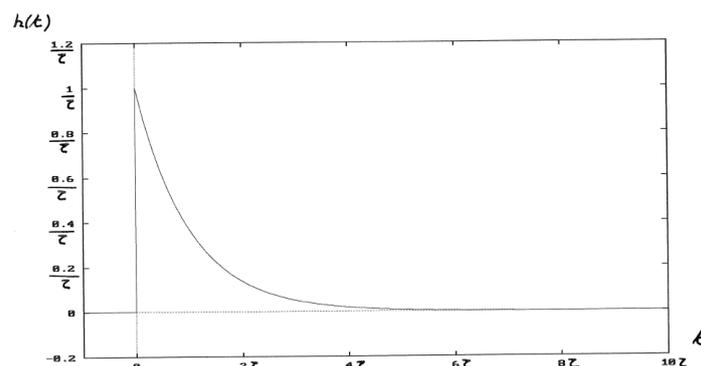
- décroissance asymptotique :
 - 20 dB / décade
 - 6 dB / octave.

- Réponse impulsionnelle :

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$$



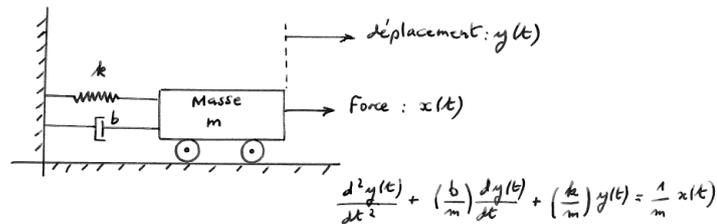
Réponse en fréquence d'un système du 1^{er} ordre



Réponse impulsionnelle d'un système du 1^{er} ordre



Exemple 2 : Systèmes du 2^{ème} ordre



- Relation entrée–sortie :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t)$$

- Réponse en fréquence :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{\omega_n^2}{(j\omega - c_1)(j\omega - c_2)}$$

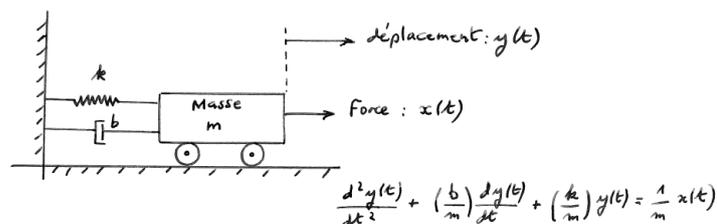
ξ : coefficient d'amortissement

ω_n : pulsation propre

$$c_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$c_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

décroissance asymptot. : -40 dB / décade , -12 dB / octave.



- Réponse impulsionnelle :

- si $0 < \xi < 1$:

$$h(t) = \frac{\omega_n e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} [\sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t) u(t)]$$

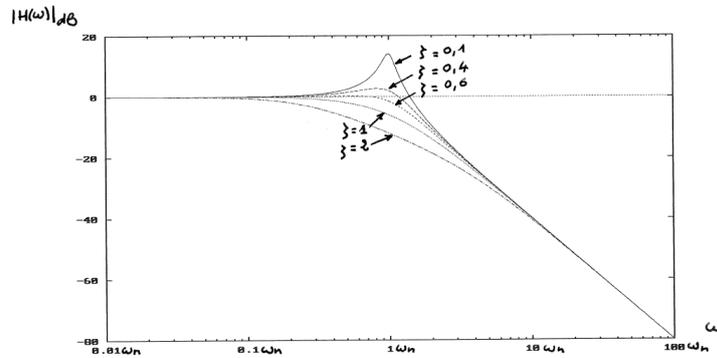
- si $\xi = 1$:

$$h(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} u(t)$$

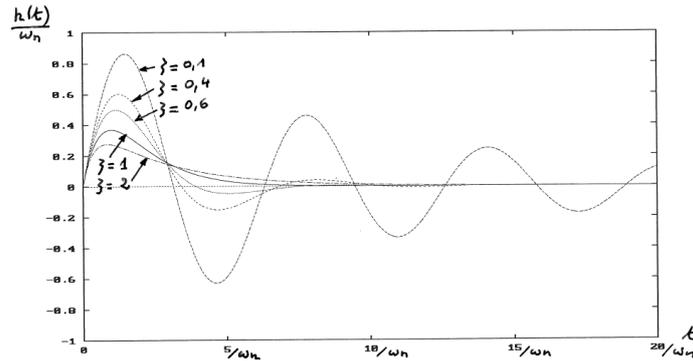
- si $\xi > 1$:

$$h(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} [e^{c_1 t} - e^{c_2 t}] u(t)$$





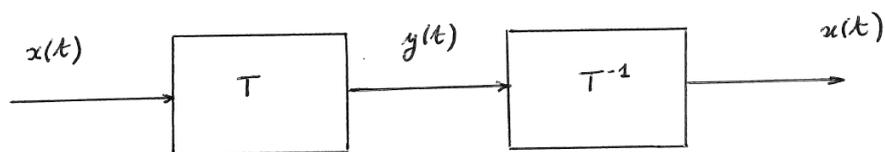
Réponse en fréquence d'un système du 2^{ème} ordre



Réponse impulsionnelle d'un système du 2^{ème} ordre



Inversion d'un système



Un système T est dit **inversible** si on peut trouver un système T^{-1} tel que la mise en cascade de T et de T^{-1} donne le système identité :

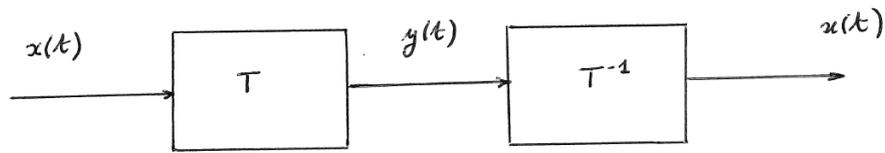
$$y(t) = T[x(t)]$$

$$z(t) = T^{-1}[y(t)] = T^{-1}[T[x(t)]] = x(t)$$

- Un système n'est inversible que si à des entrées distinctes correspondent des sorties distinctes.
- On montre que si le système T est LIT, le système inverse, s'il existe, est également LIT.



Inversion d'un système



- Si le système T est LIT, de réponse impulsionnelle $h(t)$, et s'il admet un système inverse, de réponse impulsionnelle $h_{-1}(t)$, celle-ci vérifie :

$$h(t) * h_{-1}(t) = \delta(t)$$

$$H(f) \cdot H_{-1}(f) = 1$$

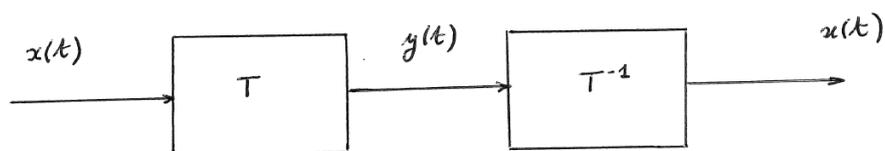
$$H_{-1}(f) = \frac{1}{H(f)} \text{ si } H(f) \neq 0$$

$\frac{1}{H(f)}$ est appelé « filtre inverse ».

- La plupart des systèmes sont non strictement inversibles car $H(f) = 0$ pour certaines fréquences.
- On sait malgré tout inverser (de façon approchée) de nombreux systèmes : on parle de « déconvolution ». Il existe de nombreuses méthodes de déconvolution.



Inversion d'un système



- Exemple de système non inversible : $y(t) = x^2(t)$
- Exemple de système inversible (retard de t_0) :

$$y(t) = x(t - t_0)$$

$$x(t) = y(t + t_0) \text{ non causal !}$$

$$h(t) = \delta(t - t_0)$$

$$h_{-1}(t) = \delta(t + t_0)$$

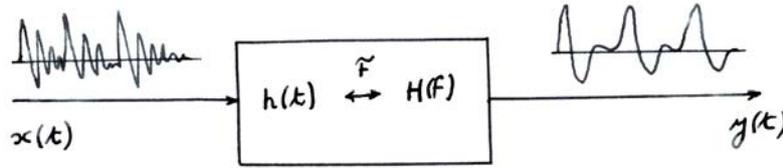
$$H(f) = \exp -j2\pi f t_0$$

$$H_{-1}(f) = \exp +j2\pi f t_0$$

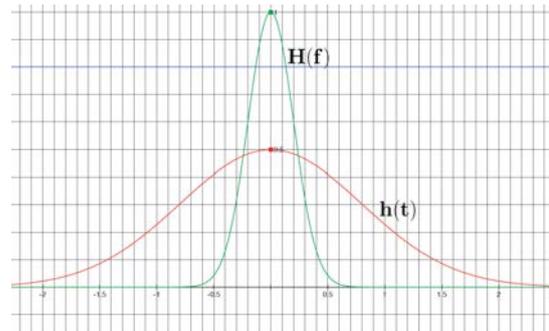
- Exemple de systèmes inversibles approximativement : les filtres de tous types (cf cours 2A et 3A Télécom PS).



Exemple : déconvolution pour un filtre passe-bas gaussien



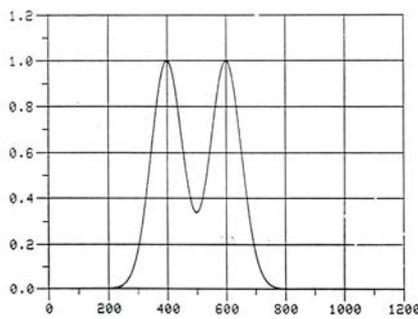
Déconvolution, dans le cas d'un filtre passe-bas gaussien : $h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$.



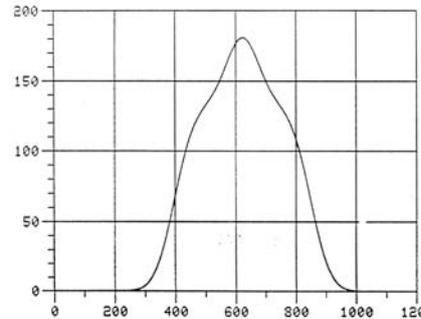
$\sigma = 0,8$

Réponse impulsionnelle du filtre $h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$

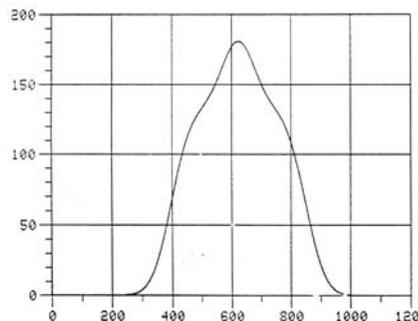
Réponse en fréquence du filtre $H(f) = \mathcal{F}[h(t)] = e^{-2\pi^2\sigma^2 f^2}$



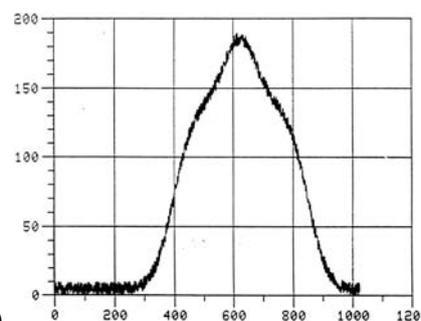
(a)



(b)



(c)



(d)

M. Bernard - Télécom Paris 1988

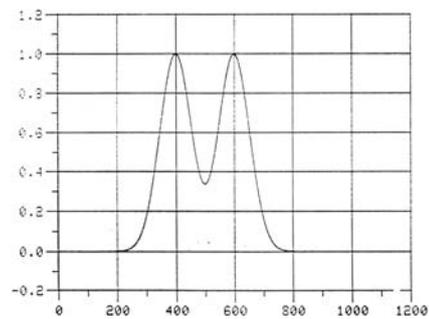
a) : signal original $x(t)$

b) : signal observé $y(t) = x(t) * h(t)$ (sans bruit)

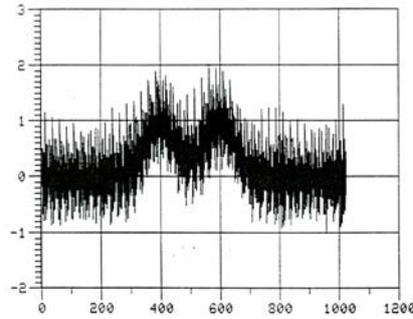
c) : signal observé $y(t)$ avec un bruit très faible d'écart-type : 0,1

d) : signal observé $y(t)$ avec un bruit d'écart-type : 5,0

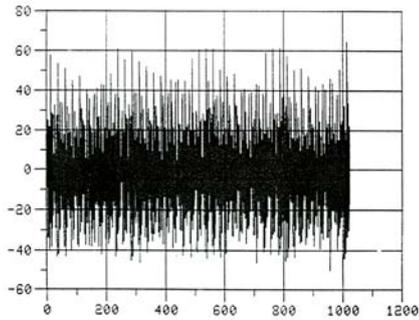




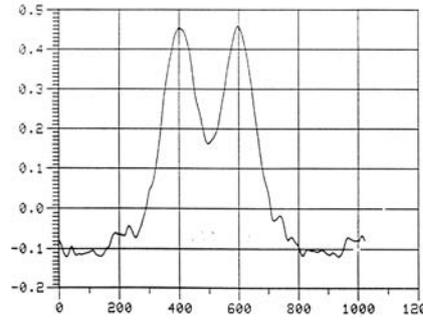
(a)



(b)



(c)



(d)

M. Bernard - Télécom Paris 1988

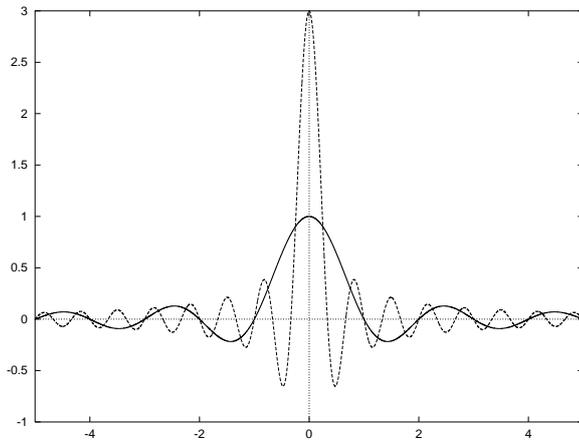
(a) : sortie du filtre inverse (cas $y(t)$ sans bruit)

(b) : sortie du filtre inverse (cas $y(t)$ avec bruit écart-type : 0,1)

(c) : sortie du filtre inverse (cas $y(t)$ avec bruit écart-type : 5,0)

(d) : sortie d'un filtre « de Wiener » prenant en compte le bruit (cas $y(t)$ avec bruit écart-type : 5,0)





INTRODUCTION AU TRAITEMENT DU SIGNAL

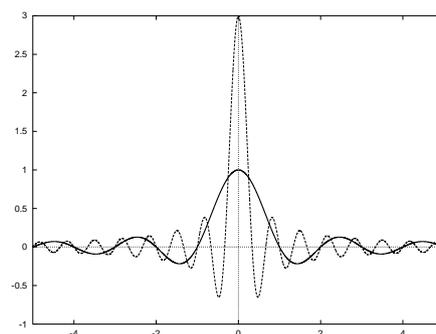
Partie IV



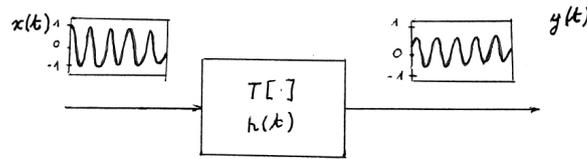
Partie IV

FILTRAGE

DES SIGNAUX ANALOGIQUES



Notion de filtre : généralités



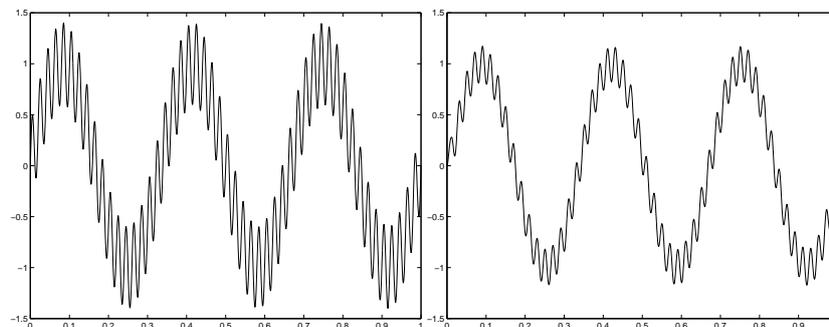
Un système linéaire invariant dans le temps est aussi appelé « **filtre** » car il laisse « passer » certaines fréquences et en « atténue » d'autres.

La fonction d'un filtre est d'éliminer les fréquences indésirables ou d'extraire les composantes fréquentielles utiles.

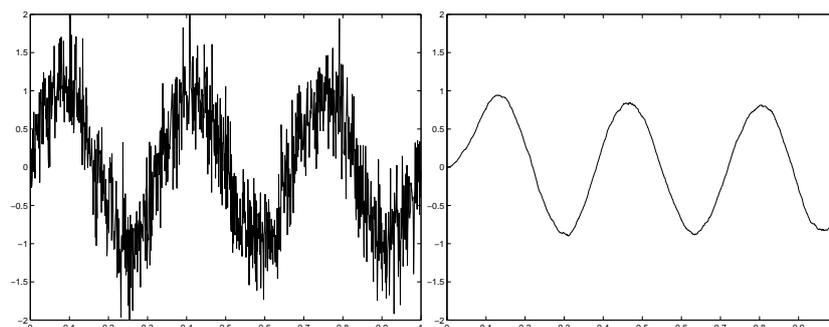
L'étude des filtres porte essentiellement sur leur **réponse en fréquence**, qui indique de quelle manière les différentes composantes fréquentielles du signal en entrée sont atténuées.

Exemple d'applications du filtrage :

- Atténuation du bruit d'un instrument de mesure (amélioration du rapport signal à bruit).
- Séparation de deux signaux dont les supports des spectres sont disjoints.
- Analyse spectrale par filtrage.



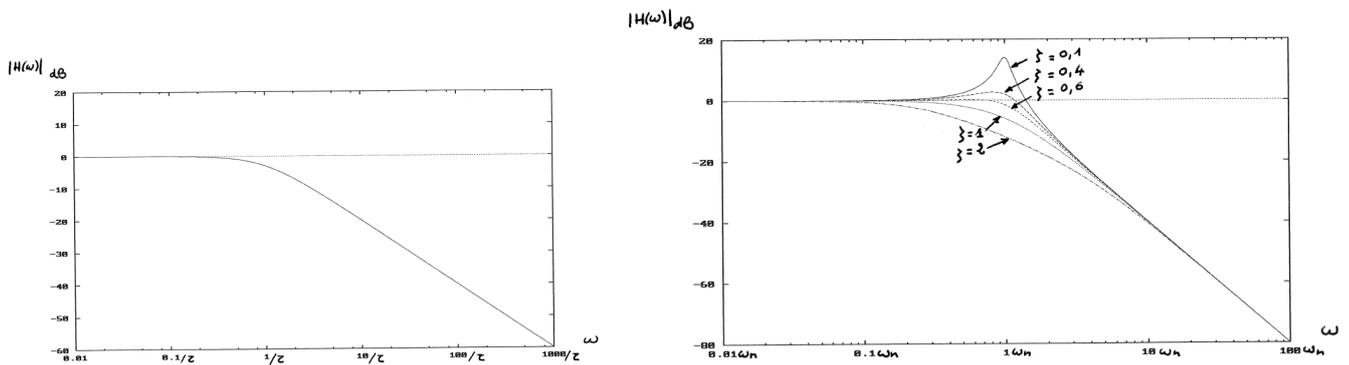
Filtrage passe-bas de la somme de deux sinusoides



Filtrage passe-bas d'une sinusoïde bruitée



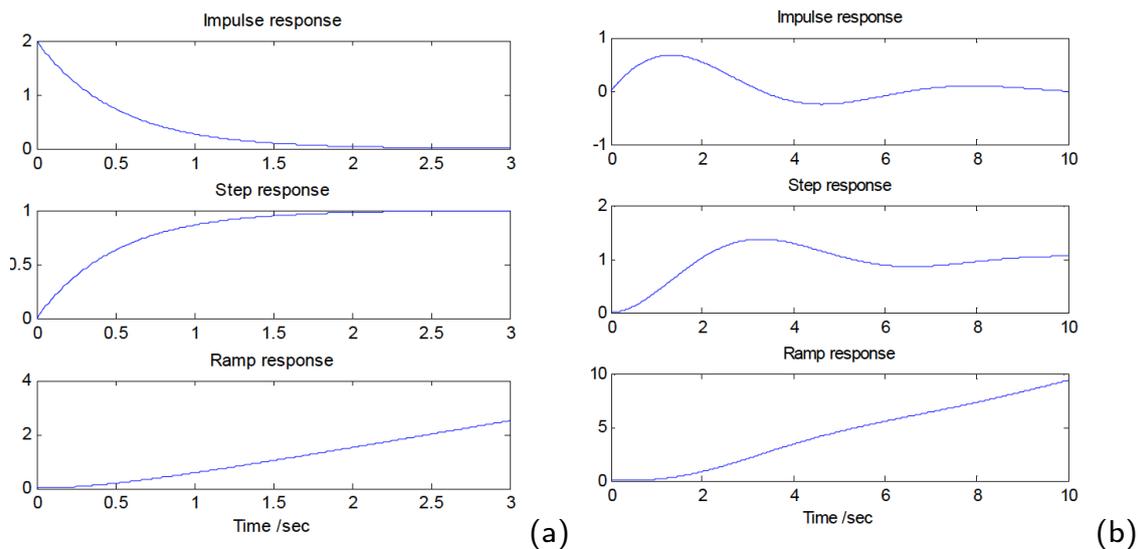
Analyse fréquentielle des filtres



Réponses en fréquence d'un système du 1^{er} et du 2^{ème} ordre

Analyse des caractéristiques de la réponse en fréquence $H(f)$ ou de la fonction de transfert $H(s)$ du filtre.

Analyse temporelle des filtres



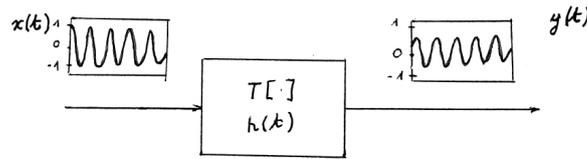
Réponses transitoires d'un système du 1^{er} ordre (a) et du second ordre (b)

d'après Tim Woo UST Hong Kong - ELEC 215

Elle passe par l'analyse de la **réponse impulsionnelle** (impulse response), réponse à une impulsion de Dirac. On s'intéresse aussi :

- à la **réponse indicielle** : réponse du filtre à un échelon unité $u(t)$ (step response),
- à la **réponse à une rampe** (ramp response).

Filtres réalisables, sans distorsions, idéaux



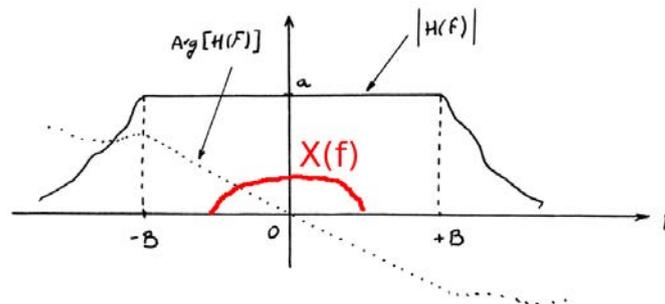
- **Filtre** = système LIT.
- **Filtre réalisable** = filtre causal et stable.
- **Bande passante** : bande de fréquences que le filtre "laisse passer" (pas d'atténuation)
- **Filtre sans distorsions** : Un filtre sans distorsion ne modifie pas la **forme** du signal qui le traverse lorsque celui-ci est dans la bande passante du filtre.
 - réponse d'un filtre à une sinusoïde : jamais de distorsion

$$T[\cos(2\pi f_0 t + \Phi)] = |H(f_0)| \cos(2\pi f_0 t + \Phi + \text{Arg } H(f_0))$$

- réponse d'un filtre à un signal non sinusoïdal : en général le filtre introduit des distorsions. Pour qu'il n'y ait pas de distorsion, le gain du filtre doit être constant dans la bande passante et sa phase doit être linéaire.



Filtres réalisables, sans distorsions, idéaux



- **Filtre sans distorsions** :
 - Si $x(t)$ est dans la bande passante (càd $X(f) = 0, f \notin [-B, +B]$) :

$$y(t) = a x(t - t_0) ;$$

$$\Rightarrow Y(f) = a X(f) e^{-j2\pi f t_0} \text{ pour } f \in [-B, +B]$$

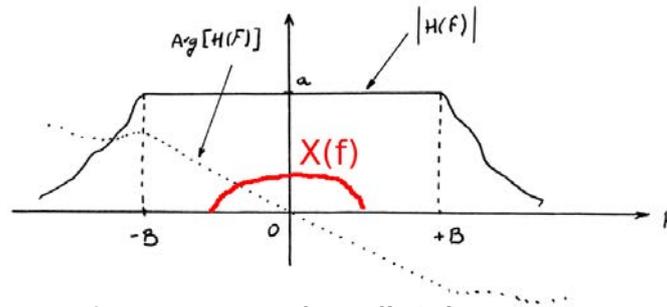
$$\text{gain : } |H(f)| = a = \text{Cte} \text{ pour } f \in [-B, +B]$$

$$\text{phase : } \text{Arg}[H(f)] = -2\pi f t_0 \text{ pour } f \in [-B, +B]$$

- Un tel filtre présente donc **un gain constant et une phase linéaire (en f) dans la bande passante**.
 - si gain non constant : «distorsion en amplitude»
 - si phase non linéaire : «distorsion de phase»



Temps de propagation de groupe



- Un filtre sans distorsion doit avoir une **phase linéaire**
- Soit un filtre de réponse en fréquence $H(f) = |H(f)|e^{j\text{Arg}[H(f)]} = |H(f)|e^{j\Phi(f)}$
On définit le **temps de propagation de groupe** :

$$\tau_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(f)}{df}$$

- Si le filtre est à phase linéaire : $\Phi(f) = -2\pi ft_0$ pour $f \in [-B, +B]$ le temps de propagation de groupe est **constant**, égal au retard introduit par le système :

$$\tau_g(f) = t_0$$

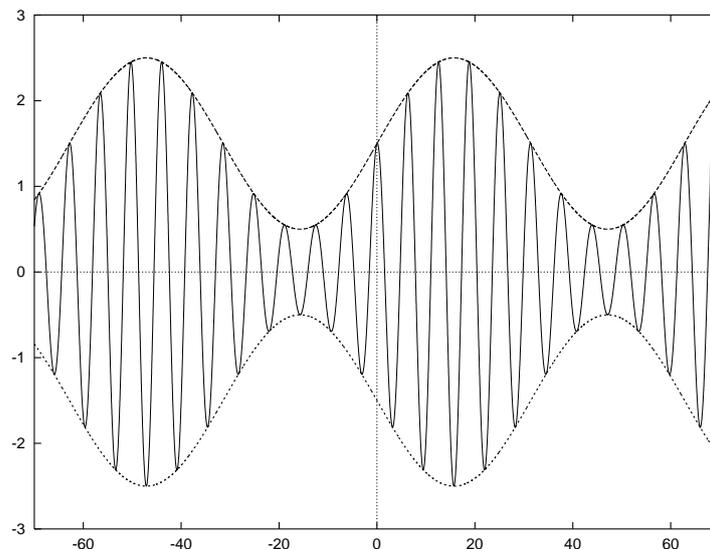
- Si la phase n'est pas linéaire, τ_g varie en fonction de la fréquence (distorsion).

Le temps de propagation de groupe est important en audio. Les variations maximales admissibles, au-delà desquelles les distorsions sont audibles sont les suivantes :

Fréquence	500 Hz	1 kHz	2 kHz	4 kHz	8 kHz
$\Delta\tau_g \text{ max}$	3,2 ms	2 ms	1 ms	1,5 ms	2 ms



Temps de propagation de groupe, temps de propagation de phase : une interprétation



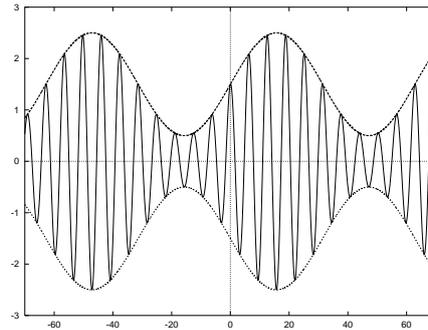
Signal quasi-sinusoidal de fréquence f_0 et son enveloppe $a(t)$

On considère un signal quasi-sinusoidal :

$$x(t) = a(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

dont l'amplitude (enveloppe) $a(t)$ varie lentement par rapport à la fréquence f_0 .





- Si on filtre le signal quasi-sinusoïdal :

$$x(t) = a(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

par un filtre de réponse $H(f)$ (dont la bande passante contient f_0), la sortie du filtre s'écrit :

$$y(t) \simeq |H(f_0)| a(t - \tau_g(f_0)) \cos(2\pi f_0(t - \tau_\phi(f_0)) + \theta)$$

avec :

$$\tau_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(f)}{df} \quad ; \quad \tau_\phi(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\Phi(f)}{f}$$

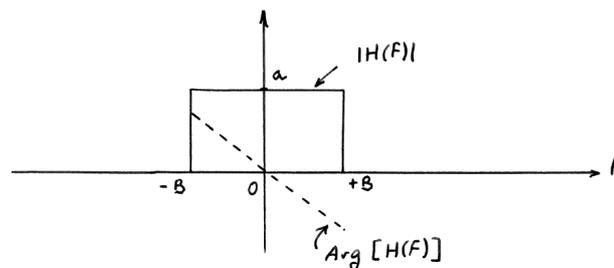
$\tau_g(f)$ est le temps de propagation de groupe (retard de groupe)

$\tau_\phi(f)$ est le temps de propagation de phase (retard de phase)



Filtres idéaux (1)

- **Filtre idéal** : un filtre idéal est un filtre sans distorsion dans la bande passante, qui atténue parfaitement les fréquences en-dehors de la bande passante.
- **le filtre passe-bas idéal**



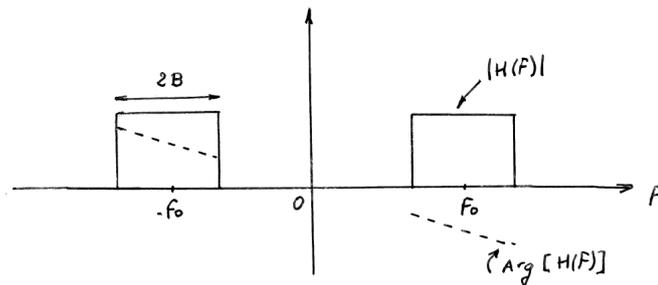
$$H(f) = a \text{rect}_{2B}(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

$$h(t) = 2aB \text{sinc}[2B(t - t_0)]$$



Filtres idéaux (2)

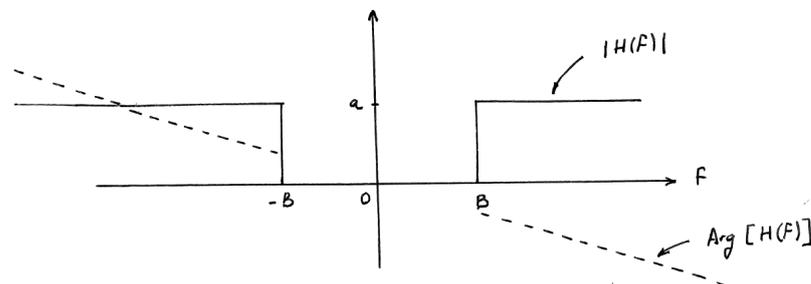
- le filtre passe-bande idéal



$$H(f) = a [\text{rect}_{2B}(f - f_0) + \text{rect}_{2B}(f + f_0)] e^{-j2\pi f t_0}$$
$$h(t) = 4aB \text{sinc}[2B(t - t_0)] \cos[2\pi f_0(t - t_0)]$$

Filtres idéaux (3)

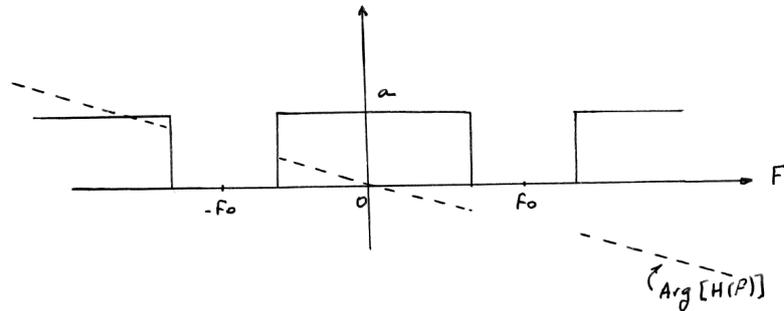
- le filtre passe-haut idéal



$$H(f) = a [1 - \text{rect}_{2B}(f)] e^{-j2\pi f t_0}$$
$$h(t) = a [\delta(t - t_0) - 2B \text{sinc}[2B(t - t_0)]]$$

Filtres idéaux (4)

- le filtre coupe-bande (réjecteur de bande) idéal

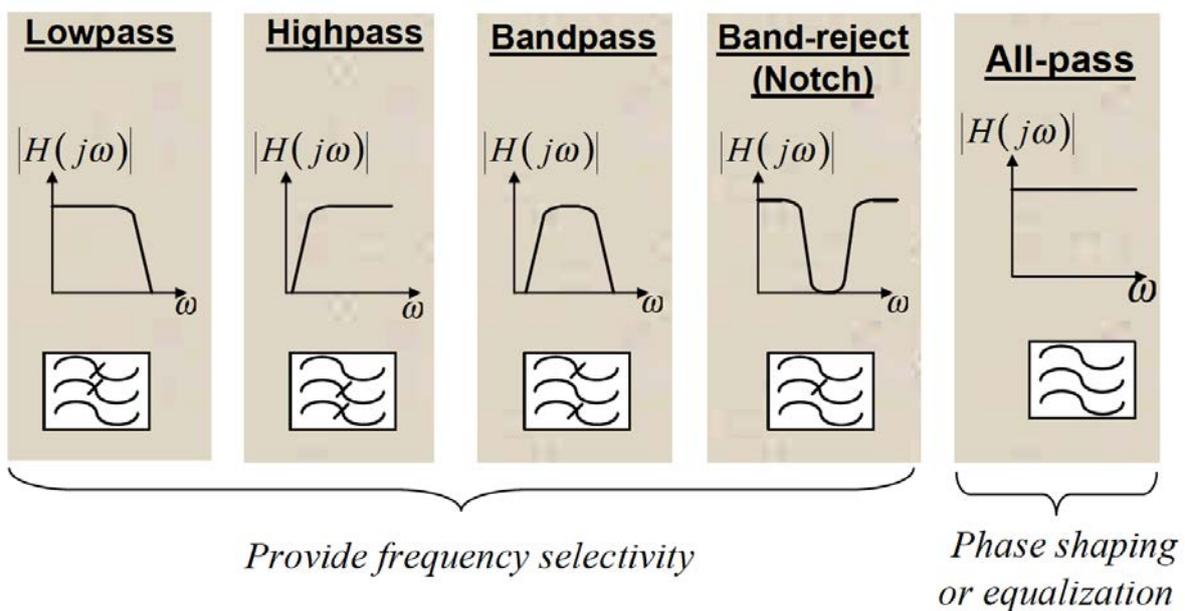


$$H(f) = a [1 - \text{rect}_{2B}(f - f_0) - \text{rect}_{2B}(f + f_0)] e^{-j2\pi f t_0}$$

$$h(t) = a [\delta(t - t_0) - 4B \text{sinc}[2B(t - t_0)] \cos[2\pi f_0(t - t_0)]]$$



Nomenclature et symboles des filtres classiques



Filtres réalisables - gabarit

Pour être réalisable un filtre doit être causal et stable.

- Condition de stabilité :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < +\infty$$

- Conditions de causalité :

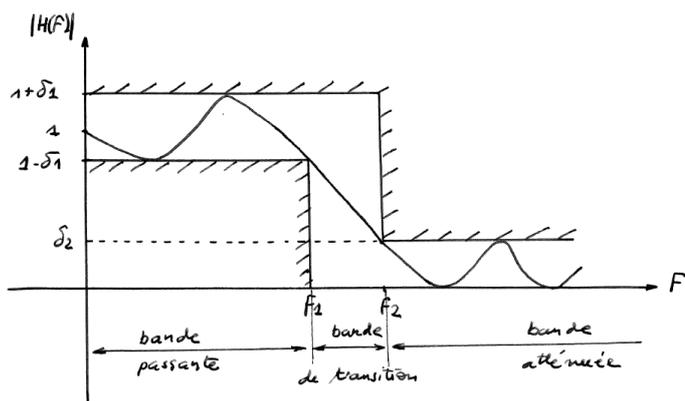
$$h(t) = 0, \quad t < 0$$

ou (condition de Paley-Wiener) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log |H(f)||}{1 + f^2} df < \infty$$

Les filtres idéaux ne sont donc pas réalisables car non causaux (condition de Paley-Wiener). On ne peut donc que les réaliser de façon approchée, en introduisant des tolérances par rapport à la réponse en fréquence idéale (spécification d'un *gabarit*).

Filtres réalisables - gabarit

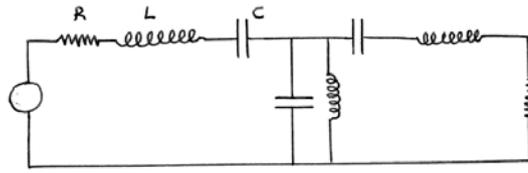


- δ_1 : ondulation en bande passante
- δ_2 : ondulation en bande atténuée
- f_1 : fréquence de coupure
- $f_2 - f_1$: largeur de la bande de transition

Gabarit de filtre passe-bas normalisé

Problème de la synthèse des filtres : construction de fonctions $H(f)$ entrant dans le gabarit donné et conduisant à un filtre réalisable.

Filtres définis par des fractions rationnelles (1)



On adopte souvent, pour la fonction de transfert $H(s)$ du filtre à synthétiser une fraction rationnelle en s :

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_Ns^N}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_Ms^M}$$

▷ Ordre du filtre : $M - N$.

▷ Les $s = z_i$, racines de $\sum_{k=0}^N b_k s^k$ sont les zéros du filtre.

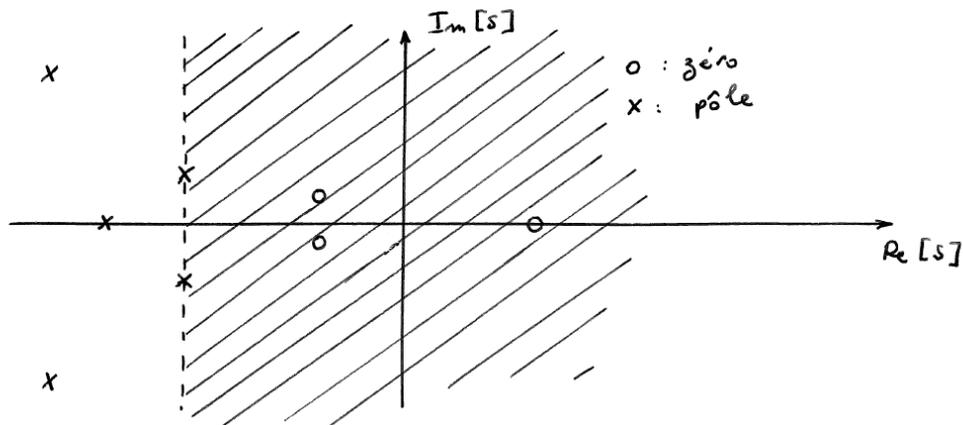
▷ Les $s = p_i$, racines de $\sum_{k=0}^M a_k s^k$ sont les pôles du filtre.

!! il peut y avoir des pôles ou zéros multiples.

$$H(s) = \frac{b_N}{a_M} \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_N)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_M)}$$



Filtres définis par des fractions rationnelles (2)



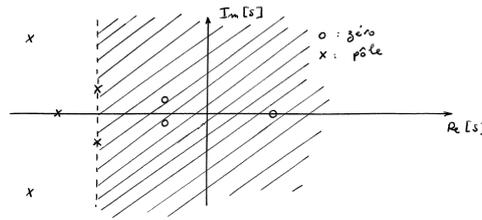
Constellation des pôles et zéros

Le filtre est réalisable si :

- il est stable : $\Rightarrow M > N$ et tous les pôles sont à partie réelle strictement négative ;
- il est causal : \Rightarrow région de convergence de $H(s)$ est la région située à droite du pôle le plus à droite.



Filtres définis par des fractions rationnelles (3)



La réponse impulsionnelle causale associée à une constellation de pôles et zéros s'obtient en **décomposant la fraction rationnelle $H(s)$ en éléments simples** :

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{b_N}{a_M} \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_N)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_M)} \\
 &= \sum_{k=0}^Q \alpha_k s^k + \sum_{i=1}^R \left[\sum_{j=1}^{M_i} \frac{\beta_{ij}}{(s - p_i)^j} \right]
 \end{aligned}$$

où $Q = N - M$, R est le nombre de pôles différents, M_i est l'ordre du pôle p_i ($M = \sum_{i=1}^R M_i$).

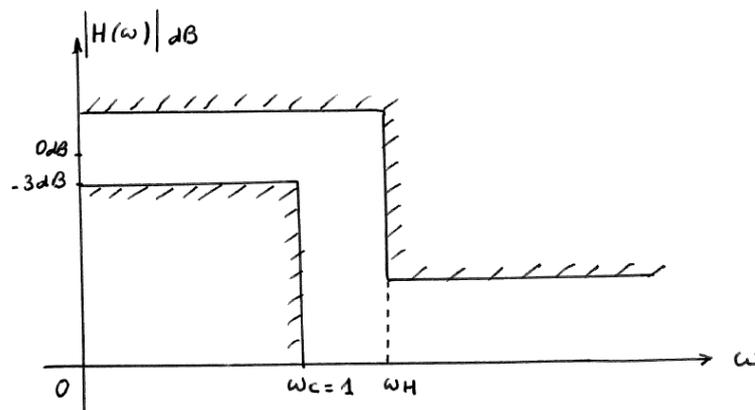
On en déduit **la réponse impulsionnelle du filtre** (par \mathcal{L}^{-1}) :

$$h(t) = \sum_{k=0}^Q \alpha_k \frac{d^k}{dt^k} \delta(t) + \sum_{i=1}^R \left[\sum_{j=1}^{M_i} \frac{\beta_{ij}}{(j-1)!} t^{j-1} \right] e^{p_i t} u(t)$$



Filtre passe-bas normalisé

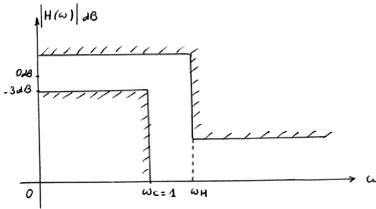
- Un lieu de représentation usuel de la fonction de transfert (réponse en fréquence) $H(\omega)$ d'un filtre est le plan de Bode dans lequel on représente :
 - le module (en dB) : $20 \log |H(\omega)|$ en fonction de ω (échelle log. pour ω) ;
 - la phase : $\text{Arg}[H(\omega)]$ en fonction de ω (échelle log. pour ω).
- Filtre passe-bas normalisé



$$\omega_c = 1 : \text{pulsation de coupure à } -3 \text{ dB } (|H(\omega_c)| = \frac{|H(0)|}{\sqrt{2}})$$



Transformations en fréquence



Il est possible d'obtenir les filtres classiques (passe-bas, passe-haut, passe-bande, etc.) à partir d'un filtre passe-bas normalisé $H(s)$, par transformation sur la variable s .

- Filtre passe-bas de pulsation de coupure ω_c : $H(s) \rightarrow H\left(\frac{s}{\omega_c}\right)$

- Filtre passe-haut de pulsation de coupure $\omega_c = 1$: $H(s) \rightarrow H\left(\frac{1}{s}\right)$

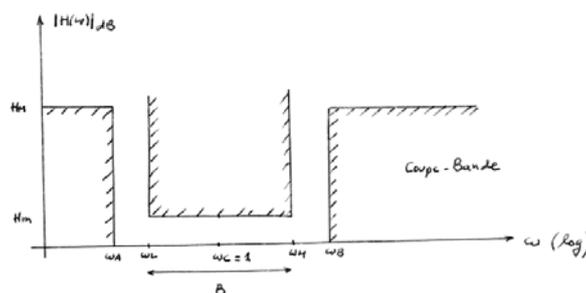
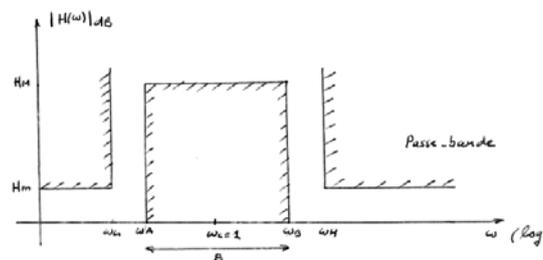
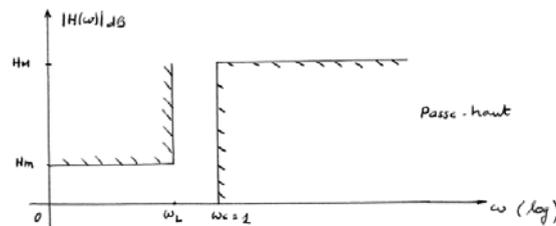
- Filtre passe-bande symétrique de largeur de bande B centré sur la pulsation $\omega_c = 1$:

$$H(s) \rightarrow H\left(\frac{1}{B}\left(s + \frac{1}{s}\right)\right)$$

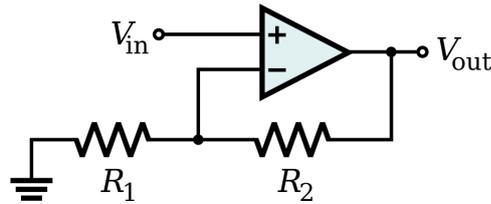
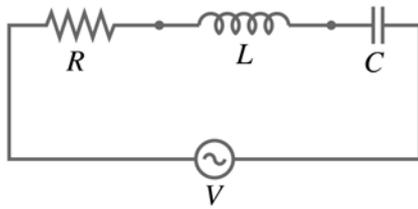
- Filtre coupe-bande dont la bande coupée de largeur B est centrée sur $\omega_c = 1$.

$$H(s) \rightarrow H\left(\frac{1}{\frac{1}{B}\left(s + \frac{1}{s}\right)}\right)$$

Transformations en fréquence



Filtres analogiques classiques

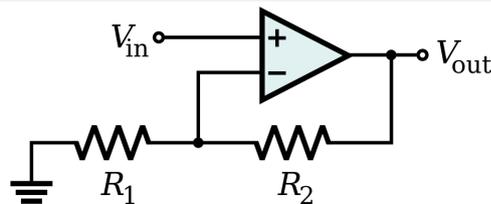
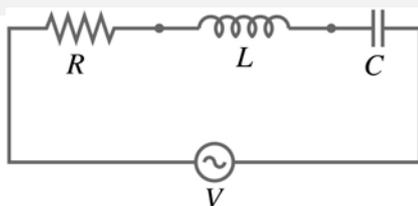


Familles de filtres analogiques classiques de fonctions de transfert rationnelles qui offrent des approximations réalisables des différentes classes de filtre.

Références :

- 1 Filtrage et filtres électriques, Avant-propos. Référence E110, Techniques de l'Ingénieur, 2008.
- 2 Fonctions de transfert des filtres électriques. Référence E120, Techniques de l'Ingénieur, 2009.
- 3 R.W. Daniels, *Approximation methods for electronic filter design*, Mc Graw-Hill, 1974.
- 4 E. Chritian and E. Eisenmann, *Filter design tables and graphs*, John Wiley and Sons, 1966.
- 5 A.I. Zverev, *Handbook of filter synthesis*, John Wiley and Sons, 1967.
- 6 D.E. Johnson, J.R. Johnson and H.P. Moore, *A handbook of active filters*, Prentice Hall, 1980.

Technologies de réalisation

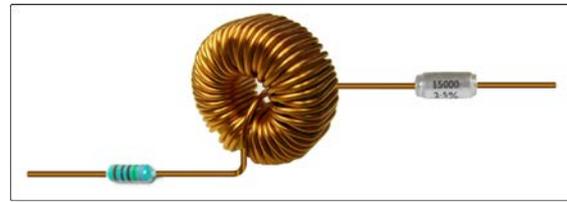
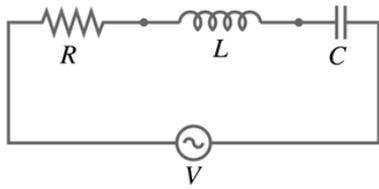


Elles sont variées et dépendent de la nature des signaux, du domaine de fréquence et de l'objectif du filtrage. Pour les filtres électriques (électroniques) :

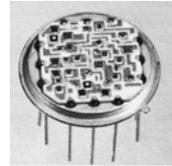
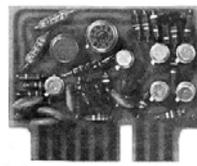
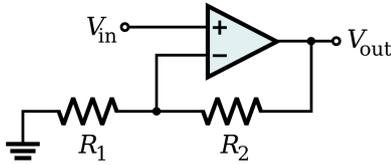
- 1920-1960 : filtres passifs à composants R, L, C discrets (f élevées)
- 1960-1970 : filtres actifs discrets (avec amplificateurs opérationnels) ($f < 50\text{MHz}$)
- 1970- : filtres actifs en circuits intégrés (boîtier DIP, ASIC)
- 1980 - : filtres actifs à capacités commutées ($f < 50\text{MHz}$)
- 1985- : filtres numériques ($f < 400\text{MHz}$)

Pour les hyperfréquences :

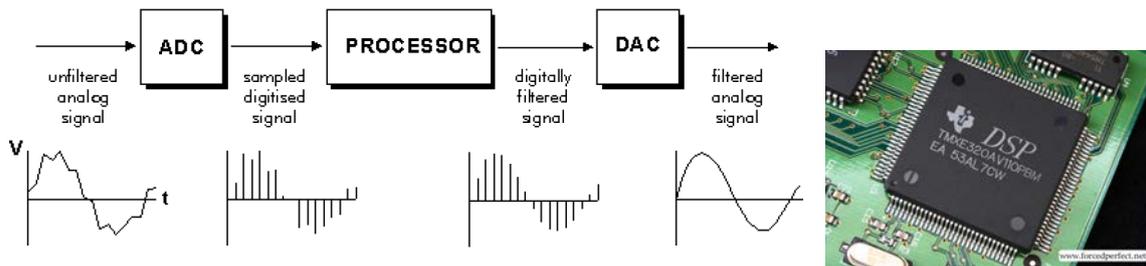
- filtres à ondes de surface et à ondes de volume ($100\text{MHz} < f < 3\text{GHz}$)
- filtres LC à éléments localisés
- filtres à lignes couplées ($f < 10\text{GHz}$)
- filtres à cavités ou guides d'ondes ($f > 10\text{GHz}$).
- ...



Filtres à composants R, L, C discrets (©D. Renneke et Creative Commons)



Filtres à amplificateurs opérationnels (© Creative Commons)



Filtre numérique à DSP (©Horacio Munguia USON et Texas Instruments)



Filtres analogiques classiques (1)

• Les filtres de Butterworth :

- filtres « polynomiaux » dont les pôles sont situés sur le cercle unité ;
- $++$ réponse en fréquence très plate dans la bande passante ;
- $-$ passage lent entre bande passante et bande atténuée (filtre peu « raide »).
- $-$ phase non linéaire

- fonction de transfert : $|H(s)|^2 \Big|_{s = j\omega} = \frac{1}{1 + \omega^{2n}}$ où n est l'ordre du filtre.

▷ Pour n pair :

$$H(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} [s^2 + 2 \cos \theta_k s + 1]}$$

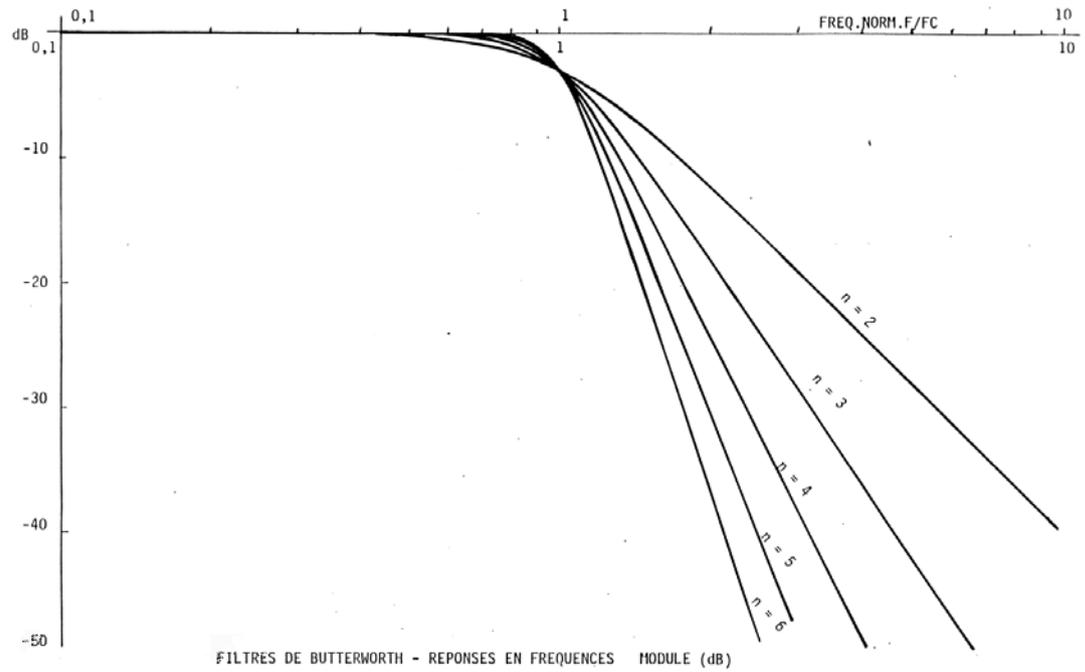
avec : $\theta_k = \pi \left(\frac{2k-1}{2n} \right)$

▷ Pour n impair :

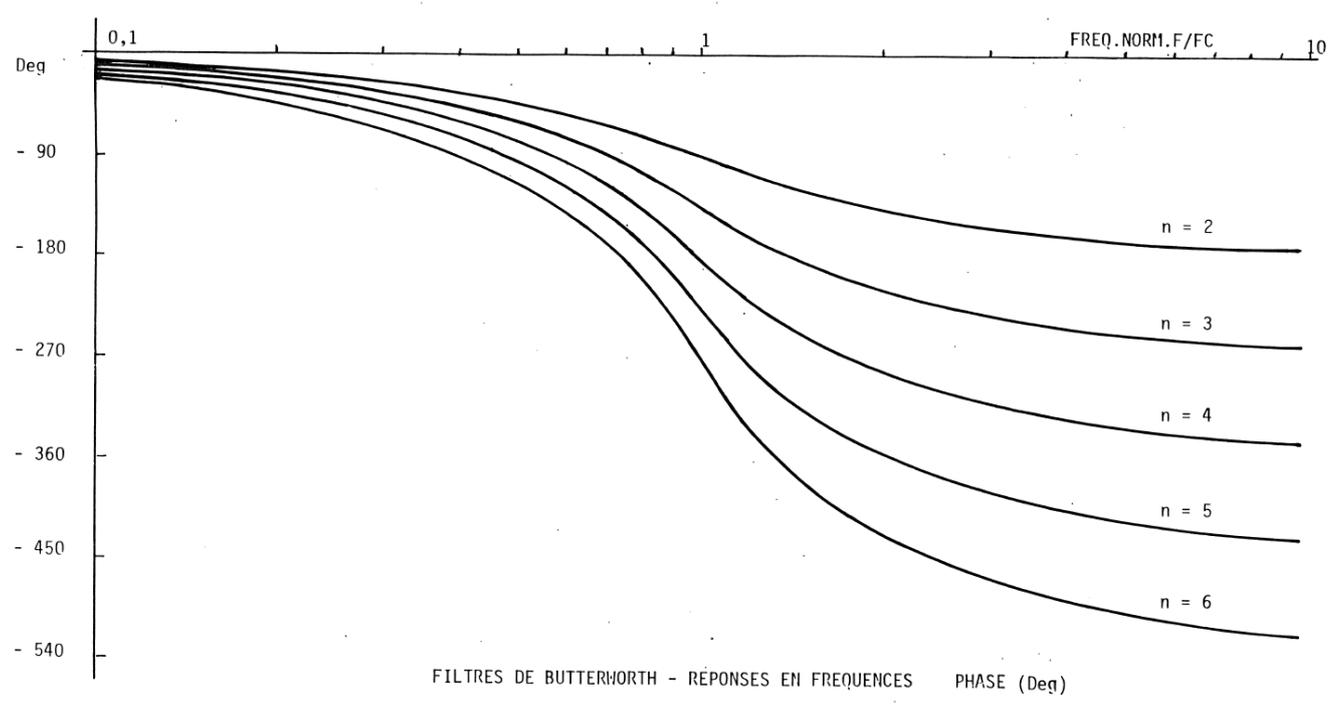
$$H(s) = \frac{1}{(s + 1) \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} [s^2 + 2 \cos \theta_k s + 1]}$$

avec : $\theta_k = \pi \frac{k}{n}$





avec l'aimable autorisation de Guy Cazuguel, professeur, Télécom Bretagne



Filtres analogiques classiques (2)

• Les filtres de Tchebycheff :

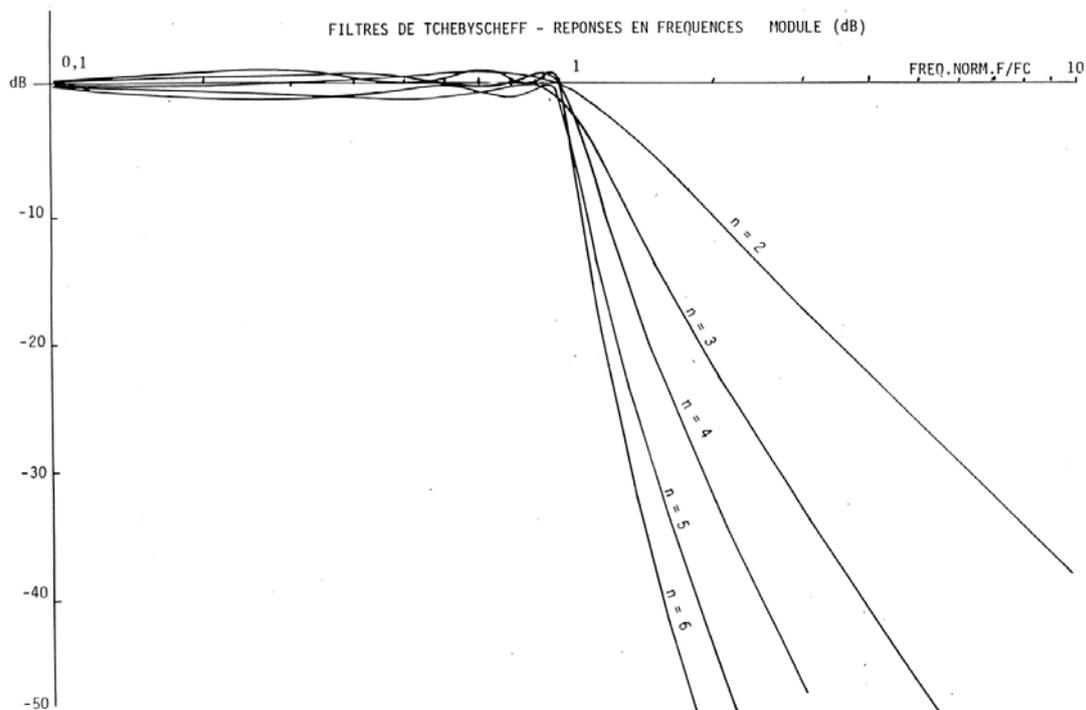
- filtres « polynomiaux » dont les pôles sont situés sur une ellipse ;
- $\boxed{++}$ atténuation rapide en-dehors de la bande passante ;
- $\boxed{++}$ ordre nécessaire moins élevé pour un gabarit donné que Butterworth ;
- $\boxed{+-}$ ondulations d'amplitude constante dans la bande passante ;
- fonction de transfert :

$$\left| H(s) \right|^2 \Big|_{s = j\omega} = \frac{1}{1 + \epsilon [T_n(\omega)]^2}$$

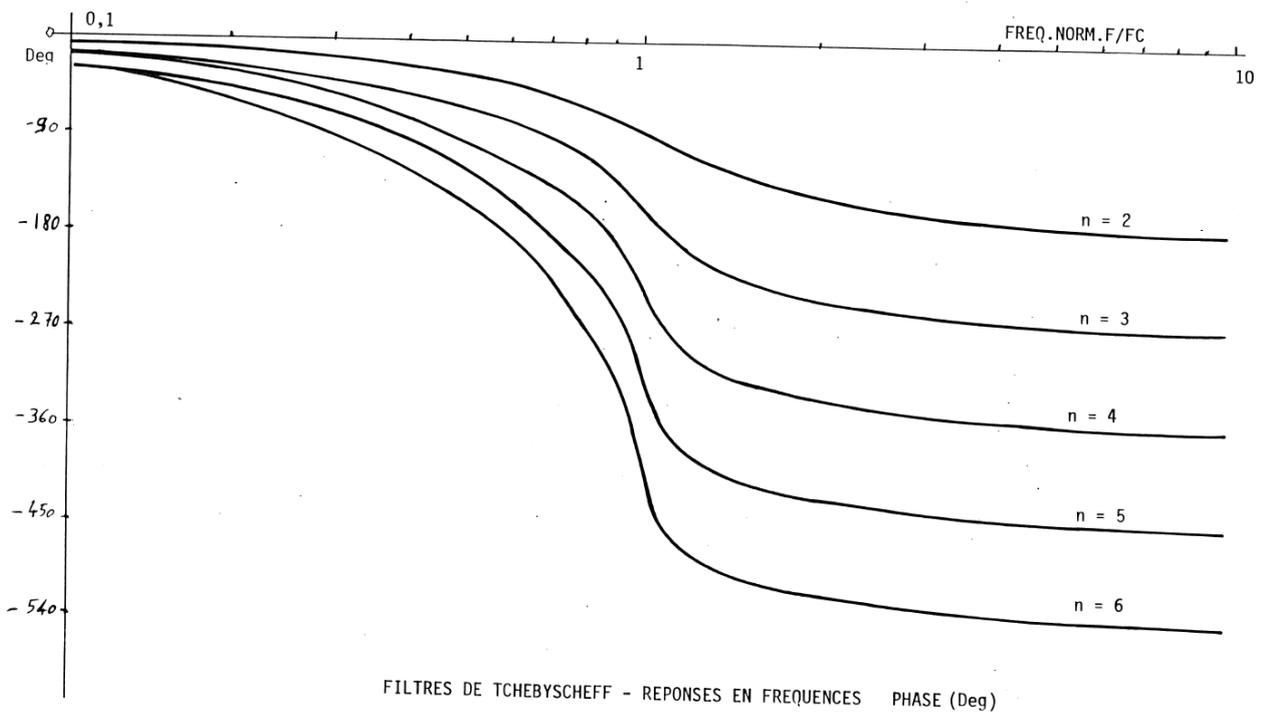
où T_n est le polynôme de Tchebycheff d'ordre n qui se construit par :

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

$\epsilon \ll 1$ contrôle les oscillations dans la bande ($H(s)$ oscille entre 1 et $\frac{1}{\sqrt{\epsilon+1}}$).

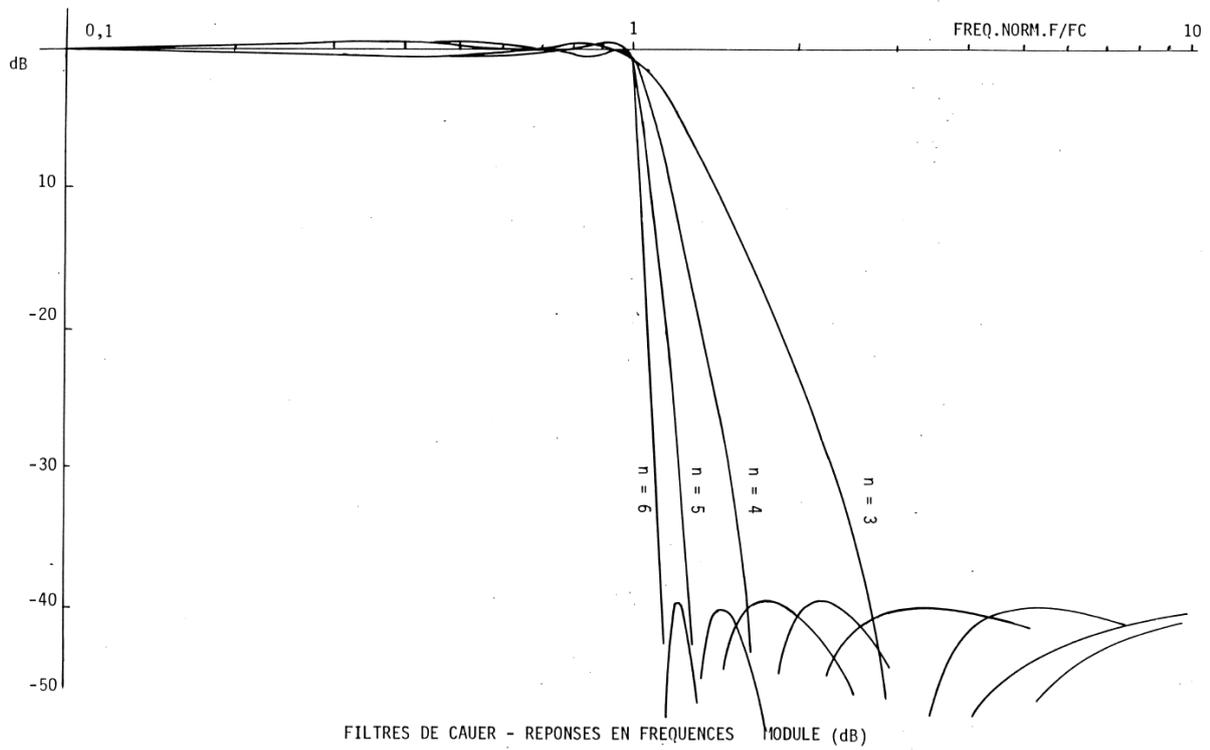


avec l'aimable autorisation de Guy Cazuguel, professeur, Télécom Bretagne

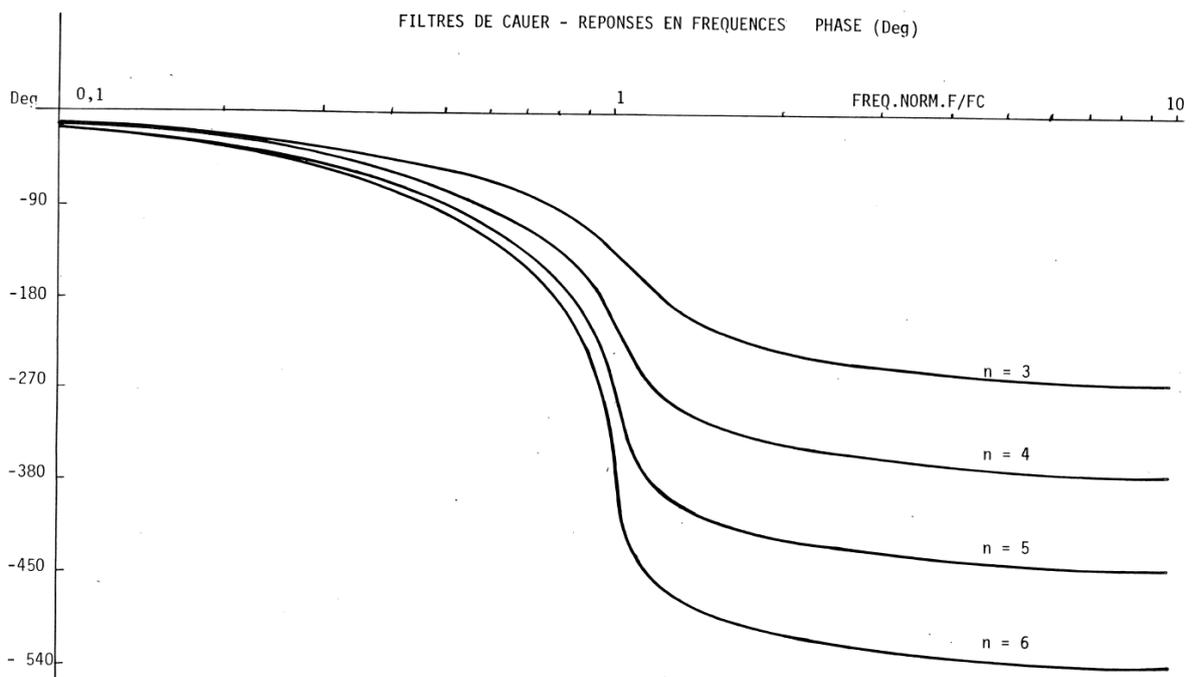


Filtres analogiques classiques (3)

- **Les filtres de Tchebycheff inverses :**
réponse plate dans la bande passante et ondulations constantes dans la bande atténuée.
- **Les filtres elliptiques (ou de Cauer) :**
 - fonction de transfert rationnelle ;
 - ++ filtre de très faible ordre pour un gabarit donné ;
 - ++ coupure plus raide que Tchebycheff ;
 - +- ondulations constantes dans la bande passante et atténuée.

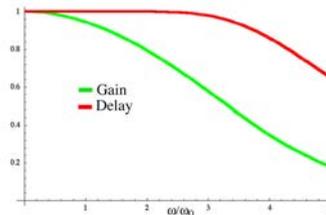


avec l'aimable autorisation de Guy Cazuguel, professeur, Télécom Bretagne



Filtres analogiques classiques (4)

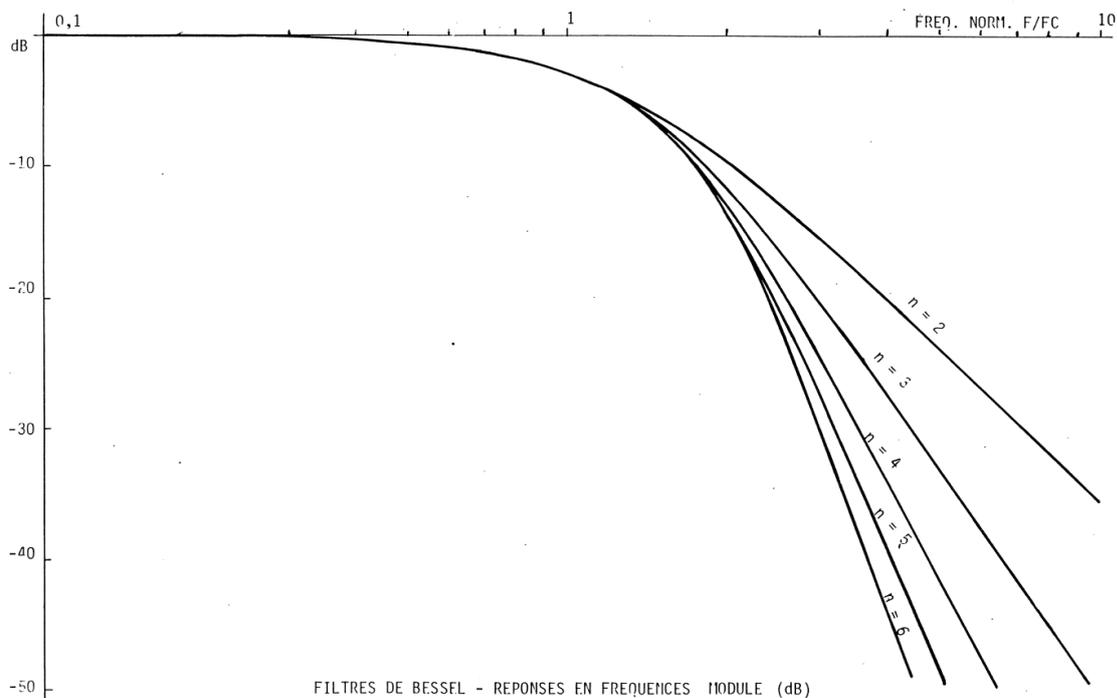
- Dans tous les filtres précédents, on contrôle le gain de la réponse en fréquence, mais pas la phase, qui est **fortement non linéaire** (\Rightarrow temps de propagation de groupe non constant \Rightarrow distorsions de phase).
- Il n'est pas possible d'obtenir une phase parfaitement linéaire avec une fonction de transfert = fract. rationnelle. En effet une phase linéaire correspond à : $H(f) = |H(f)| \exp -j2\pi ft_0$ (retard pur de t_0 dans la bande passante) qui n'est pas réalisable avec une fract. rationnelle.
- **Les filtres de Bessel :**



Gain et temps de propagation de groupe - Filtre de Bessel d'ordre 4 (passe-bas)

Les filtres de Bessel sont des **approximations sous forme de fractions rationnelles de filtre à phase linéaire dans la bande passante**. Ils font intervenir des polynômes de Bessel. Ils conduisent à un temps de propagation de groupe le plus plat possible dans la bande passante.

- $\boxed{++}$ filtres à phase *quasi*-linéaire;
- $\boxed{-}$ filtres peu raides.

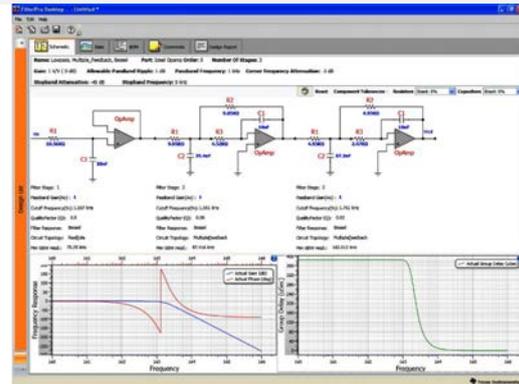
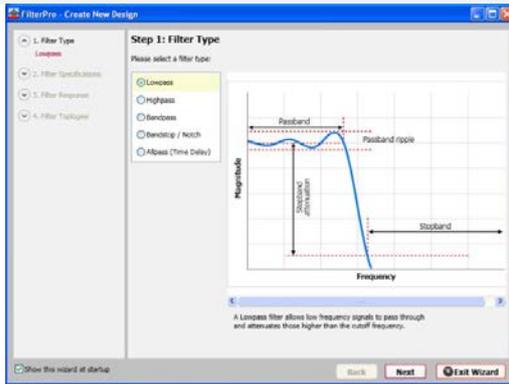


FILTRES DE BESSEL - REPONSES EN FREQUENCES MODULE (dB)

avec l'aimable autorisation de Guy Cazuguel, professeur, Télécom Bretagne



Logiciels de synthèse de filtres

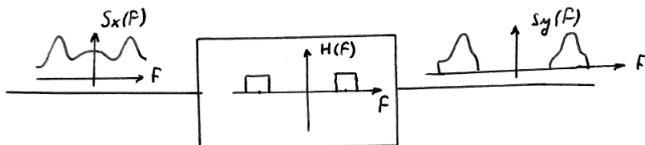


FilterPRO Wizard V3 (© Texas Instruments)

- **Logiciels de calcul scientifique généraux**
 - MatLab Analog Filter Design <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/9458-analog-filter-design-toolbox>
 - Mathematica <http://reference.wolfram.com/mathematica/tutorial/AnalogFilterDesign.html>
 - Scilab http://help.scilab.org/docs/5.4.0/en_US/section_dbbac6be408104de3049eddefaf6b9c9.html
 - Octave http://en.wikibooks.org/wiki/Signal_Processing/Filter_Design
- **Logiciels spécialisés**
 - SPICE (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis) <http://en.wikipedia.org/wiki/SPICE>
 - FilterCAD de Linear Technology <http://www.linear.com/designtools/software/#Filter>
 - Analog Filter Wizard d'Analog Device http://www.analog.com/en/content/filter_wizard/fca.html
 - FilterPRO de Texas Instruments <http://www.ti.com/tool/filterpro>
 - S/FILSYN <http://www.alkeng.com/>
 - Nuhertz filter design <http://www.nuhertz.com/>



Filtrage des signaux d'énergie (de puissance) finie



On s'intéresse aux **relations entre les spectres d'énergie (ou de puissance) d'un signal avant et après passage dans un filtre.**

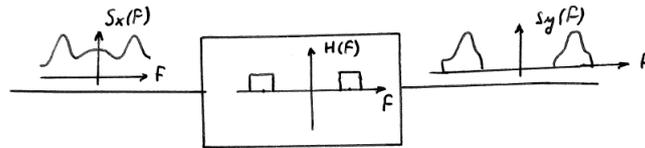
Ces relations sont à la base de **la conception de certains analyseurs de spectre** et permettent d'interpréter la notion de densité spectrale (d'énergie ou de puissance).

Le filtre a pour réponse impulsionnelle $h(t)$ et pour réponse en fréquence $H(f)$.
 $h(t)$ est supposé d'énergie finie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt < +\infty$$



Filtrage des signaux d'énergie (de puissance) finie



- **Signaux d'énergie finie**

Le filtrage d'un signal d'énergie finie $x(t)$ par $h(t)$ ne donne pas forcément un signal $y(t)$ d'énergie finie. Lorsque c'est le cas on a :

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$$

où $S_x(f)$ (resp. $S_y(f)$) est la densité spectrale d'énergie (spectre d'énergie) de $x(t)$ (resp. $y(t)$).

- **Signaux de puissance moyenne finie (en particulier signaux périodiques)**

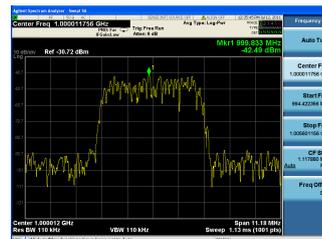
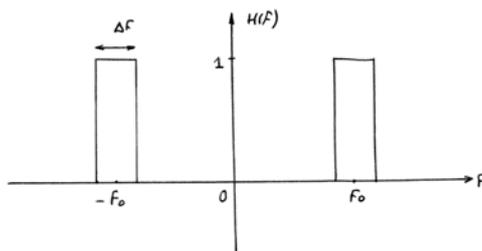
Le filtrage d'un signal de puissance finie $x(t)$ par $h(t)$ ne donne pas forcément un signal $y(t)$ de puissance finie. Lorsque c'est le cas on a :

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$$

où $S_x(f)$ (resp. $S_y(f)$) est la densité spectrale de puissance (spectre de puissance) de $x(t)$ (resp. $y(t)$).



Analyse spectrale par filtrage passe-bande étroit (1)



On filtre un signal $x(t)$ d'énergie (ou de puissance moyenne) finie par un filtre très sélectif (très étroit) centré autour de la fréquence f_0 :

$$H(f) = \text{rect}_{\Delta f}(f - f_0) + \text{rect}_{\Delta f}(f + f_0) \quad \Delta f \ll 1$$

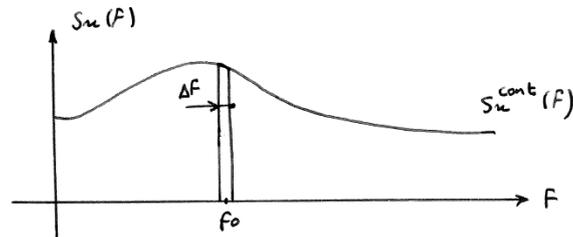
- Énergie $E(f_0)$ ou puissance moyenne $P(f_0)$ mesurée à la sortie du filtre :

$$\begin{aligned} \begin{cases} E(f_0) \\ P(f_0) \end{cases} &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(f) df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 S_x(f) df = 2 \int_{f_0 - \frac{\Delta f}{2}}^{f_0 + \frac{\Delta f}{2}} S_x(f) df \end{aligned}$$



Analyse spectrale par filtrage passe-bande étroit (2)

Trois cas se présentent :



- Cas 1 : $S_x(f)$ est un **spectre continu** dans la bande du filtre (pas de raies) :

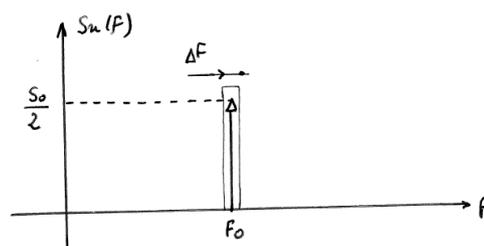
$$S_x(f) = S_x^{cont}(f)$$

$$\begin{cases} E(f_0) \\ P(f_0) \end{cases} \simeq 2S_x^{cont}(f_0) \Delta f$$

L'énergie (puissance) en sortie du filtre est **proportionnelle à la densité spectrale d'énergie (de puissance)**. Elle est également proportionnelle à $\Delta f =$ largeur du filtre).



Analyse spectrale par filtrage passe-bande étroit (3)



- Cas 2 : $S_x(f)$ est composé d'**une raie en f_0** (ex. signal périodique) :

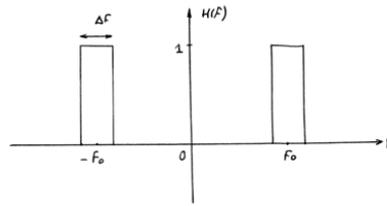
$$S_x(f) = \frac{S_0}{2} \delta(f - f_0) + \frac{S_0}{2} \delta(f + f_0)$$

$$P(f_0) = S_0$$

La sortie du filtre présente une puissance constante = **puissance de la raie**.



Analyse spectrale par filtrage passe-bande étroit (4)



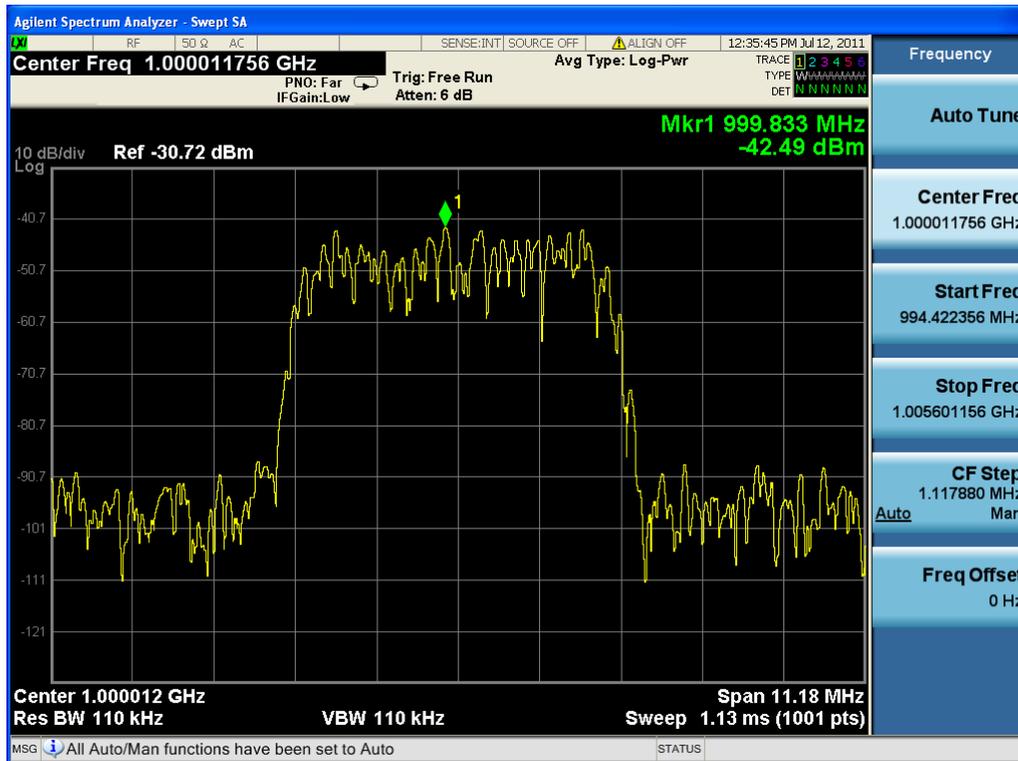
- Cas 3 : $S_x(f)$ présente **une composante continue et une raie en f_0** :

$$S_x(f) = S_x^{cont}(f) + \frac{S_0}{2}\delta(f - f_0) + \frac{S_0}{2}\delta(f + f_0)$$

$$P(f_0) = 2S_x^{cont}(f_0)\Delta f + S_0$$

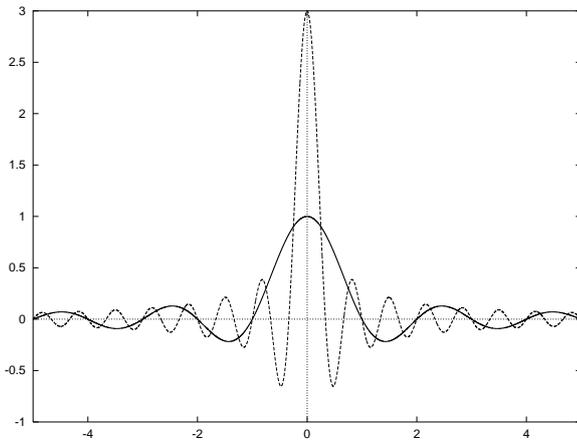
La puissance est une fonction affine de Δf .

Conclusion : l'énergie (ou la puissance moyenne) d'un signal est *localisée* sur l'axe des fréquences avec une densité $S_x(f)$.



Affichage d'un analyseur de spectre à filtre passe-bande et à balayage





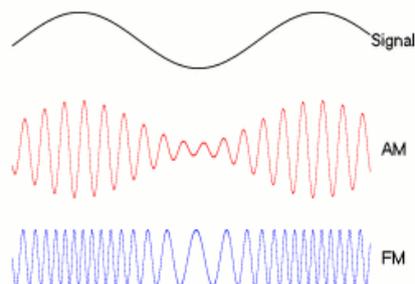
INTRODUCTION AU TRAITEMENT DU SIGNAL

Partie V

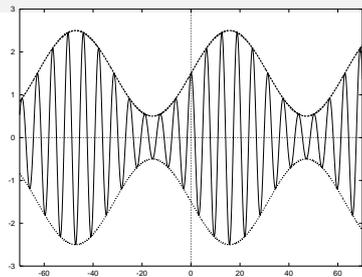


Partie V

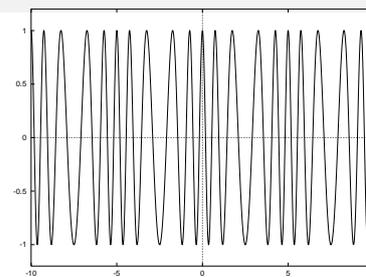
MODULATION - DEMODULATION



Introduction



AM



FM

Les techniques de modulation consistent à contrôler certains paramètres d'une **porteuse sinusoïdale (amplitude, fréquence, phase)** par un autre signal.

Exemple : modulation d'amplitude (AM)

▷ porteuse : $p(t) = \cos(2\pi f_p t + \phi_p)$

▷ signal modulant : $x(t)$

▷ signal modulé AM : $y(t) = x(t) \cos(2\pi f_p t + \phi_p)$

● Applications :

- adaptation d'un signal à un canal de transmission ;
- partage d'un canal de transmission unique entre plusieurs signaux (multiplexage) ;
- détection ou mesure de signaux basses fréquences de faible amplitude dans un environnement bruité.



Historique



1897



1914

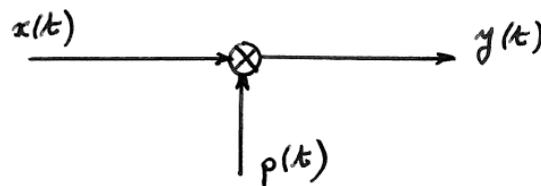


1920

- 1886 : expérience de Hertz (émission-réception d'une onde EM à 1,5 m) : ondes « hertziennes »
- 1895 : transmission d'un signal télégraphique à 2 km (Marconi, Italie)
- 1899-1920 : télégraphie sans fil (code Morse, télégrammes, ...) Usages militaires et maritimes
- 1906 : invention modulation AM (R. Fessenden, Canada)
- 1912 : après le naufrage du Titanic, convention internationale radio télégraphie marine
- 1920-25 : premières stations radio AM (en France : Tour Eiffel)
- 1925 : radiotéléphonie (marine, aérienne, ...)
- 1933 : invention de la modulation FM (E.H. Armstrong, USA)
- 1935 : premières émissions de TV 60 lignes à Paris (R. Barthélemy)
- 1939 : première émission FM (E.H. Armstrong, USA)
- 1952 : invention de la FM stéréophonique (E.H. Armstrong, USA)
- 1954 : première station radio FM en France (rue de Grenelle)
- 1963 : création de France Inter, France Culture et France Musique.
- 1969 : premières émissions en FM stéréo (France Musique)



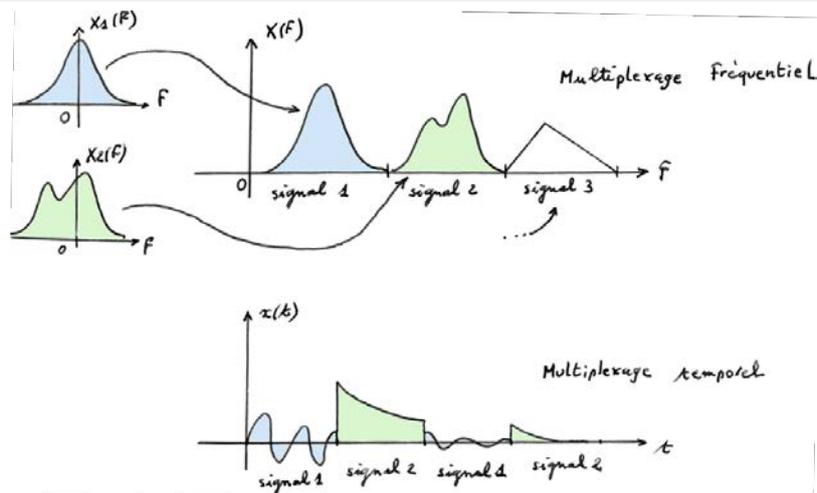
Définitions



- **Porteuse** $p(t)$: signal auxiliaire (généralement HF) dont on contrôle l'amplitude, la fréquence ou la phase. Généralement sinusoïdale ;
- **Signal modulant** $x(t)$: signal (portant l'information et généralement BF) qui contrôle l'amplitude, la fréquence ou la phase de la porteuse ;
- **Signal modulé** $y(t)$: résultat de la modulation de la porteuse par le signal modulant (on parle de modulation d'amplitude (AM), de fréquence (FM) ou de phase (ϕM), suivant le paramètre contrôlé) ;
- **Démodulation** : consiste à retrouver le signal modulant à partir du signal modulé ;
- **Modulation linéaire** : qui préserve le spectre du signal modulant. AM est linéaire, FM et ϕM sont non linéaires.



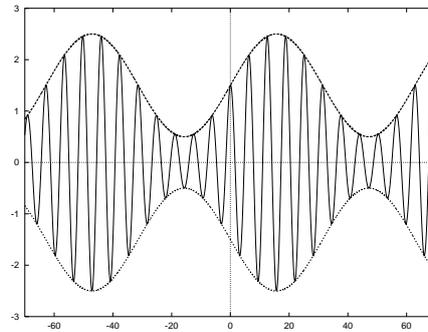
Définitions : multiplexage temporel et fréquentiel



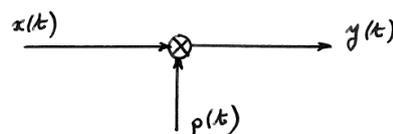
- **Multiplexage fréquentiel** : partage d'un canal de transmission entre plusieurs signaux auxquels on attribue des bandes de fréquence différentes ;
- **Multiplexage temporel** : partage d'un canal de transmission entre plusieurs signaux auxquels on attribue des créneaux temporels différents (surtout utilisé pour les signaux numériques).



La Modulation d'amplitude (AM)



Modulation AM (porteuse exp. complexe)

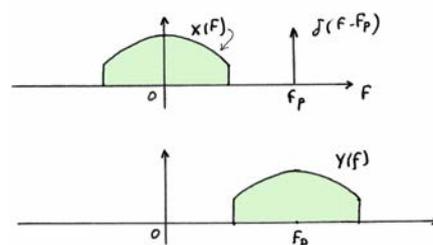


- Principe :

$$\text{porteuse : } p(t) = e^{j(2\pi f_p t + \phi_p)}$$

$$\text{signal modulé : } y(t) = x(t) p(t) = x(t) e^{j(2\pi f_p t + \phi_p)}$$

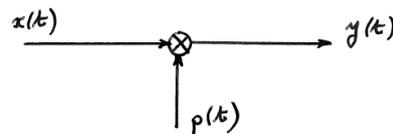
- Interprétation fréquentielle ($\phi_p = 0$) :



$$Y(f) = X(f) * \delta(f - f_p) = X(f - f_p)$$

⇒ translation du spectre $X(f)$ de f_p .

Démodulation AM (porteuse exp. complexe)



- Principe :

$$\begin{aligned} \text{porteuse : } p(t) &= e^{j(2\pi f_p t + \phi_p)} \\ \text{signal modulé : } y(t) &= x(t) p(t) = x(t) e^{j(2\pi f_p t + \phi_p)} \end{aligned}$$

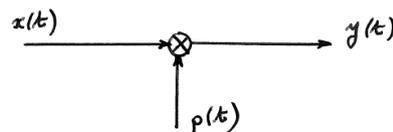
- Démodulation (synchrone) :

$$x(t) = y(t) e^{-j(2\pi f_p t + \phi_p)}$$

- La démodulation est dite « synchrone » car elle nécessite, au niveau du récepteur (démodulateur) un signal de référence, synchronisé avec la porteuse.
- Lorsque la « référence porteuse » est disponible, la démodulation est toujours possible.



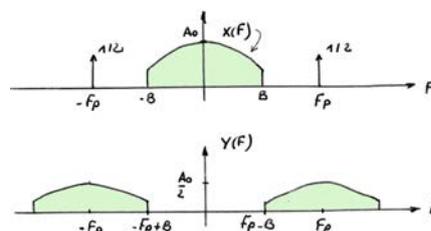
Modulation AM (porteuse sinusoïdale)



- Principe :

$$\begin{aligned} \text{porteuse : } p(t) &= \cos(2\pi f_p t + \phi_p) \\ \text{signal modulé : } y(t) &= x(t) p(t) = x(t) \cos(2\pi f_p t + \phi_p) \end{aligned}$$

- Interprétation fréquentielle ($\phi_p = 0$) :

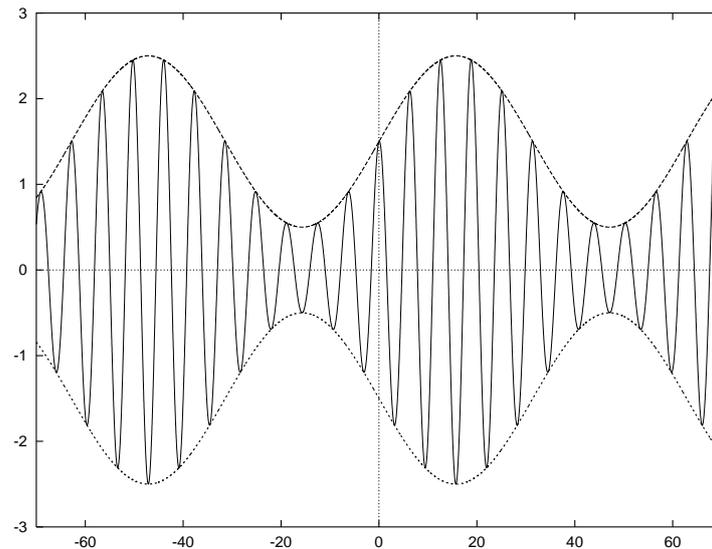


$$Y(f) = X(f) * \frac{1}{2} [\delta(f + f_p) + \delta(f - f_p)] = \frac{1}{2} [X(f + f_p) + X(f - f_p)]$$

!! si $f_p < B$: recouvrement des spectres (démodulation impossible).



Modulation AM (porteuse sinusoïdale)



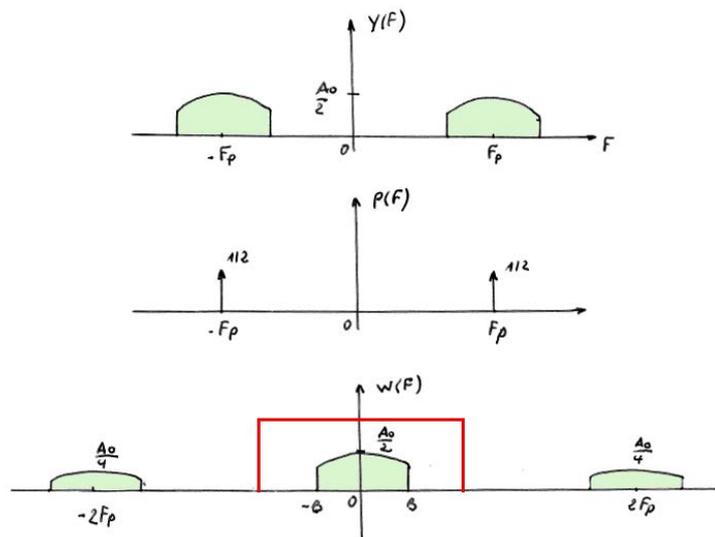
Signal modulé AM $y(t)$ et son enveloppe $x(t)$

Démodulation AM synchrone (porteuse sinus.)

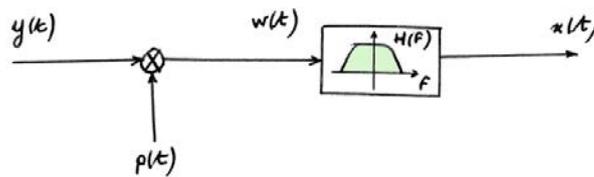
Elle nécessite de disposer au niveau du démodulateur d'un signal de référence de même fréquence et en phase avec la porteuse sinusoïdale.

- Principe :

signal modulé : $y(t) = x(t) \cos(2\pi f_p t + \phi_p)$
 démodulation : $w(t) = y(t) \cos(2\pi f_p t + \phi_p)$
 + filtrage



Démodulation AM synchrone (porteuse sinus.)



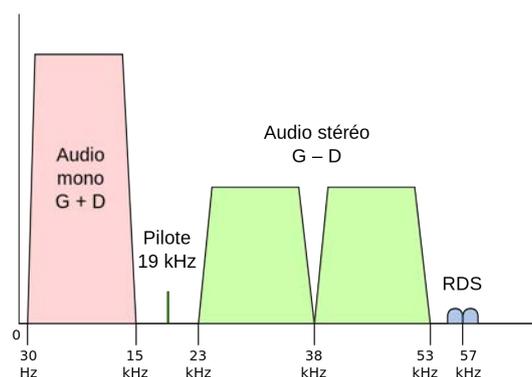
- Pour retrouver $x(t)$, il suffit donc de **filtrer** $w(t)$ avec un filtre passe-bas de gain 2 et de fréquence de coupure $B < f_c < 2f_p - B$.
- Ceci peut également se vérifier analytiquement :

$$\begin{aligned}w(t) &= y(t)p(t) = x(t) \cos^2(2\pi f_p t + \phi_p) \\ &= \frac{1}{2} (x(t) + x(t) \cos(4\pi f_p t + 2\phi_p))\end{aligned}$$

- **Remarque** : la synchronisation entre porteuses doit être parfaite pour des sites distants.



Démodulation AM synchrone (porteuse sinus.)

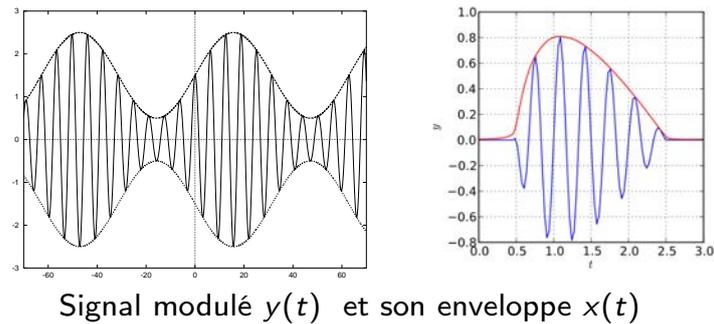


Signal FM en bande de base avec codage stéréo par modulation AM avec référence porteuse

- La démodulation synchrone nécessite une synchronisation parfaite (en fréquence et en phase) entre les porteuses à l'émission et à la réception.
- Deux méthodes de synchronisation :
 - Transmission séparée d'une référence porteuse, éventuellement à une autre fréquence. Méthode utilisée pour le transport des canaux G et D dans le signal audio stéréo FM (modulation AM à 38 kHz, référence porteuse à 19 kHz).
 - Reconstruction de la porteuse à partir du signal modulé avec une boucle à verrouillage de phase (PLL).



Démodulation AM asynchrone (1)



Signal modulé $y(t)$ et son enveloppe $x(t)$

Démodulation par détection d'enveloppe : technique non-linéaire, peu coûteuse (radiophonie, etc.), de qualité moyenne.

- **Caractéristiques** :

- pas de référence porteuse ;
- nécessite $x(t) \geq 0$;
- nécessite $f_p \gg B$.

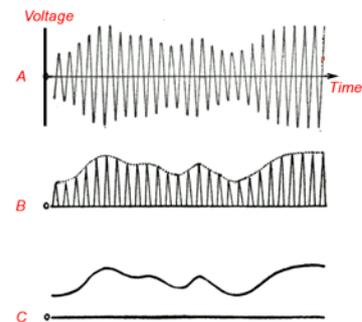
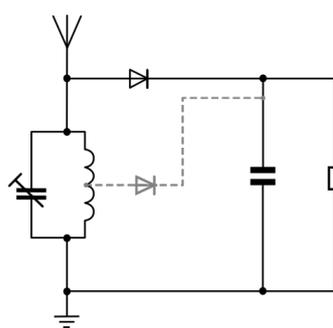
- **Principe** : reconstruction de l'enveloppe (composante BF) de $y(t)$.

$$\text{signal modulé : } y(t) = x(t) \cos(2\pi f_p t + \phi_p)$$



Démodulation AM asynchrone (2)

Démodulation par détection d'enveloppe avec un récepteur à cristal (1900-1940)

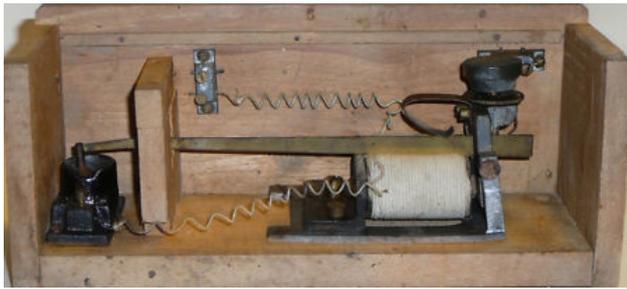


© Creative commons

- Récepteur sans alimentation ! Signal antenne : 0,5 à 2 mW. Ecouteurs.
- Utilisation d'un cristal métallique semi-conducteur (galène, pyrite, ...) équivalent à une diode Schottky rudimentaire.
- Exploration de la surface du cristal avec une pointe. Aux « points sensibles » du cristal le courant ne passe que dans un sens.
- La capacité de sortie sert de détecteur d'enveloppe.
- Le circuit d'accord antenne est un circuit LC avec capacité variable (à air).



Démodulation AM asynchrone (3)



1914



1920



1940

Récepteurs à cristal (pyrite, galène)



1916



1920

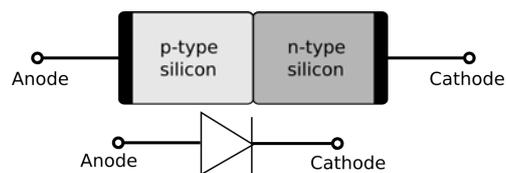


Démodulation AM asynchrone (4)

Démodulation avec une diode à vide (1925-), diode à jonction PN (1950-)

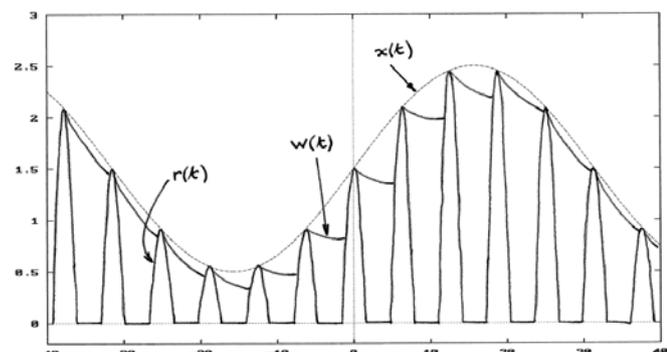
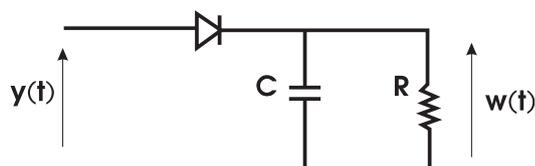


1925



1950

Redressement (diode) + filtrage passe-bas (RC) du signal modulé :



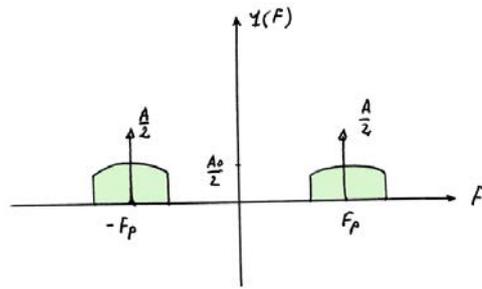
$y(t)$: signal modulé AM

$r(t)$: signal redressé ($r(t) = w(t)$ sans la capacité C)

$w(t)$: enveloppe du signal modulé AM $\simeq x(t)$



Démodulation AM asynchrone (5)



- Pour obtenir un signal modulant positif, si $x(t) \geq -K$, on ajoute un « offset » $A > K$ à $x(t)$:

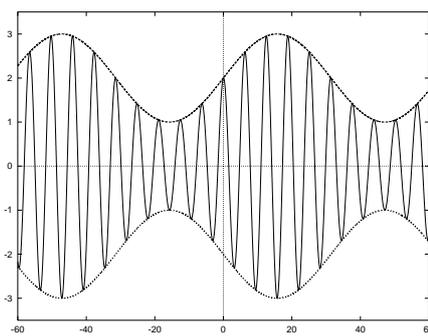
$$y(t) = (x(t) + A) \cos(2\pi f_p t + \phi_p)$$

$$Y(f) = \frac{1}{2} [X(f + f_p) + X(f - f_p)] + \frac{A}{2} [\delta(f + f_p) + \delta(f - f_p)]$$

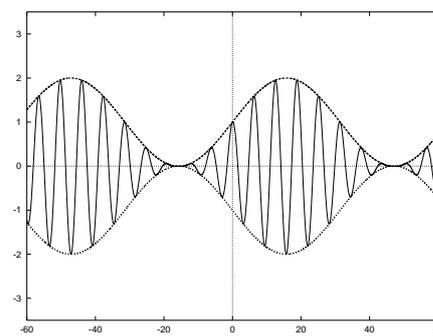
⇒ la puissance d'émission doit ↗.



Démodulation AM asynchrone (6)



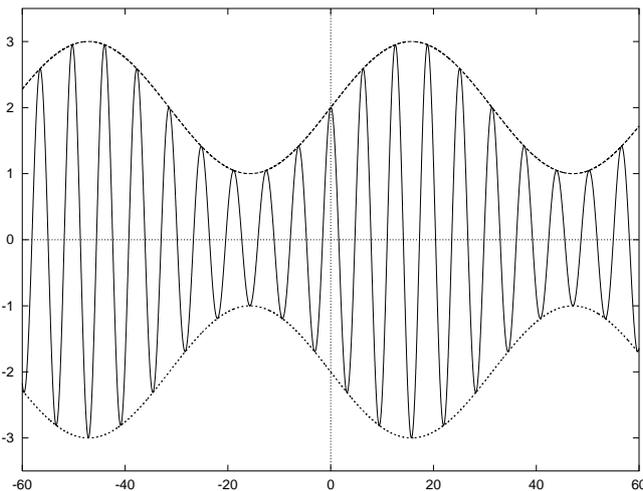
$m = 0.5$



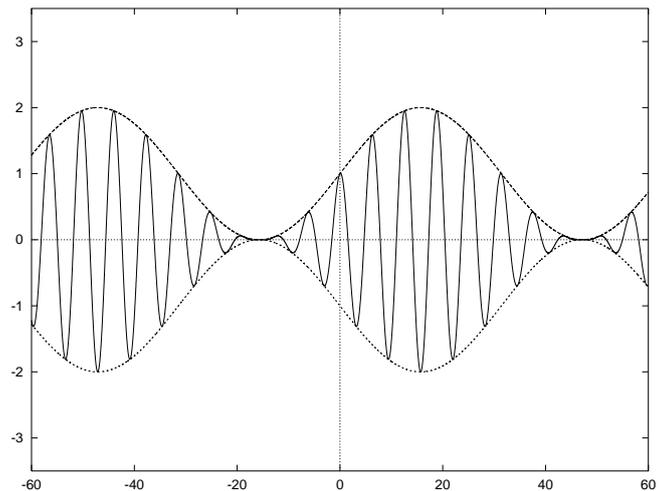
$m = 1$

- $x(t) \geq -K$
 $y(t) = (x(t) + A) \cos(2\pi f_p t + \phi_p)$
- Indice de modulation : $m = \frac{K}{A}$
 - si $m > 1$ pas de démodulation possible ;
 - réduction de la puissance d'émission : $m \rightarrow 1$;
 - démodulation efficace : $0 < m \ll 1$.





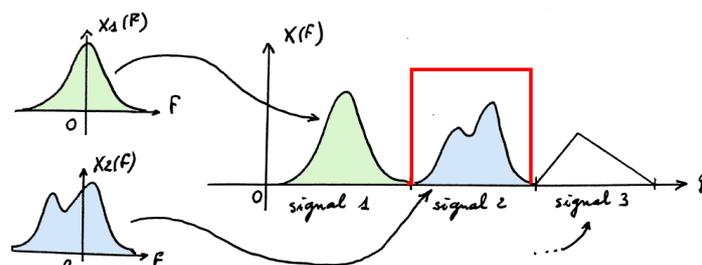
Signal modulé $y(t)$: cas $m = 0.5$



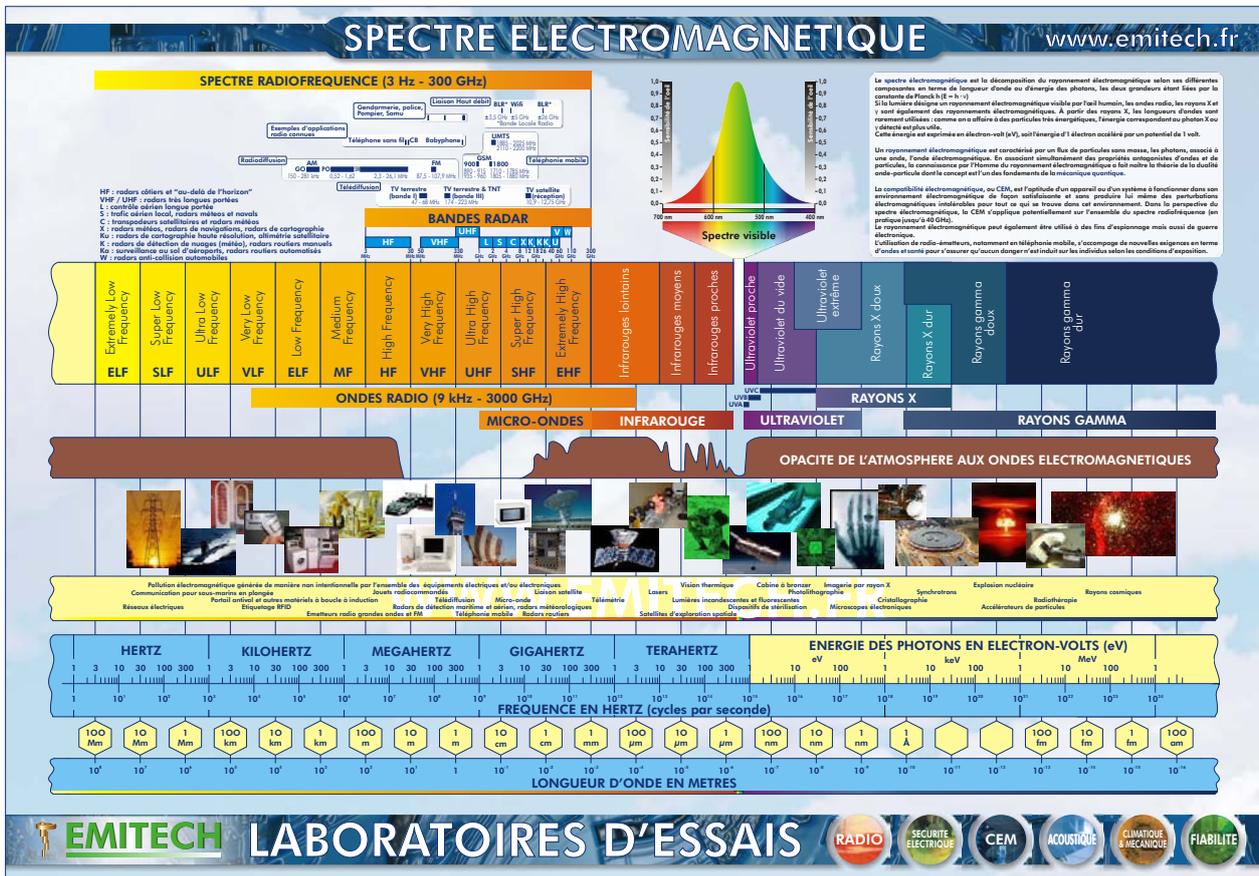
Signal modulé $y(t)$: cas $m = 1$

Modulation AM : Applications (1)

Multiplexage fréquentiel

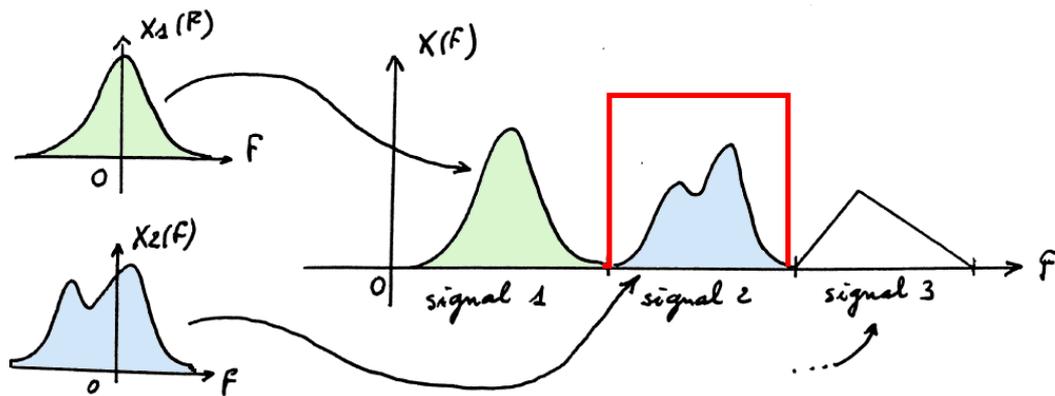


- Très souvent, les canaux de transmission disponibles pour transmettre l'information sont adaptés à une gamme de fréquence qui ne coïncide pas avec la bande de fréquence du signal (lien micro-onde : 300 MHz à 300 GHz, communications satellitaires : 1,5 à 20 GHz). La modulation permet alors de **transposer le signal à transmettre dans la bande de fréquence adéquate**.
- De plus, les bandes disponibles pour la transmission sont généralement bien plus larges que la bande occupée par un seul signal (quelques GHz en micro-ondes !). Le **multiplexage** permet de tirer profit de cette caractéristique, en **transmettant simultanément des signaux modulés** de façon à ce que leurs supports fréquentiels ne se recouvrent pas.
- Le **démultiplexage s'effectue par filtrage passe-bande** suivi d'une démodulation. Ce type de transmission est par ex. utilisé pour la transmission des émissions radiophoniques AM, et celle des communications téléphoniques.



Modulation AM : Applications (2)

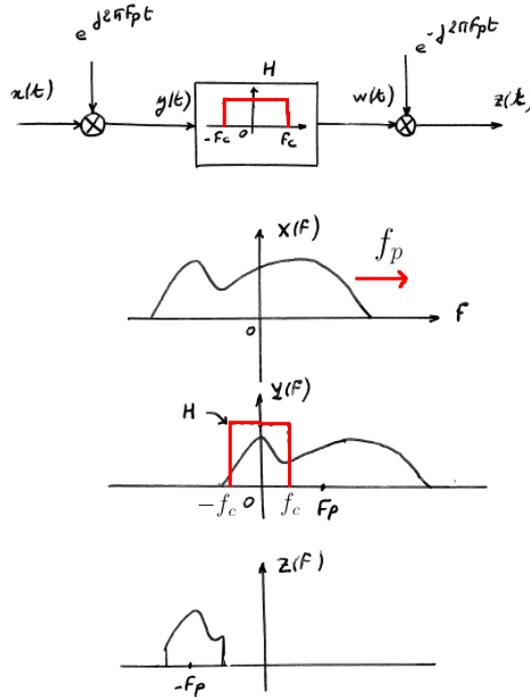
Filtres passe-bandes à fréquence centrale variable



- Pour réaliser le démultiplexage (au niveau d'un récepteur radio), il faut disposer d'un filtre passe-bande raide à **fréquence centrale variable**.
- La synthèse d'un tel filtre à partir d'éléments R, L, C variables s'avère délicate.
- On préfère utiliser **un filtre aux caractéristiques fixes** (passe-bas ou passe-bande). On décale la partie du spectre du signal à démultiplexer devant le filtre fixe. Ce décalage est réalisé par **modulation AM**. Ce principe s'appelle **l'hétéodyne**.

Modulation AM : Applications (2)

Filtres passe-bandes à fréquence centrale variable



Principe de l'hétérodynage :
réalisation d'un filtre passe-bande $H_{eq}(f) = \text{rect}_{2f_c}(f + f_p)$, de fréquence centrale $-f_p$ variable



Modulation AM : Applications (2)

Filtres passe-bandes à fréquence centrale variable

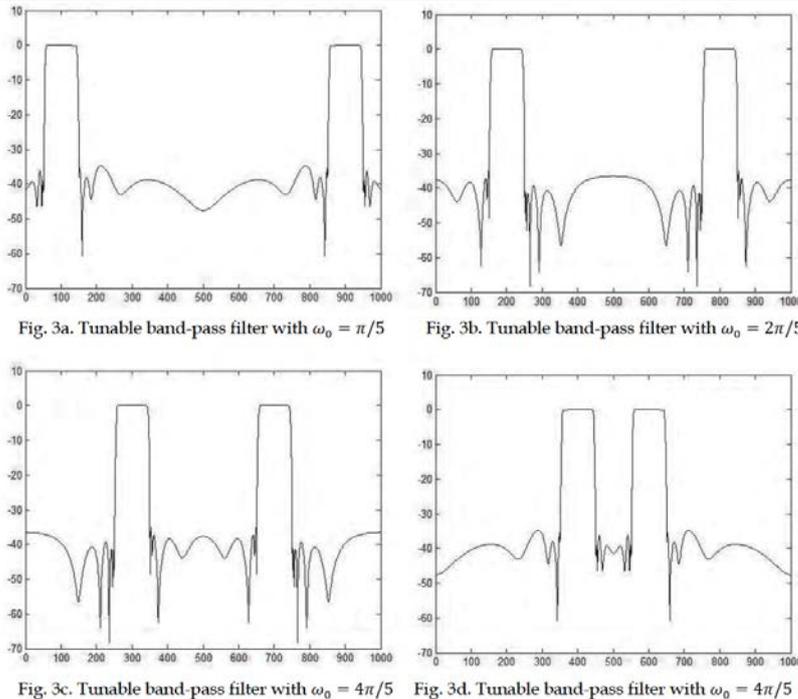


Fig. 3a. Tunable band-pass filter with $\omega_0 = \pi/5$

Fig. 3b. Tunable band-pass filter with $\omega_0 = 2\pi/5$

Fig. 3c. Tunable band-pass filter with $\omega_0 = 4\pi/5$

Fig. 3d. Tunable band-pass filter with $\omega_0 = 4\pi/5$

© M. Soderstrand, Intech

Réponse en fréquence d'un filtre passe-bande hétérodyne à fréquence centrale variable. Filtre fixe : filtre passe-bas Tchebycheff inverse d'ordre 11, atténuation 40dB (en technologie numérique).



Modulation AM : récepteur hétérodyne

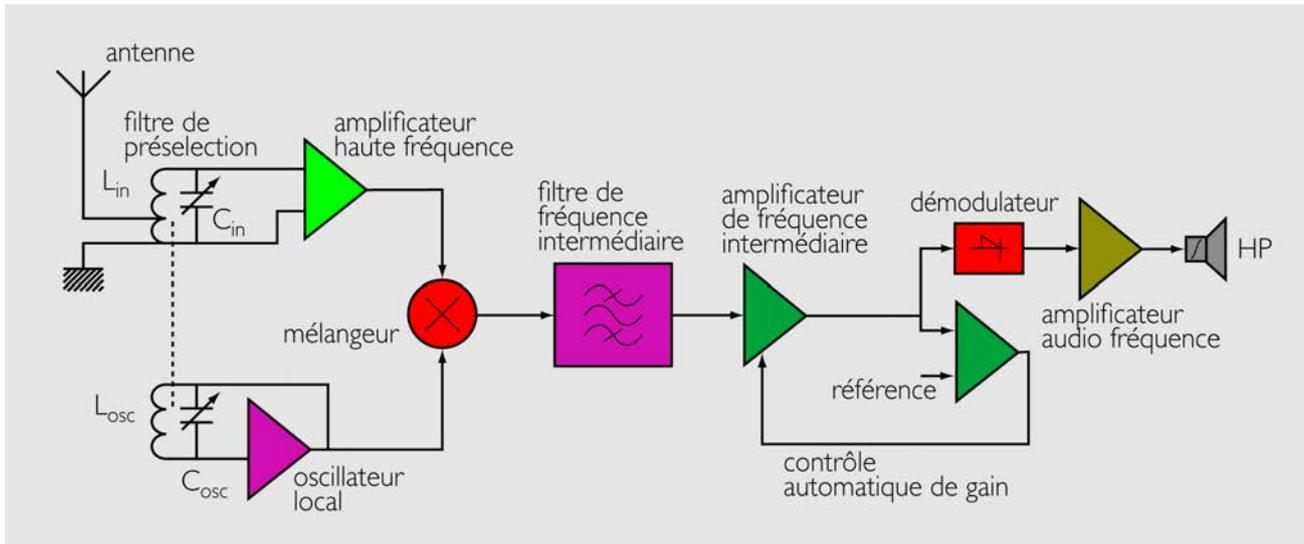


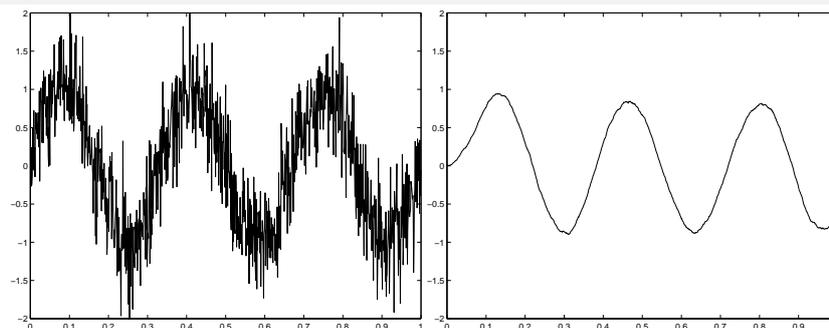
Schéma de principe d'un récepteur superhétérodyne AM (© Creative Commons)

F_{HF} : fréq. réception HF, F_{OL} : fréq. oscillateur local, F_i : fréq. intermédiaire. $F_{HF} - F_{OL} = F_i$

Les récepteurs AM superhétérodyne « modernes » (1930-) utilisent le principe précédent, avec un filtre passe-bande fixe à une fréquence intermédiaire (réalisant la démultiplexage, c'est-à-dire la sélection de la station), suivi d'un étage démodulateur. Le même principe est utilisé en démultiplexage FM.



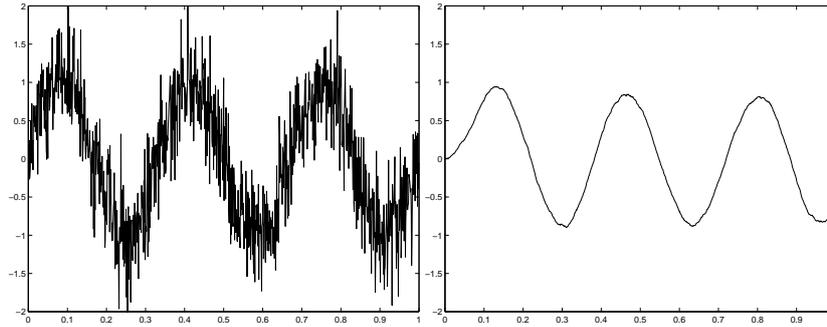
Modulation AM, FM, ΦM : immunité au bruit



- On mesure l'immunité au bruit d'un système de modulation à travers le « rapport signal à bruit » qui correspond au rapport entre la puissance du signal utile et la puissance du bruit. Le rapport signal à bruit est mesuré au niveau du récepteur, en sortie de l'étage de démodulation.
- Les performances des différents systèmes de modulation sont mesurées, pour une même puissance d'émission, par rapport à un système de référence qui correspond à une transmission en « bande de base » (i.e. sans modulation). On exprime alors les performances d'un système de modulation par le gain η qu'il permet d'obtenir sur le rapport signal à bruit, par rapport à ce système de référence.



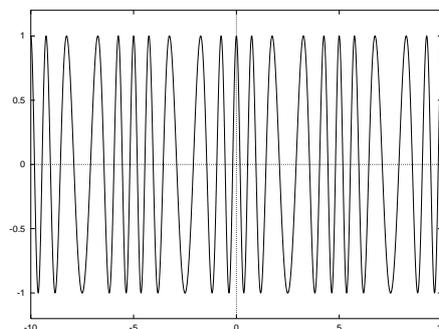
Modulation AM, FM, ΦM : immunité au bruit



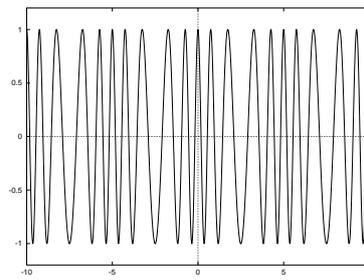
● On a les résultats suivants :

- **modulation AM** : $\eta = 1$ dans le meilleur des cas (pour une démodulation synchrone), $\eta \ll 1$ pour une démodulation par détection d'enveloppe.
- **modulation FM** : on peut configurer le système pour avoir $\eta \gg 1$.
- **modulation ΦM** : même propriété (mais moins performant que FM).
- Les modulations angulaires FM et ΦM (non-linéaires) permettent **d'améliorer l'immunité au bruit, au détriment de la largeur de bande occupée par le signal modulé.**

La Modulation angulaire (FM, ΦM)



Modulation angulaire

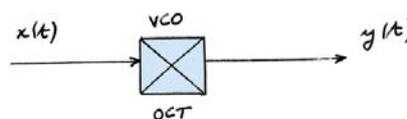


Modulation FM

- **Principe :**
 - modulation de la fréquence ou de la phase de la porteuse ;
- **Caractéristiques :**
 - non linéaire ;
 - largeur de bande plus importante qu'en AM ;
 - l'information (signal modulant) est portée par la fréquence (alors que pour AM, c'est par l'amplitude). Avantage déterminant car la plupart des bruits sur l'onde électromagnétique perturbent son amplitude. On a donc une bien meilleure immunité au bruit ;
 - puissance crête émise constante ;
 - correction efficace des atténuations possible en transmission.



Modulations de fréquence et de phase



VCO : voltage controlled oscillator

OCT : oscillateur commandé (ou contrôlé) en tension

Un OCT délivre un signal sinusoïdal dont la fréquence est proportionnelle à la tension appliquée en entrée

- **Signal modulant :** $x(t)$
- **Signal modulé :** $y(t) = \cos(2\pi f_p t + \phi(t))$ avec :
 - **modulation de phase (ΦM) :**
 - **modulation de fréquence (FM) :**

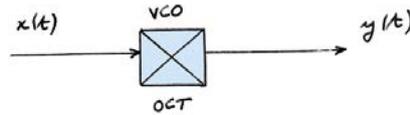
$$\phi(t) = k_\phi x(t)$$

$$\phi(t) = k_f \int_0^t x(u) du$$

ou : $\frac{d\phi(t)}{dt} = k_f x(t)$



Modulations de fréquence et de phase



- modulation de phase (ΦM) :

$$\phi(t) = k_{\phi} x(t)$$

- modulation de fréquence (FM) :

$$\phi(t) = k_f \int_0^t x(u) du$$

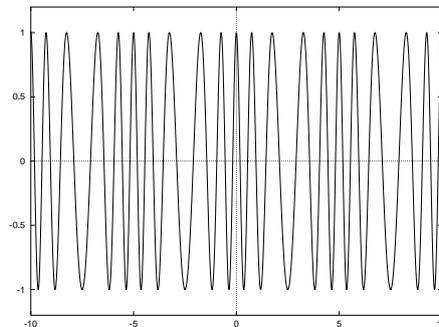
$$\text{ou : } \frac{d\phi(t)}{dt} = k_f x(t)$$

- Fréquence instantanée de $y(t)$:

$$f_i(t) = f_p + \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}$$

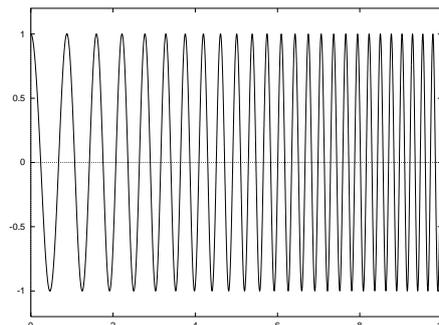
$$\text{modulation } \Phi M : f_i(t) = f_p + \frac{k_{\phi}}{2\pi} \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\text{modulation FM : } f_i(t) = f_p + \frac{k_f}{2\pi} x(t)$$



Signal modulé FM $y(t) : y(t) = \cos(2\pi t + 2 \sin(0,4\pi t))$

$$f_i(t) = f_p + \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} = 1 + 0,4 \cos(0,4\pi t)$$

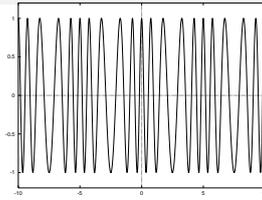


Signal modulé FM $y(t) : y(t) = \cos(2\pi t + t^2)$

$$f_i(t) = f_p + \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} = 1 + \frac{t}{\pi}$$



Modulation FM à bande étroite (1)



- Cas d'un signal modulant sinusoïdal de faible niveau :

$$x(t) = A_m \cos 2\pi f_m t$$

- Expression du signal modulé FM :

$$y(t) = A \cos(2\pi f_p t + m \sin(2\pi f_m t))$$

$$\text{où : } m = \frac{k_f A_m}{2\pi f_m}$$

est l'indice de modulation.

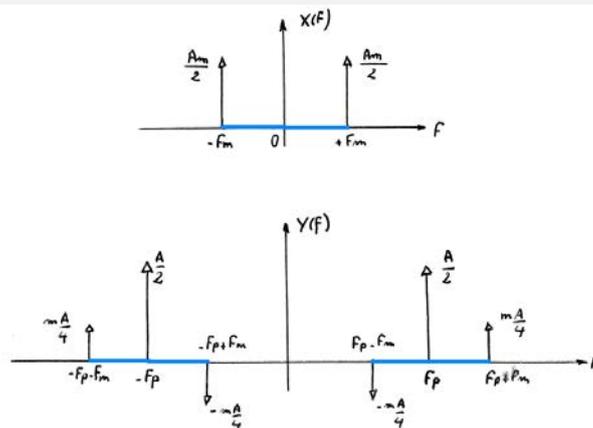
- Modulation à bande étroite : $m \ll 1$

$$y(t) = A \cos(2\pi f_p t) \cos(m \sin 2\pi f_m t) - A \sin(2\pi f_p t) \sin(m \sin 2\pi f_m t)$$

$$\simeq A [\cos 2\pi f_p t - m \sin 2\pi f_m t \sin 2\pi f_p t]$$



Modulation FM à bande étroite (2)



- Spectre du signal modulé :

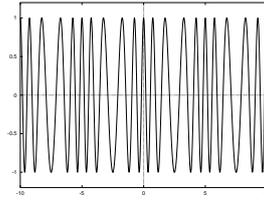
$$Y(f) = \frac{A}{2} [\delta(f - f_p) + \delta(f + f_p)] + \frac{mA}{4} [\delta(f + f_p + f_m) - \delta(f + f_p - f_m) - \delta(f - f_p + f_m) + \delta(f - f_p - f_m)]$$

⇒ spectre de même largeur de bande que $x(t)$ (indépendante de m ou A_m).

⇒ propriété vraie pour des signaux modulateurs non sinusoïdaux si $m \ll 1$.



Modulation FM à bande large (1)



Lorsque m est grand l'**approximation précédente ne tient plus**. Le spectre de $y(t)$ dépend à la fois de l'amplitude et du spectre du signal modulant $x(t)$.

- Dans le cas d'un signal sinusoïdal :

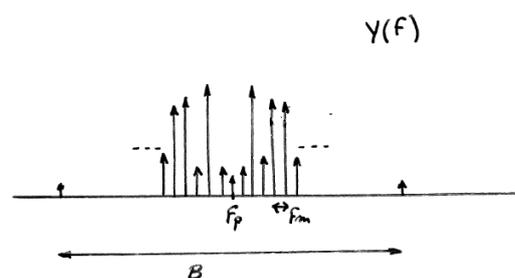
$$\begin{aligned}y(t) &= A \cos(2\pi f_p t + m \sin(2\pi f_m t)) \\ &= A \cos(2\pi f_p t) \cos(m \sin 2\pi f_m t) - A \sin(2\pi f_p t) \sin(m \sin 2\pi f_m t)\end{aligned}$$

- Interprétation :

- ▷ les signaux $\cos(m \sin 2\pi f_m t)$ et $\sin(m \sin 2\pi f_m t)$ sont périodiques (de fréquence fondamentale f_m). Ils ont donc un spectre de raies.
- ▷ la multiplication par $\cos(2\pi f_p t)$ et $\sin(2\pi f_p t)$ correspond à une modulation AM (transposition du spectre de raies autour de la porteuse f_p).



Modulation FM à bande large (2)



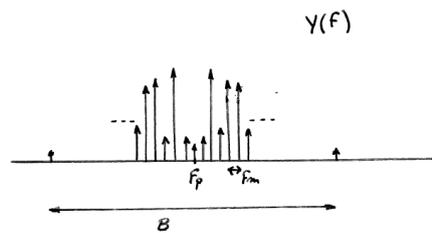
- On montre que :

$$Y(f) = \frac{A}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(m) [\delta(f - f_p - kf_m) + \delta(f + f_p + kf_m)]$$

où $J_k(m)$ est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre k . Les $J_k(m)$ décroissent rapidement pour $|k| > m$.



Modulation FM à bande large (3)



- **Bande occupée par le signal modulé $y(t)$ (bande de Carson) :**

$$B \simeq 2(m + 1)f_m = 2 \left(\frac{k_f A_m}{2\pi f_m} + 1 \right) f_m \quad \text{à 98 \% de la puissance}$$

- Si $m \ll 1$: **modulation FM à bande étroite** et $B \simeq 2f_m$ (bande occupée égale à celle du signal modulant).
- Si $m > 1$: **modulation FM à bande large** (bande occupée supérieure à celle du signal modulant).
- Si $m \gg 1$: **modulation FM à bande large** (bande occupée supérieure à celle du signal modulant). $B \simeq 2mf_m = \frac{k_f A_m}{\pi}$ ne dépend plus de la largeur de bande de $x(t)$ mais uniquement de son amplitude.



Généralisation à des signaux non sinusoïdaux

- **Modulation de fréquence (FM) :**

$$y(t) = \cos(2\pi f_p t + \phi(t))$$

avec : $\frac{d\phi(t)}{dt} = k_f x(t)$

- **Fréquence instantanée de $y(t)$:**

$$f_i(t) = f_p + \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}$$

$$f_i(t) = f_p + \frac{k_f}{2\pi} x(t)$$

- **Demi-excursion de $f_i(t)$:**

$$\Delta f = \frac{k_f}{2\pi} |x(t)|_{max}$$

- **Indice de modulation :**

$$m = \frac{k_f A_m}{2\pi} \cdot \frac{1}{f_m} = \frac{\Delta f}{b} \rightarrow m = \frac{k_f |x(t)|_{max}}{2\pi} \cdot \frac{1}{b} = \frac{\Delta f}{b}$$

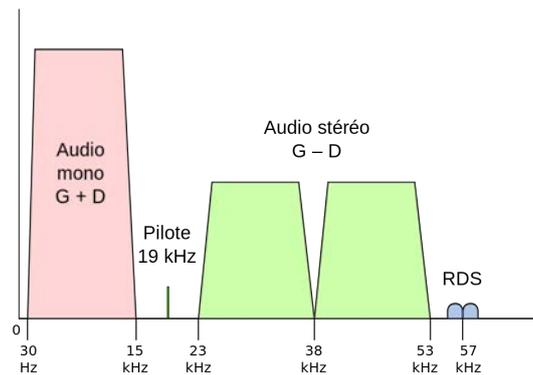
où Δf est la demi-excursion de la fréquence instantanée, $|x(t)|_{max}$ est l'amplitude max du signal modulant $|x(t)|$ et b est la bande de fréquence ($f > 0$) occupée par $x(t)$.

- **Bande occupée par le signal modulé $y(t)$ (bande de Carson) :**

$$B \simeq 2(m + 1)f_m \rightarrow B \simeq 2(\Delta f + b)$$



Modulation FM : exemples



Signal FM en bande de base avec codage stéréo

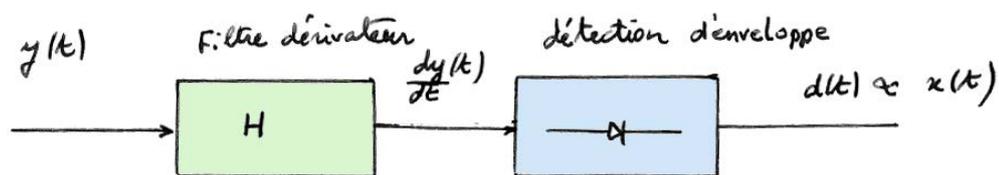
- Micro HF (bande CB 27 MHz) $m \ll 1$:
Spectre du signal modulant : [30Hz, 10kHz], excursion en fréquence instantanée : $\Delta f = \pm 1\text{kHz}$, $B = 10\text{kHz}$
- Radiodiffusion FM (88 à 108 MHz) $m > 1$:
Spectre du signal modulant : [30Hz, 60kHz], $\Delta f = \pm 75\text{kHz}$, $B = 300\text{kHz}$
- Téléphonie GSM (900 MHz et 1800 MHz) $m > 1$:
Spectre du signal modulant : [300Hz, 3, 4kHz] $\Delta f = \pm 68\text{kHz}$, $B = 200\text{kHz}$
- TV satellite (10-12 GHz) $m \gg 1$:
 $\Delta f = \pm 9\text{MHz}$, $B = 30\text{MHz}$



Démodulation FM (1)

Les méthodes de démodulation FM sont non linéaires.

- Démodulation par dérivation



$$y(t) = A \cos(2\pi f_p t + \phi(t))$$

$$\Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} = -A \left(2\pi f_p + \frac{d\phi(t)}{dt} \right) \sin(2\pi f_p t + \phi(t))$$

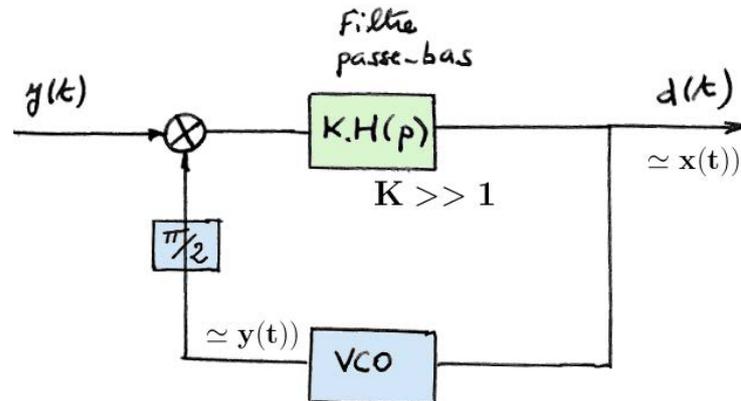
avec : $\frac{d\phi(t)}{dt} = k_f x(t)$

Si la fréquence f_p est très supérieure à la bande de $x(t)$, on peut retrouver $x(t)$ par simple démodulation AM (détection d'enveloppe).



Démodulation FM (2)

- Démodulation par boucle à verrouillage de phase (Phase Locked Loop : PLL)



$$K \rightarrow +\infty$$

Lorsque la boucle est « accrochée » sur une porteuse, l'oscillateur contrôlé en tension (VCO) se synchronise avec l'entrée $y(t)$. Comme la fréquence instantanée du VCO est proportionnelle au signal de commande $d(t)$, $d(t)$ va donc varier linéairement en fonction de la fréquence instantanée de $y(t)$, qui contient $x(t)$.

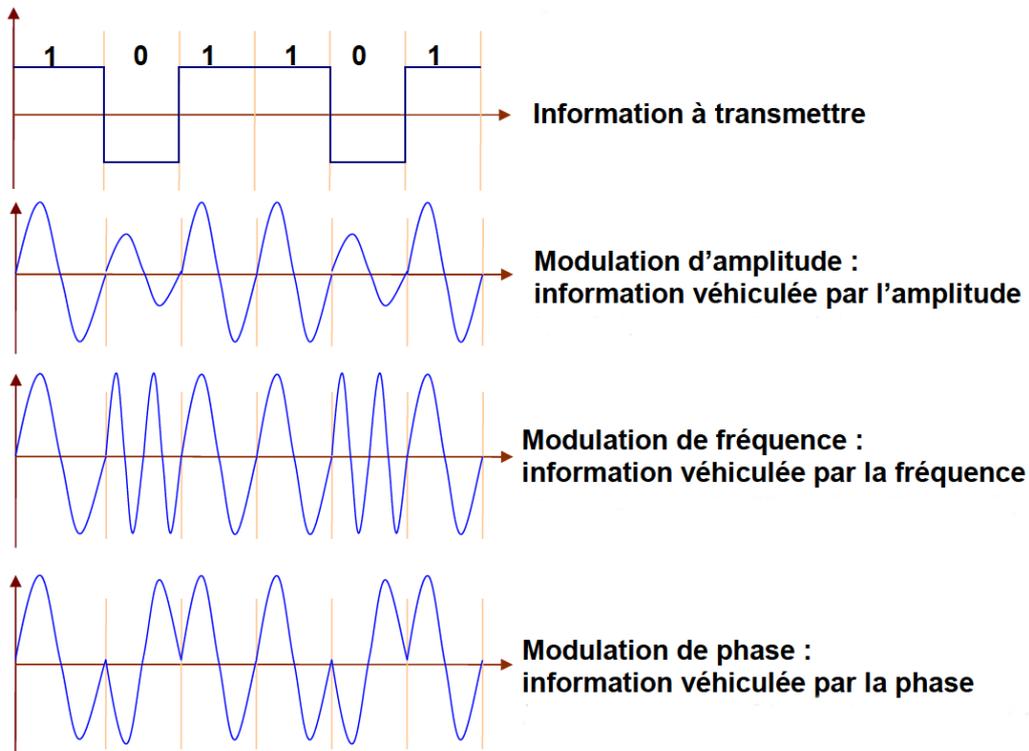


Pour en savoir plus...

- D. Ventre, Communications analogiques, Ellipses, Collection Pédagogique de Télécommunication, Paris, 1991.
- A. Glavieux, M. Joindot, Communications numériques : introduction, Masson, Collection Pédagogique de Télécommunication, Paris, 1996.



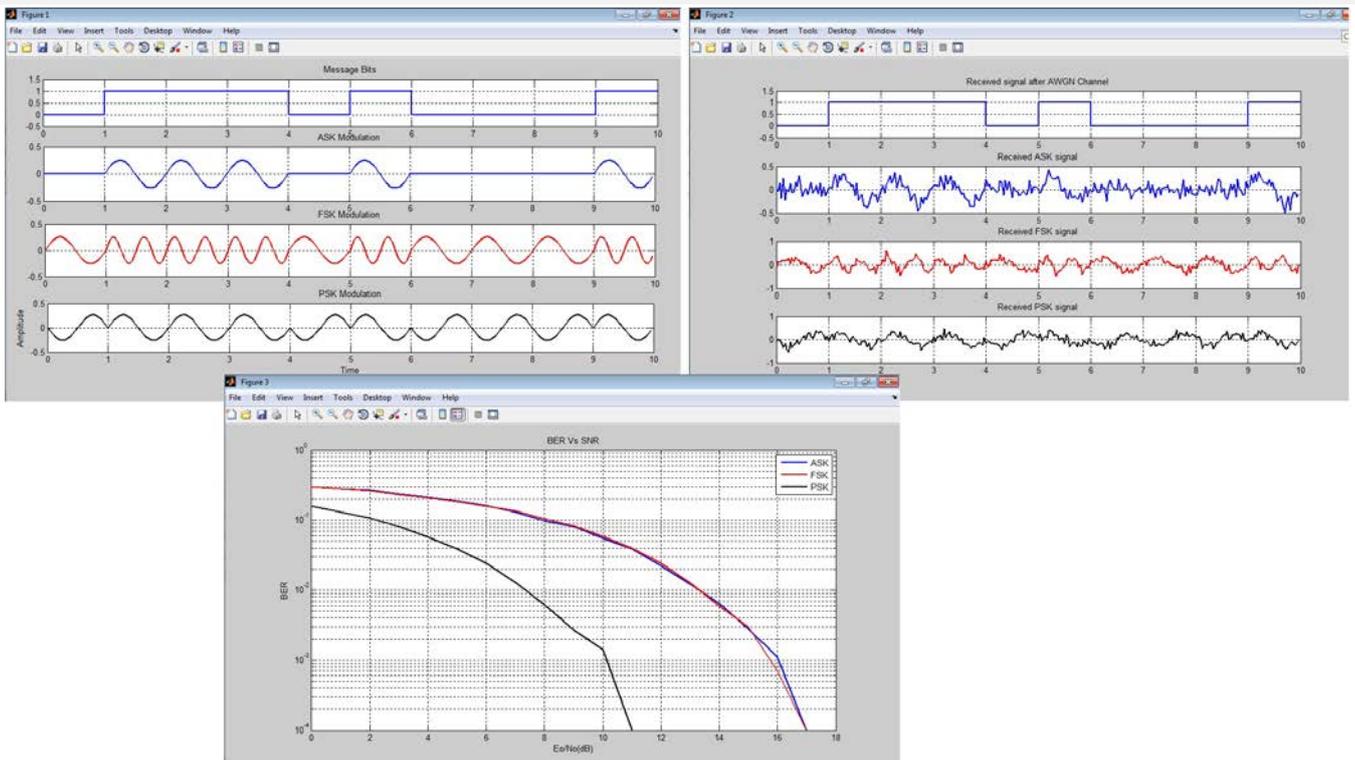
Les modulations numériques



© C. Siclet, Université de Grenoble



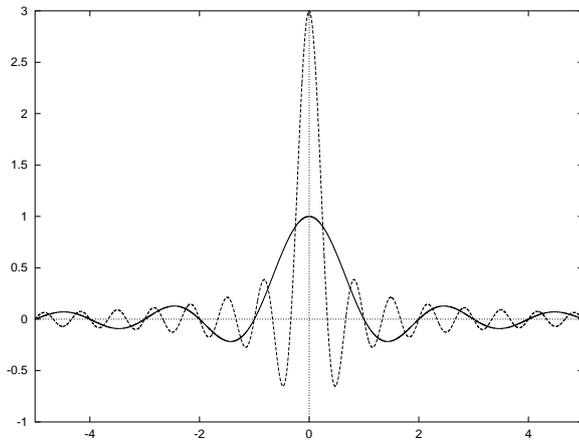
Les modulations numériques



Décodage par filtre adapté (=corrélation).

© N. Bajaj, Aligarh Muslim University, India





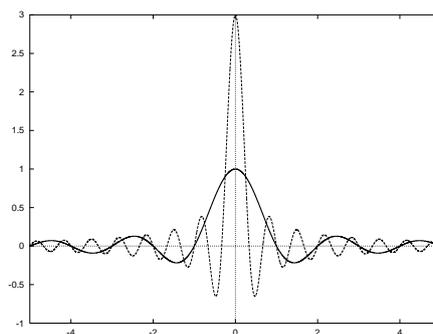
INTRODUCTION AU TRAITEMENT DU SIGNAL

Partie VI

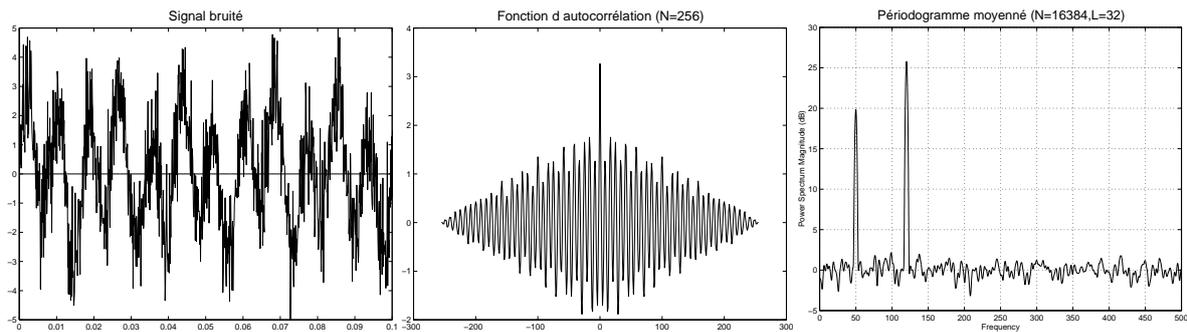


Partie VI

CORRÉLATEURS, ANALYSEURS DE SPECTRES



Introduction



Principe et architecture de deux classes d'appareils couramment utilisés pour l'analyse des propriétés temporelles et fréquentielles d'un signal :

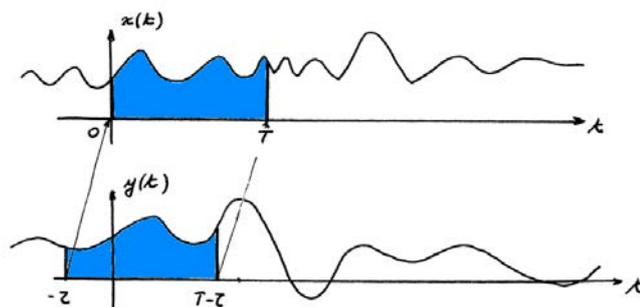
- les corrélateurs électroniques produisant une estimée de la fonction de corrélation ;
- les analyseurs de spectre permettant d'estimer le spectre (d'énergie ou de puissance) d'un signal.

On ne peut obtenir ces fonctions (corrélation, spectre) que de façon approchée (observation du signal sur une fenêtre temporelle finie, discrétisation du calcul du spectre, etc.). Il s'agit donc d'estimées et non des grandeurs théoriques qui restent généralement inaccessibles à la mesure.



Les corrélateurs : principe, cas analogique

- Estimation de la fonction de corrélation : signaux analogiques (réels)



$$R_{xy}(\tau) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} x(t)y(t-\tau)dt$$

que l'on approche sur $[0, T]$ par :

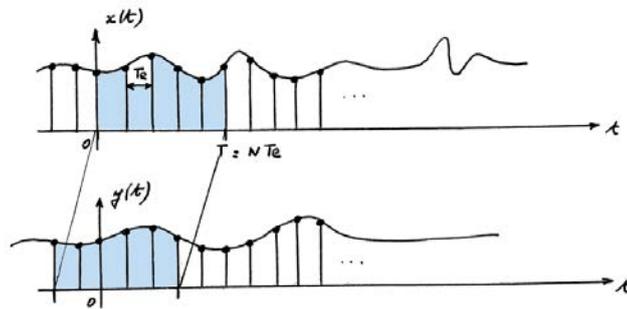
$$R_{xy}(\tau) \simeq \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t-\tau)dt$$

- opérateur de retard : $y(t) \rightarrow y(t - \tau)$
- opérateur de multiplication : $x(t)y(t - \tau)$
- opérateur d'intégration : $\frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t - \tau)dt$



Les corrélateurs : principe, cas discret

- Estimation de la fonction de corrélation : signaux discrétisés

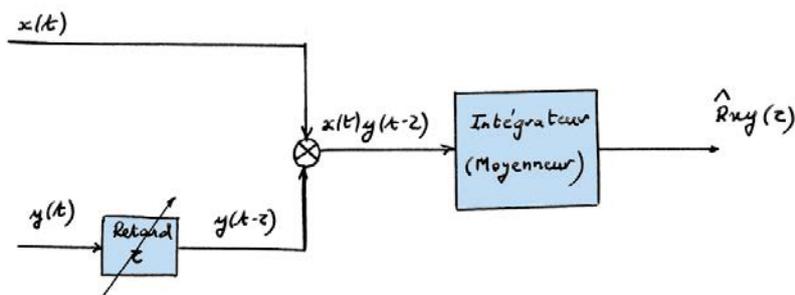


$$R_{xy}(mT_e) \simeq \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N x[kT_e]y[(k-m)T_e]$$

- échantillonnage de x et y : CAN (Conversion Analogique Numérique)
- retard (mémoire tampon) : $y[(k-m)T_e]$
- multiplieur (numérique) : $x[kT_e]y[(k-m)T_e]$
- accumulateur : $\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N x[kT_e]y[(k-m)T_e]$



Corrélateurs analogiques

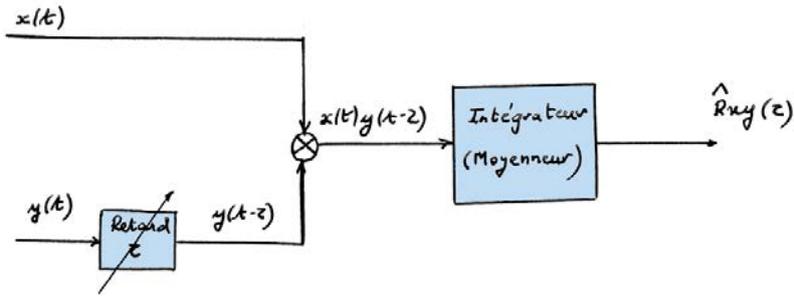


Ce sont les corrélateurs les plus anciens ($\simeq 1960$). Ils reposent sur des technologies très variées (analogiques : électronique, optique). Ils permettent d'obtenir une estimée de $R_{xy}(\tau)$ pour des valeurs continues de τ .

Les plus anciens fonctionnaient hors ligne avec des signaux enregistrés. Le retard variable τ était réalisé par bande magnétique (magnétophones à deux têtes). Ces systèmes mesuraient point à point et séquentiellement $R_{xy}(\tau)$ pour différentes valeurs de τ . Ils sont extrêmement lents !



Corrélateurs analogiques

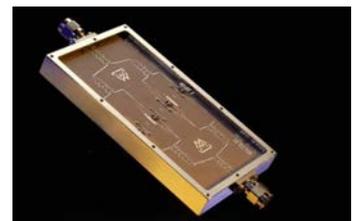
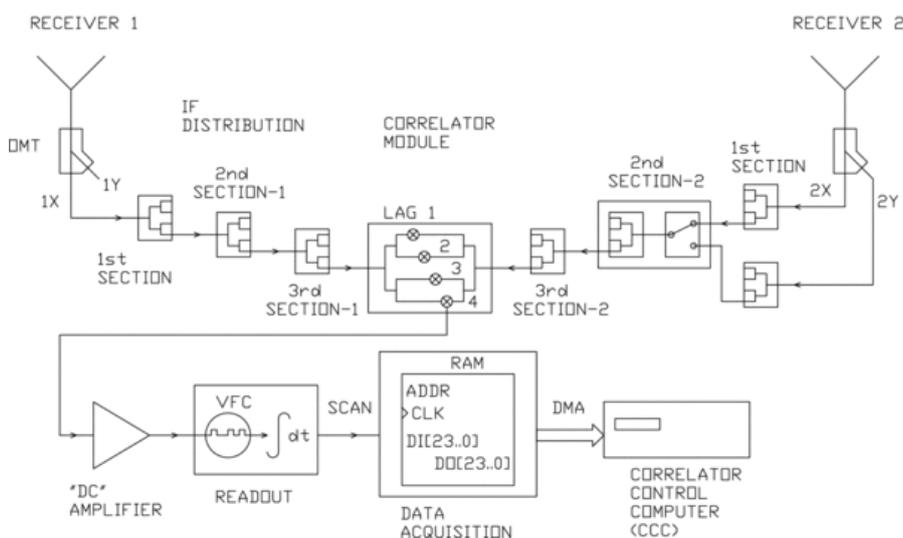


La corrélation analogique reste utilisée dans certains domaines de très hautes fréquences (10-100 GHz : ex. radioastronomie, ...)

- Les multiplieurs sont réalisés par des circuits dédiés
- Les retards sont réalisés par des lignes à retard analogiques (cables) ou des circuits LC. On peut également numériser le signal et le mettre dans une mémoire tampon pour le reconverter en analogique (CAN puis CNA*).
* CAN : conversion analogique numérique
* CNA : conversion numérique analogique
- Les intégrateurs sont réalisés avec des filtres passe-bas ou des amplificateurs opérationnels.



Corrélateurs analogiques



Réalisation d'un corrélateur analogique en astrophysique (interférométrie). Gamme : 2 à 18 GHz. 4 lignes à retards $\tau = 37.5, 12.5, -12.5, \text{ et } -37.5 \text{ ps}$.

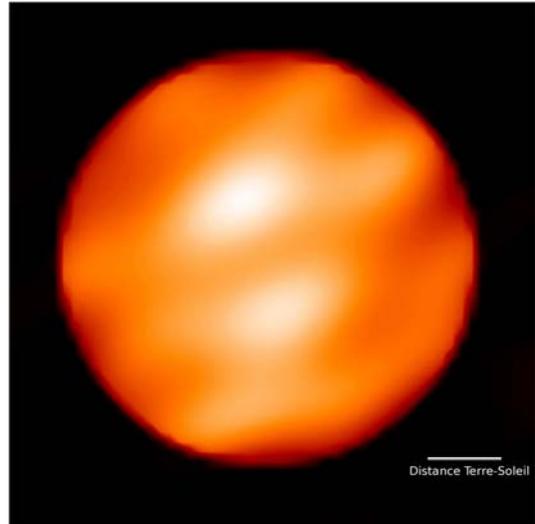
C. LI et al., Amiba wideband analog correlator, The Astrophysical Journal 716 (2010), 746.



Corrélateurs analogiques



(a)

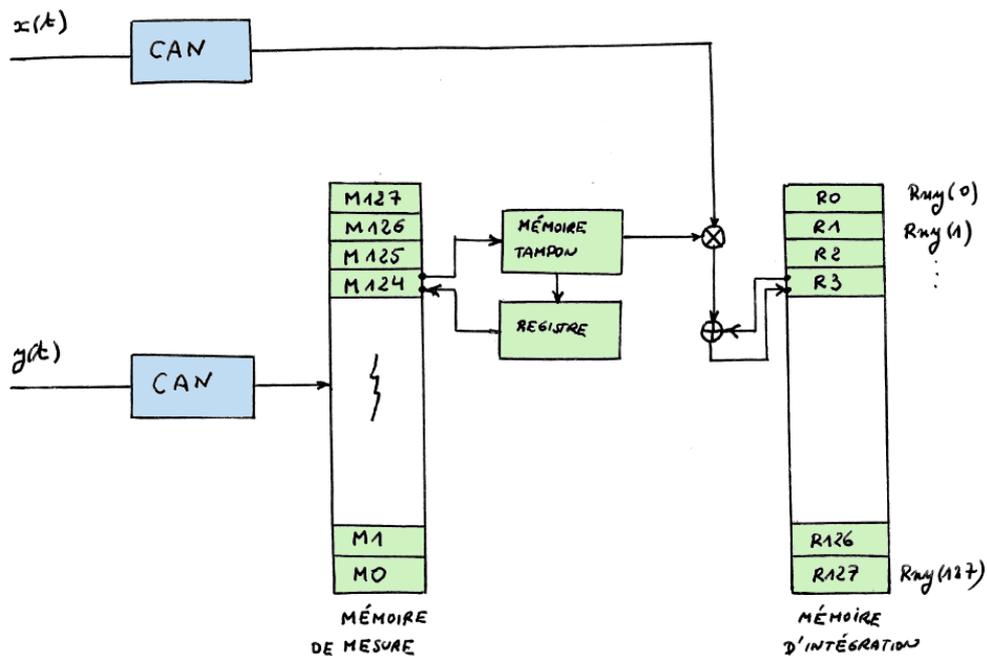


(b)

(a) Réseau de télescope Very Large Array VLA (USA) (b) Image de la surface de l'étoile Bételgeuse (interférométrie par corrélation, observatoire de Paris 2010).



Corrélateurs numériques en temps réel



Ce type de corrélateur, réalisé en circuits intégrés (registres à décalage) peut traiter des signaux en temps réel jusqu'à des fréquences d'échantillonnage $f_e = \frac{1}{T_e}$ de $\simeq 1$ à 10 Ghz.

Il peut également s'appuyer sur un processeur de traitement du signal.

* CAN : convertisseur analogique numérique

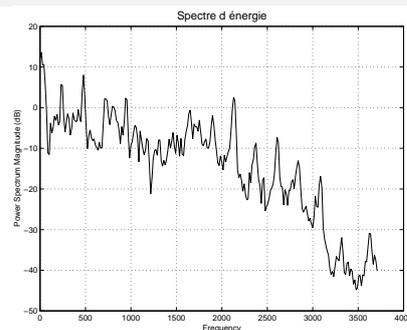
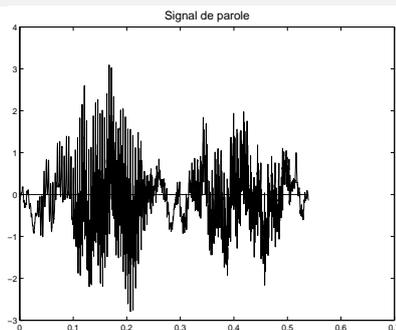


Corrélateurs numériques en temps réel



Corrélateur numérique Flex400R

Analyseurs électroniques de spectre



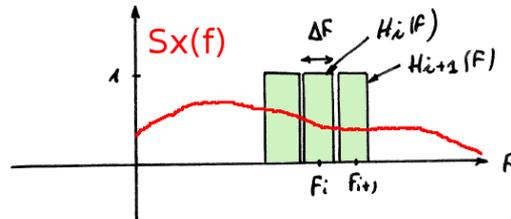
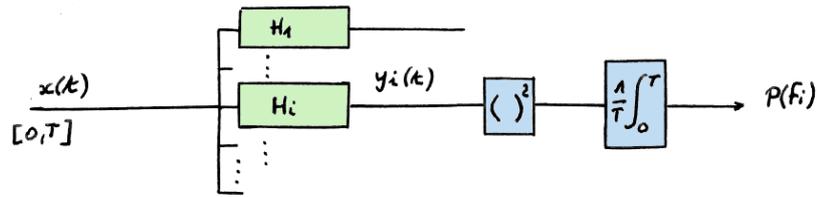
Les analyseurs de spectre fournissent, à partir d'un signal $x(t)$ observé sur une fenêtre $[0, T]$ (nécessairement finie) une estimée de la densité spectrale de puissance (spectre de puissance) ou d'énergie.

Si le signal est transitoire (à énergie finie), il faut bien recaler la fenêtre d'analyse sur la partie utile du signal.

On distingue plusieurs types d'analyseurs :

- Les analyseurs à bancs de filtres
- Les analyseurs à balayage de fréquence (superhétérodynes)
- Les analyseurs par Transformée de Fourier discrète (TFD)
- Les analyseurs par corrélation

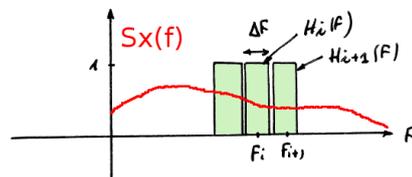
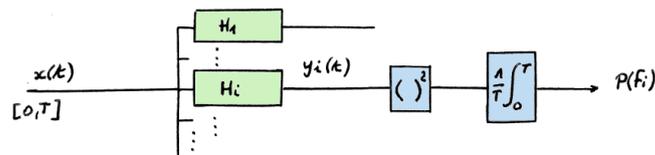
Analyseurs de spectre à bancs de filtres



Analyseur par banc de filtres

Ils reposent sur les principes décrits dans le chapitre V et sont constitués par un ensemble (banc) de filtres sélectifs contigus centrés sur les fréquences f_i pour lesquelles on souhaite mesurer le spectre de puissance. Ils sont tombés en désuétude, car très onéreux.

Analyseurs de spectre à bancs de filtres



La puissance en sortie du filtre H_i s'écrit :

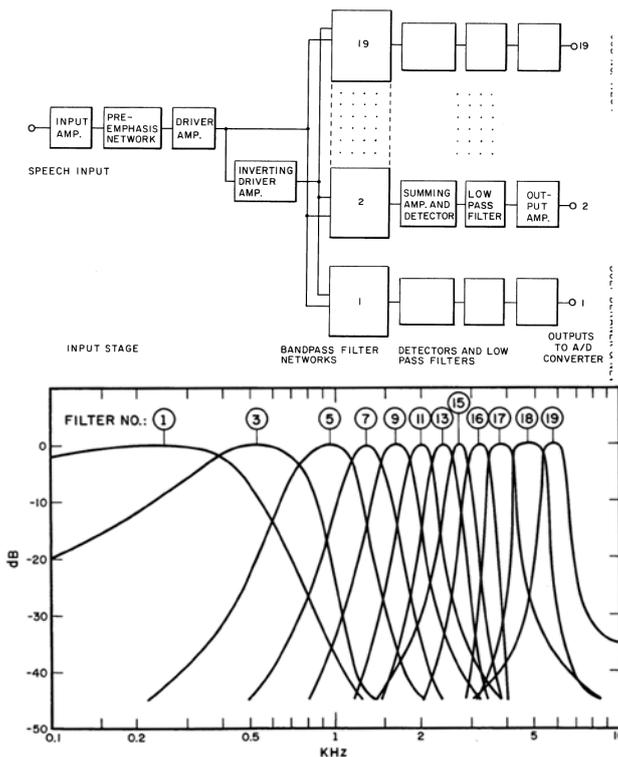
$$\begin{aligned}
 P(f_i) &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} |y_i(t)|^2 dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{y_i}(f) df = \int_{f_i - \frac{\Delta f}{2}}^{f_i + \frac{\Delta f}{2}} S_x(f) |H_i(f)|^2 df \simeq 2S_x(f_i) \Delta f \propto S_x(f_i)
 \end{aligned}$$

dans le cas où on a un spectre continu en f_i (cf chap. IV).

La mesure sur $[0, T]$ consiste à approcher $P(f_i)$ par :

$$P(f_i) \simeq \frac{1}{T} \int_0^T |y_i(t)|^2 dt$$

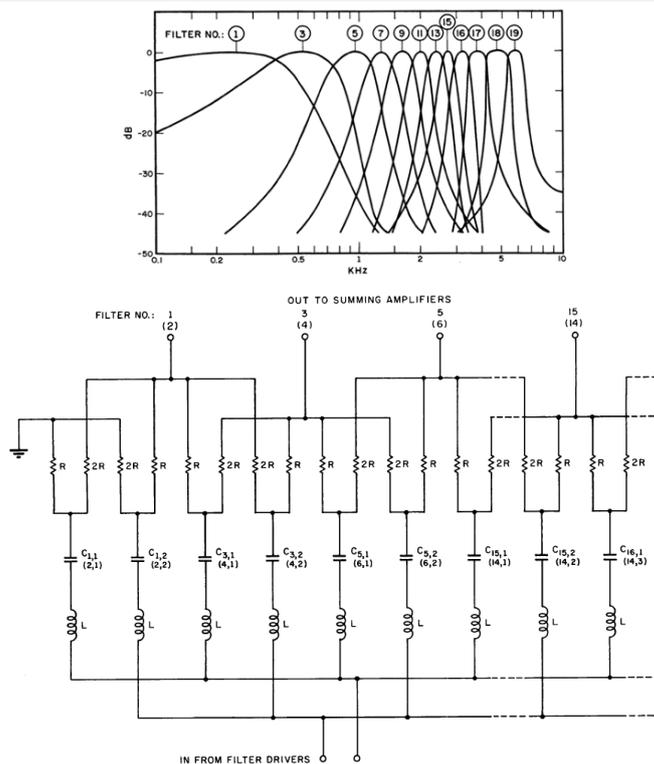
Analyseurs de spectre à bancs de filtres



Analyseurs de spectre pour un système de reconnaissance de la parole (NASA 1967)



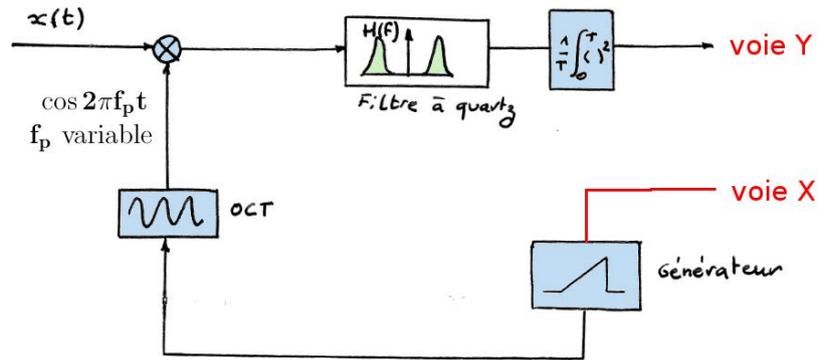
Analyseurs de spectre à bancs de filtres



Analyseurs de spectre pour un système de reconnaissance de la parole (NASA 1967)



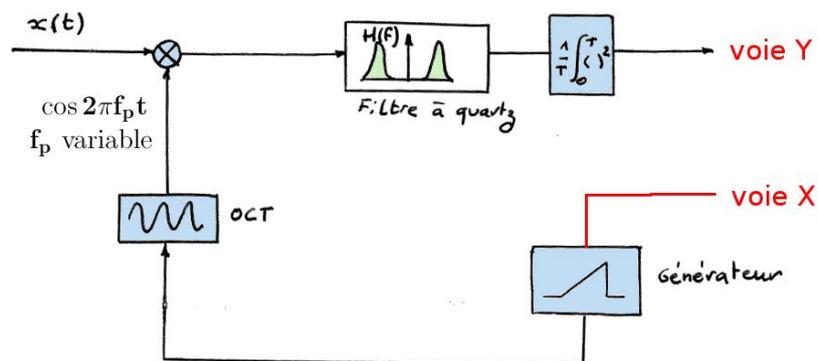
Analyseurs de spectre par filtres à balayage de fréquence



Analyseur à balayage de fréquence (superhétérodyne) 0 - 50 Ghz

- Il est constitué d'un seul filtre très sélectif de haute qualité centré autour d'une fréquence de 1MHz environ. Sa fréquence centrale est rendue «variable»(de façon virtuelle) en transposant le signal d'entrée en fréquence (translation du spectre de $x(t)$ par modulation AM).
- Pour cela on le multiplie par la sortie d'un oscillateur commandé en tension OCT.
- La commande de l'OCT peut être envoyée sur la voie X d'un oscilloscope, la sortie du filtre sur la voie Y pour afficher le spectre.

Analyseurs de spectre par filtres à balayage de fréquence



Analyseur à balayage de fréquence (superhétérodyne) 0 - 50 Ghz

Avantages :

- Capable de couvrir une très large gamme de fréquences globale.
- Capable de couvrir une large gamme de fréquences en un seul balayage (qqs Ghz).

Inconvénients :

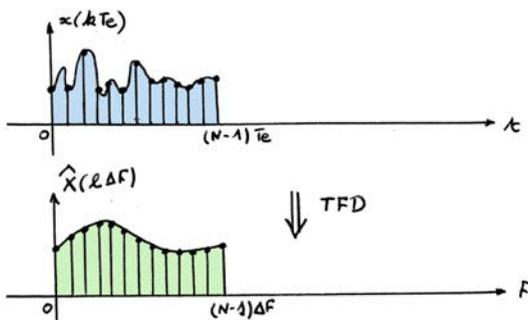
- Mesure uniquement le module du spectre, pas la phase.
- Difficultés à analyser des signaux transitoires (balayage des fréquences).

Analyseurs de spectre par filtres à balayage de fréquence



Analyseurs de spectre Panoramic et Polarad (1955-1960) (40 GHz, \simeq 70 kg!)

Analyseurs de spectre par Transformée de Fourier Discrète



Les analyseurs de spectre modernes permettent de traiter les signaux de façon numérique à des fréquences de plus en plus élevées.

- Transformée de Fourier continue :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

- Discrétisation du temps (pas $\Delta t = T_e$) + observation sur N échantillons :

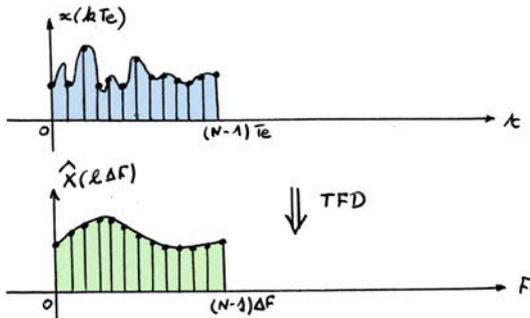
$$X(f) \simeq \hat{X}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x[kT_e]e^{-j2\pi fkT_e}$$

- Discrétisation des fréquences (pas $\Delta f = 1/(N T_e)$) :

$$\hat{X}(l\Delta f) = \sum_{k=0}^{N-1} x[kT_e]e^{-j2\pi \frac{kl}{N}} \quad l = 0, \dots, N-1$$

qui est l'expression de la *transformée de Fourier discrète* (TFD).

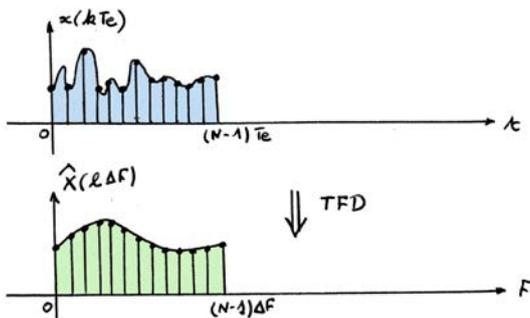
Analyseurs de spectre par Transformée de Fourier Discrète



- Conversion analogique numérique (CAN)
- Mise en mémoire de N échantillons
- Calcul TFD sur N échantillons : $\hat{X}(l\Delta f) = \sum_{k=0}^{N-1} x[kT_e]e^{-j2\pi \frac{kl}{N}}$ $l = 0, \dots, N - 1$
⇒ Module et phase du spectre accessibles
- Cette transformée est calculée par des algorithmes rapides (TFR : Transformée de Fourier Rapide ou FFT : Fast Fourier Transform) implantés sur des circuits spécialisés ou sur PC. L'algorithme de FFT le plus utilisé est celui de Cooley-Tukey (1965).
- Les CAN et circuits de calcul de FFT (DSP, FPGA, circuits intégrés) fonctionnent en temps réel jusqu'à des fréquences de $\simeq 100$ MHz.
- Les PC de dernière génération (3 Ghz-64 bits-multiproc.) peuvent traiter des FFT ($N = 1024$) jusqu'à 10-50 Mhz.



Analyseurs de spectre par Transformée de Fourier Discrète



Avantages :

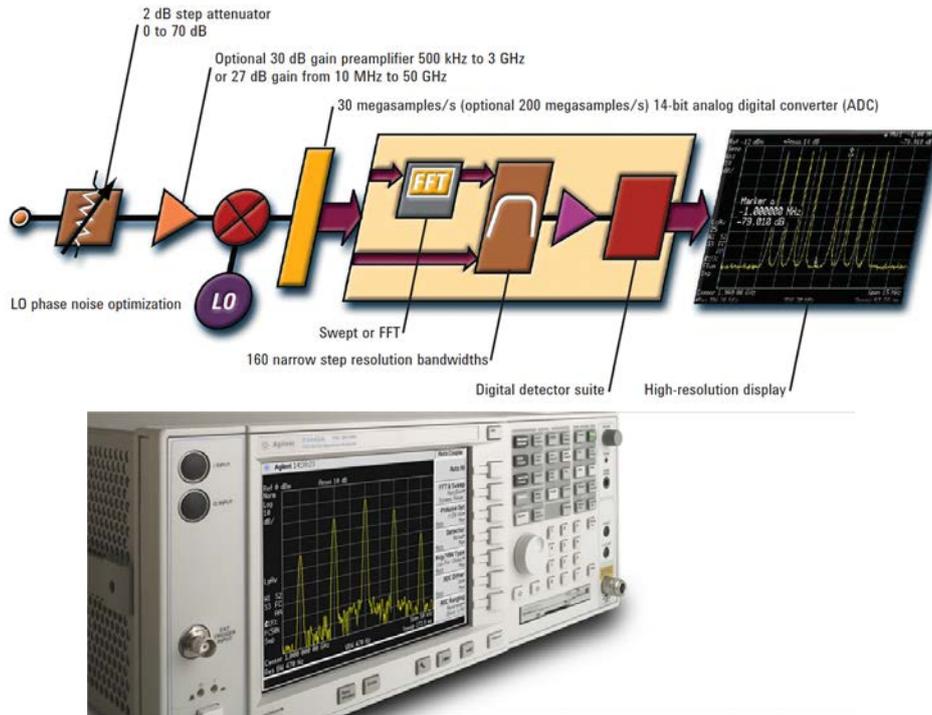
- Capable d'analyser des signaux transitoires (mis en mémoire).
- Capable de mesurer le module et la phase du spectre
- Le calcul de FFT peut se faire en différé ou en temps réel.

Inconvénients :

- Limitation en fréquence : les CAN sont limités à des fréquences $\rightarrow 100$ Mhz.
 - Utilisation de convertisseur de fréquence pour des fréquences plus élevées.
 - Mais la largeur de bande analysée reste limitée à 100 Mhz
- Coût élevé des CAN hautes fréquences



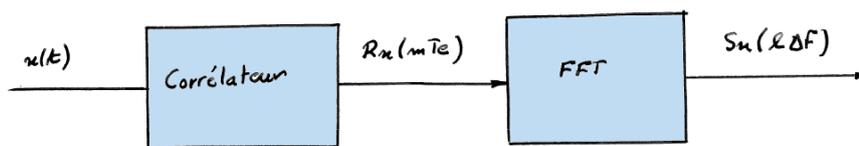
Analyseurs de spectre superhétérodyne et par FFT



Analyseur de spectre Agilent PSA E4448 à FFT et balayage en fréquence (3Hz-50GHz)



Analyseurs de spectre par corrélation



Ils consistent à :

- 1 utiliser un corrélateur électronique (numérique) pour obtenir une estimée de la fonction d'autocorrélation sur $[0, T]$ (N points) :

$$R_x(mT_e) \simeq \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N x[kT_e]x[(k-m)T_e]$$

- 2 calculer (par FFT) la transformée de Fourier discrète de $R_x(mT_e)$ sur M points ($M < N$) avec un pas $\Delta f > 1/(N T_e)$ pour obtenir une estimée du spectre de puissance :

$$S_x(l\Delta f) \simeq \sum_{k=0}^{M-1} R_x(kT_e) e^{-j2\pi k T_e l \Delta f} \quad l = 0, \dots, M-1$$

L'avantage de cette technique, par rapport au calcul direct de la TFD est qu'il est possible d'obtenir en temps réel de bonnes estimées de la fonction d'autocorrélation jusqu'à des fréquences élevées (10 GHz). On peut ensuite appliquer la FFT, plus lente (10-100 Mhz) sur un nombre limité de points (par ex. 1024) avec une bonne résolution fréquentielle.



FORMULAIRE

Propriétés des transformées de Laplace et de Fourier

Transformées usuelles

Fabrice Heitz

Sources complémentaires :

- Y. THOMAS, *Signaux et systèmes linéaires*, Masson, Paris, 1992.
- A.V. OPPENHEIM and A.S. WILLSKY with I.T. YOUNG, *Signals and Systems*, Prentice Hall, Signal Processing Series, Englewood Cliffs, 1983.
- J.P. DELMAS, *Éléments de théorie du signal : les signaux déterministes*, Ellipses, Paris, 1991.

Définitions et notations

- Décomposition en série de Fourier ($x(t)$ périodique) :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

avec : $a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$

- Transformée de Fourier :

▷ Variable f :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

▷ Variable $\omega = 2\pi f$:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- Transformée de Laplace bilatérale :

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

avec : $s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Delta} X(s) e^{st} ds$$

où Δ est une droite parallèle à $s = j\omega$ et située dans la région de convergence de $X(s)$.

Définitions et notations (suite)

- Fonctions usuelles :

- ▷ Fonction porte (créneau)

$$\text{rect}_T(t) = \begin{cases} 0 & |t| > \frac{T}{2} \\ 1 & |t| < \frac{T}{2} \end{cases}$$

- ▷ Fonction d'Heaviside (échelon unité)

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

- ▷ Fonction signe :

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

- ▷ Fonction sinus cardinal :

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

Série de Fourier : propriétés

Signal périodique	Coefficients de la série
$x(t)$ (période T_0)	a_k
$y(t)$ (période T_0)	b_k
$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t_0}$
$e^{jM(\frac{2\pi}{T_0})t} x(t)$	a_{k-M}
$x^*(t)$	a_{-k}^*
$x(-t)$	a_{-k}
$x(\alpha t)$, $\alpha > 0$ (période $\frac{T_0}{\alpha}$)	a_k
$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$	$a_k b_k$
$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\frac{2\pi}{T_0} a_k$
$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$ (avec $a_0 = 0$)	$\left(\frac{1}{jk(\frac{2\pi}{T_0})}\right) a_k$
$x(t)$ réel	$a_k = a_{-k}^*$
$x(t)$ réel et pair	a_k réel et $a_k = a_{-k}$
Relation de Parseval : (signaux périodiques)	$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) ^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k ^2$

Transformée de Fourier : propriétés

Signal	Transformée (en f)	Transformée (en ω)
$x(t)$	$X(f)$	$X(\omega)$
$x_1(t)$	$X_1(f)$	$X_1(\omega)$
$x_2(t)$	$X_2(f)$	$X_2(\omega)$
$a x_1(t) + b x_2(t)$	$a X_1(f) + b X_2(f)$	$a X_1(\omega) + b X_2(\omega)$
$x(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0} X(f)$	$e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
$e^{j2\pi f_0 t} x(t)$	$X(f - f_0)$	$X(\omega - \omega_0) \quad (\omega_0 = 2\pi f_0)$
$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$x^*(t)$	$X^*(-f)$	$X^*(-\omega)$
$x(-t)$	$X(-f)$	$X(-\omega)$
$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(f) X_2(f)$	$X_1(\omega) X_2(\omega)$
$x_1(t) \cdot x_2(t)$	$X_1(f) * X_2(f)$	$\frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$
$\frac{d}{dt} x(t)$	$j2\pi f X(f)$	$j\omega X(\omega)$
$tx(t)$	$\frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} X(f)$	$j \frac{d}{d\omega} X(\omega)$
$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(0) \delta(f)$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$
$x(t)$ réel	$\begin{cases} X(-f) & = & X^*(f) \\ X(-f) & = & X(f) \\ \text{Arg } X(-f) & = & -\text{Arg } X(f) \end{cases}$	$\begin{cases} X(-\omega) & = & X^*(\omega) \\ X(-\omega) & = & X(\omega) \\ \text{Arg } X(-\omega) & = & -\text{Arg } X(\omega) \end{cases}$
Dualité	$\begin{cases} g(t) & \xleftrightarrow{\mathcal{F}} & h(f) \\ h(t) & \xleftrightarrow{\mathcal{F}} & g(-f) \end{cases}$	$\begin{cases} g(t) & \xleftrightarrow{\mathcal{F}} & h(\omega) \\ h(t) & \xleftrightarrow{\mathcal{F}} & 2\pi g(-\omega) \end{cases}$
Relation de Parseval (signaux d'énergie finie)	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) ^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) ^2 df$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) ^2 d\omega$

Transformée de Laplace bilatérale : propriétés

Signal	Transformée	RDC
$x(t)$	$X(s)$	R
$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$	au moins $R_1 \cap R_2$
$x(t - t_0)$	$e^{-st_0} X(s)$	R
$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$	R translaté de s_0
$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{s}{a}\right)$	$s \in$ RDC si $\frac{s}{a} \in R$
$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	au moins $R_1 \cap R_2$
$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$	au moins R
$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R
$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	au moins $R \cap \{\mathbf{Re}(s) > 0\}$
Th. valeur finale		$\lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = x(+\infty)$
Th. valeur initiale $x(t) = 0, t < 0$		$\lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s) = x(0^+)$

⚠ **différence avec la transformée de Laplace monolatérale définie par :**

$$\mathcal{L}^+[x(t)] = X^+(s) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

on a la relation :

$$\mathcal{L}^+ \left[\frac{d}{dt}x(t) \right] = sX^+(s) - x(0^-)$$

si $x(t)$ ne présente pas d'impulsions à l'origine.

Transformées de Fourier usuelles

$\mathbf{x(t)}$	$\mathbf{X(f)}$	$\mathbf{X(\omega)}$
$\exp(j2\pi f_0 t)$	$\delta(f - f_0)$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \exp(j2\pi k f_0 t)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(f - k f_0)$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k \omega_0)$
1	$\delta(f)$	$2\pi \delta(\omega)$
$\exp(-a t) ; a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$sign(t)$	$v.p. \left(\frac{1}{j\pi f} \right)$	$v.p. \left(\frac{2}{j\omega} \right)$
$u(t)$	$v.p. \left(\frac{1}{j2\pi f} \right) + \frac{1}{2}\delta(f)$	$v.p. \left(\frac{1}{j\omega} \right) + \pi\delta(\omega)$
$rect_{2T}(t)$	$2T \operatorname{sinc}(2fT) = \frac{\sin(2\pi fT)}{\pi f}$	$2T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right) = \frac{2\sin(\omega T)}{\omega}$
$2f_0 \operatorname{sinc}(2f_0 t) = \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{\pi t}$	$rect_{2f_0}(f)$	$rect_{2\omega_0}(\omega)$
$\exp\left[-\pi\left(\frac{t^2}{\sigma^2}\right)\right]$	$\sigma \exp[-\pi(\sigma f)^2]$	$\sigma \exp\left[-\frac{(\sigma\omega)^2}{4\pi}\right]$
$\delta(t)$	1	1
$\delta^n(t)$ (dérivée $n^{\text{ième}}$)	$(j2\pi f)^n$	$(j\omega)^n$
$\delta(t - t_0)$	$\exp(-j2\pi f t_0)$	$\exp(-j\omega t_0)$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$	$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{k2\pi}{T}\right)$

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

Transformées de Fourier usuelles

(Fonctions nulles pour $t < 0$)

$\mathbf{x(t)}$	$\mathbf{X(f)}$	$\mathbf{X(\omega)}$
$u(t)$	$v.p. \left(\frac{1}{j2\pi f} \right) + \frac{1}{2}\delta(f)$	$v.p. \left(\frac{1}{j\omega} \right) + \pi\delta(\omega)$
$\exp(-at) u(t) ; \mathbf{Re}(a) > 0$	$\frac{1}{j2\pi f + a}$	$\frac{1}{j\omega + a}$
$t \exp(-at) u(t) ; \mathbf{Re}(a) > 0$	$\frac{1}{(j2\pi f + a)^2}$	$\frac{1}{(j\omega + a)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-at) u(t) ; \mathbf{Re}(a) > 0$	$\frac{1}{(j2\pi f + a)^n}$	$\frac{1}{(j\omega + a)^n}$
$\exp(-at) \sin(2\pi f_0 t) u(t) ; \mathbf{Re}(a) > 0$	$\frac{2\pi f}{(j2\pi f + a)^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\frac{\omega}{(j\omega + a)^2 + (\omega_0)^2}$
$\exp(-at) \cos(2\pi f_0 t) u(t) ; \mathbf{Re}(a) > 0$	$\frac{j2\pi f + a}{(j2\pi f + a)^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\frac{j\omega + a}{(j\omega + a)^2 + (\omega_0)^2}$

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

ANNEXE : Compléments sur les distributions

Les distributions S sont définies de façon générale comme des « fonctionnelles » linéaires continues qui associent à une « fonction test » $\phi(t)$ un scalaire.

Les « fonctions tests » $\phi(t)$ doivent être *continues, indéfiniment dérivables et de support borné*.

Le scalaire associé par la distribution S à la fonction ϕ est noté : $\langle S, \phi \rangle$.

- Propriétés des distributions :

- (I). linéarité :

$$\begin{aligned}\langle S, \phi_1 + \phi_2 \rangle &= \langle S, \phi_1 \rangle + \langle S, \phi_2 \rangle \\ \forall \lambda \quad \langle S, \lambda \phi \rangle &= \lambda \langle S, \phi \rangle\end{aligned}$$

- (II). continuité :

$$\text{Si } \phi_k \rightarrow \phi \text{ alors } \langle S, \phi_k \rangle \rightarrow \langle S, \phi \rangle.$$

- Opérations sur les distributions (définitions)

- (I). Addition de deux distributions :

$$\langle S + T, \Phi \rangle = \langle S, \Phi \rangle + \langle T, \Phi \rangle$$

- (II). Multiplication par un scalaire :

$$\langle \lambda S, \Phi \rangle = \langle S, \lambda \Phi \rangle = \lambda \langle S, \Phi \rangle$$

- (III). Translation d'une distribution :

$$\langle S(t - a), \Phi(t) \rangle = \langle S(t), \Phi(t + a) \rangle$$

- (IV). Transposition :

$$\langle S(-t), \Phi(t) \rangle = \langle S(t), \Phi(-t) \rangle$$

- (V). Changement d'échelle :

$$\langle S(at), \Phi(t) \rangle = \frac{1}{|a|} \langle S(t), \Phi\left(\frac{t}{a}\right) \rangle$$

- (VI). Multiplication par une fonction indéfiniment dérivable ψ :

$$\langle \psi S, \Phi \rangle = \langle S, \psi \Phi \rangle$$

- (VII). Dérivation :

$$\langle S', \Phi \rangle = - \langle S, \Phi' \rangle$$

- (VIII). Convolution de deux distributions :

$$\langle S * T, \Phi \rangle = \langle S(t), \langle T(t'), \Phi(t + t') \rangle \rangle$$

lorsque le produit de convolution existe.