

---

# Introduction à la Relativité Générale

avec exercices corrigés

# Table des matières

<b>1</b>	<b>L'espace-temps de la relativité restreinte</b>	<b>5</b>
1.1	Fondements de la Relativité Restreinte . . . . .	5
1.1.1	Postulats de Poincaré-Einstein . . . . .	6
1.1.2	Transformation de Lorentz-Poincaré . . . . .	6
1.1.3	Formule de composition des vitesses . . . . .	7
1.2	Invariants de l'espace-temps plat . . . . .	8
1.2.1	Espace-temps plat . . . . .	8
1.2.2	Vitesse de propagation des interactions . . . . .	8
1.2.3	Intervalle entre deux évènements . . . . .	9
1.2.4	Durée propre . . . . .	9
1.3	Structure de l'espace-temps plat . . . . .	10
1.3.1	Intervalle du genre lumière . . . . .	10
1.3.2	Intervalle du genre temps . . . . .	11
1.3.3	Intervalle du genre espace . . . . .	12
1.3.4	L'espace-temps euclidien de Poincaré . . . . .	12
1.4	Métrique de l'espace-temps plat . . . . .	13
1.4.1	Quadrivecteurs . . . . .	13
1.4.2	Produit scalaire . . . . .	13
1.4.3	Espace-temps de Poincaré-Minkowski . . . . .	14
1.4.4	Tenseur fondamental de l'espace-temps plat . . . . .	14
1.5	Énergie . . . . .	15
1.5.1	Quadrivecteur vitesse unitaire . . . . .	15
1.5.2	Quadrivecteur impulsion-énergie . . . . .	16
1.5.3	Invariance de la norme du quadrivecteur impulsion-énergie . . . . .	16
1.6	Exercices . . . . .	17
1.6.1	Décalage spectral de la lumière des galaxies . . . . .	17
1.6.2	Correction . . . . .	18
1.6.3	La transformation de Lorentz-Poincaré est une rotation de l'espace-temps . . . . .	19
1.6.4	Correction . . . . .	20
1.6.5	Effet Compton . . . . .	22
1.6.6	Correction . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Électromagnétisme et dynamique des milieux continus</b>	<b>25</b>
2.1	Covariance des lois de la Physique . . . . .	25
2.1.1	Quadrivecteurs . . . . .	25

2.1.2	Tenseurs covariants d'ordre quelconque . . . . .	26
2.1.3	Composantes covariantes et contravariantes . . . . .	26
2.2	Le tenseur champ électromagnétique . . . . .	27
2.3	Les équations de Maxwell-Lorentz . . . . .	29
2.3.1	Quadrivecteur densité de courant électrique . . . . .	29
2.3.2	Premier groupe des équations de Maxwell-Lorentz . . . . .	30
2.3.3	Second groupe des équations de Maxwell-Lorentz . . . . .	31
2.3.4	Loi de conservation de l'électricité . . . . .	32
2.4	Dynamique classique des milieux continus . . . . .	33
2.4.1	Dérivées partielles et totale par rapport au temps . . . . .	33
2.4.2	Équation de conservation . . . . .	34
2.4.3	Forces de masse et forces superficielles . . . . .	34
2.4.4	Tenseur des contraintes . . . . .	34
2.4.5	Équations générales de la dynamique des milieux continus . . . . .	36
2.4.6	Autre expression des équations générales . . . . .	37
2.5	Dynamique relativiste des milieux continus . . . . .	38
2.5.1	Équations relativistes dans un système de repos . . . . .	38
2.5.2	Équations relativistes sous forme tensorielle . . . . .	40
2.6	Tenseur Impulsion-Énergie . . . . .	40
2.6.1	Tenseur impulsion-énergie d'un milieu continu . . . . .	40
2.6.2	Quadrivecteur densité de force de Lorentz . . . . .	41
2.6.3	Tenseur impulsion-énergie du champ électromagnétique . . . . .	42
2.7	Exercices . . . . .	43
2.7.1	Quadrivecteur dalembertien . . . . .	43
2.7.2	Correction . . . . .	44
2.7.3	Équations fondamentales de la dynamique relativiste des milieux continus . . . . .	44
2.7.4	Correction . . . . .	45
2.7.5	Quadrivecteur potentiel . . . . .	46
2.7.6	Correction . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Idées de base de la relativité générale</b> . . . . .	<b>48</b>
3.1	Il faut modifier la loi de gravitation . . . . .	48
3.2	Gravitation et accélération équivalentes . . . . .	49
3.2.1	Principe d'équivalence de Newton . . . . .	49
3.2.2	Mesures dans des champs de gravitation et d'accélération . . . . .	50
3.2.3	Principe d'équivalence d'Einstein . . . . .	51
3.2.4	Équivalence locale entre gravitation et accélération . . . . .	51
3.3	Systèmes de référence équivalents . . . . .	52
3.3.1	Critique des fondements de la mécanique classique . . . . .	52
3.3.2	Principe de relativité généralisée . . . . .	53
3.3.3	Une idée audacieuse . . . . .	53
3.4	Nécessité d'une géométrie non-euclidienne . . . . .	53
3.4.1	Systèmes de référence en rotation . . . . .	54
3.4.2	Décalage gravitationnel . . . . .	55
3.4.3	Courbure des rayons lumineux . . . . .	56

3.4.4	Systèmes de référence non inertiels . . . . .	56
3.5	Principe de relativité généralisé . . . . .	57
3.5.1	Espace non euclidien : surface sphérique à deux dimensions . .	57
3.5.2	Coordonnées curvilignes de Gauss . . . . .	58
3.5.3	Covariance des lois de la nature . . . . .	58
3.6	La matière-énergie déforme l'espace-temps . . . . .	59
3.6.1	Le contenu de l'espace pourrait déterminer sa métrique . . . .	59
3.6.2	L'espace non euclidien de Poincaré . . . . .	59
3.6.3	Chronogéométrie de l'espace-temps . . . . .	60
3.6.4	La matière-énergie détermine la chronogéométrie de l'espace- temps . . . . .	61
3.7	L'espace-temps riemannien . . . . .	62
3.7.1	Courbure de l'espace-temps . . . . .	62
3.7.2	Principe des géodésiques . . . . .	63
3.8	Les équations d'Einstein . . . . .	64
3.9	Exercices . . . . .	65
3.9.1	Géométrie à bord d'un disque tournant . . . . .	65
3.9.2	Correction . . . . .	66
3.9.3	Décalage spectral gravitationnel . . . . .	69
3.9.4	Correction . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Espace-temps de la Relativité Générale</b>	<b>71</b>
4.1	Espace-temps à courbure riemannienne . . . . .	71
4.1.1	La variété espace-temps $V_4$ . . . . .	71
4.1.2	Métrique spatiale non euclidienne . . . . .	72
4.1.3	Temps propre . . . . .	72
4.1.4	Élément de distance spatiale . . . . .	73
4.2	Principe d'équivalence . . . . .	74
4.2.1	Métrique euclidienne tangente . . . . .	74
4.2.2	Système inertiel local . . . . .	75
4.3	Principe des géodésiques . . . . .	76
4.3.1	Système différentiel des géodésiques . . . . .	76
4.3.2	Approximation newtonienne . . . . .	77
4.3.3	Propagation d'un rayon lumineux . . . . .	78
4.4	Équations d'Einstein . . . . .	78
4.4.1	Déformation de l'espace-temps de la relativité restreinte . . . .	79
4.4.2	Contraintes imposées aux équations d'Einstein . . . . .	80
4.4.3	Les équations de la gravitation relativiste . . . . .	80
4.4.4	Rigidité de l'espace-temps . . . . .	82
4.4.5	Limite newtonienne . . . . .	82
4.5	Champ de gravitation central symétrique . . . . .	84
4.5.1	Champ à symétrie centrale dans le vide . . . . .	84
4.5.2	Singularité de Schwarzschild . . . . .	86
4.5.3	Champ à symétrie centrale à l'intérieur de la matière . . . . .	86
4.6	Ondes gravitationnelles . . . . .	87
4.6.1	Équations d'Einstein linéarisées . . . . .	87

4.6.2	Propagation dans le vide . . . . .	90
4.7	Exercices . . . . .	91
4.7.1	Élément de distance spatiale dans un système en rotation . . .	91
4.7.2	Correction . . . . .	91
4.7.3	Métrie d'un champ de gravitation central symétrique . . . .	92
4.7.4	Correction . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Vérifications expérimentales</b>	<b>96</b>
5.1	Avance du périhélie de Mercure . . . . .	96
5.1.1	Insuffisance de la théorie newtonienne . . . . .	96
5.1.2	Mouvement d'une particule dans un champ de Schwarzschild .	97
5.1.3	Avance du périhélie des planètes . . . . .	98
5.2	Déviations des rayons lumineux . . . . .	99
5.2.1	Équation de la déviation d'un rayon lumineux . . . . .	100
5.3	Décalage gravitationnel de la fréquence d'un rayonnement . . . . .	101
5.3.1	Décalage théorique d'une fréquence . . . . .	101
5.3.2	Mesures du décalage gravitationnel . . . . .	102
5.3.3	Système de positionnement GPS . . . . .	103
5.4	Déclin de l'orbite d'un pulsar double . . . . .	104
5.4.1	Émission radio d'un pulsar . . . . .	104
5.4.2	Pulsars binaires . . . . .	104
5.4.3	Pulsar binaire PSR 1913+16 . . . . .	105
5.5	Exercices . . . . .	105
5.5.1	Avance séculaire du périhélie de Mercure . . . . .	105
5.5.2	Correction . . . . .	106
5.5.3	Variation de la période orbitale d'un pulsar binaire . . . . .	107
5.5.4	Correction . . . . .	107

# Chapitre 1

## L'espace-temps de la relativité restreinte

La *relativité générale* est une théorie de la gravitation qui se substitue à celle de Newton. On a tendance actuellement à parler de *gravitation relativiste* plutôt que de relativité générale. Cependant, comme celle-ci constitue la suite de la relativité restreinte, il semble logique de conserver l'appellation traditionnelle, l'ensemble des relativités restreintes et générale formant la *théorie de la relativité*.

La relativité restreinte considère que les phénomènes physiques sont décrits dans un cadre infini à quatre dimensions formé par l'union inséparable de l'espace géométrique et du temps, appelé *l'espace-temps*. La matière n'apparaît pas pour influencer sur la structure même de ce cadre et les effets gravitationnels sont ainsi supposés négligeables.

Par contre, la relativité générale va introduire la matière et l'énergie dans l'espace-temps relativiste pour le modifier considérablement. Selon la formule lapidaire de Thibault Damour dans son ouvrage consacré à Albert Einstein, la théorie de la relativité générale peut être résumée en une phrase :

**L'espace-Temps est une structure élastique qui est déformée par la présence, en son sein, de Masse-Energie.**

Nous verrons que l'étude de cette déformation conduit effectivement aux équations fondamentales d'Einstein. Pour y aboutir, il faut cependant parcourir un long chemin. Il faut également bien connaître la théorie de la relativité restreinte dont nous rappelons les résultats essentiels au cours de ce chapitre.

### 1.1 Fondements de la Relativité Restreinte

La relativité restreinte fut créée au début du 20<sup>e</sup> siècle en se basant sur un phénomène particulier : les ondes électromagnétiques. En cherchant l'invariance des équations de Maxwell, Lorentz et Poincaré aboutirent aux formules relativistes de passage des coordonnées d'espace et de temps entre deux référentiels en translation

uniforme l'un par rapport à l'autre. Ces formules fondamentales de la relativité restreinte constituent **la transformation de Lorentz-Poincaré**.

De son côté, Einstein postula l'invariance de la vitesse de la lumière d'une source par rapport à tout référentiel en translation uniforme ce qui lui permit d'aboutir également à cette transformation fondamentale. Ce postulat sur la lumière est encore largement utilisé pour l'enseignement de la relativité restreinte alors qu'il pose un problème essentiel qui est complètement occulté.

La relativité restreinte impose en effet une loi universelle à tous les phénomènes physiques. Pourquoi la lumière jouerait-elle un rôle majeur dans les phénomènes qui n'ont aucun rapport avec elle ? Pourquoi les rapports fondamentaux entre l'espace et le temps dépendraient-ils *a priori* d'un phénomène électromagnétique particulier ?

### 1.1.1 Postulats de Poincaré-Einstein

Ce fondement électromagnétique de la relativité restreinte fut critiqué dès 1910 et divers travaux de recherche réalisés au cours du 20<sup>e</sup> siècle montrèrent la possibilité de postulats basés uniquement sur des propriétés de l'espace et du temps. Jean-Marc Lévy-Leblond retrouva ces résultats et milita pour rénover l'enseignement des bases de la relativité restreinte. Ces nouveaux "postulats" sont les suivants :

1. **Principe de relativité** : les lois des phénomènes physiques doivent être les mêmes, soit pour un observateur fixe, soit pour un observateur entraîné dans un mouvement de translation uniforme.
2. **L'espace est homogène** : l'espace a les mêmes propriétés en chaque point. Autrement dit, l'espace est invariant par translation ; les origines de l'espace sont arbitraires pour l'expression des lois physiques.
3. **L'espace est isotrope** : toutes les directions dans l'espace sont physiquement équivalentes. Autrement dit, après rotation dans l'espace d'un référentiel, celui-ci reste équivalent au référentiel d'origine.
4. **Le temps est homogène** : le temps est identique en tout point d'un même référentiel. Toutes les horloges d'un référentiel donné doivent être strictement réglées à une même heure.
5. **Principe de causalité** : tout phénomène physique peut être relié à une cause. Ce postulat est celui de l'existence même des lois de la nature.

Nous appelons **postulats de Poincaré-Einstein** les cinq postulats ci-dessus. On voit qu'ils ne font aucune référence à un phénomène physique particulier.

### 1.1.2 Transformation de Lorentz-Poincaré

Partant des postulats de Poincaré-Einstein, le problème est d'établir des relations entre les coordonnées de deux systèmes de référence en translation à vitesse

constante l'un par rapport à l'autre. Pour cela, considérons les deux référentiels schématisés sur la figure 1.1.

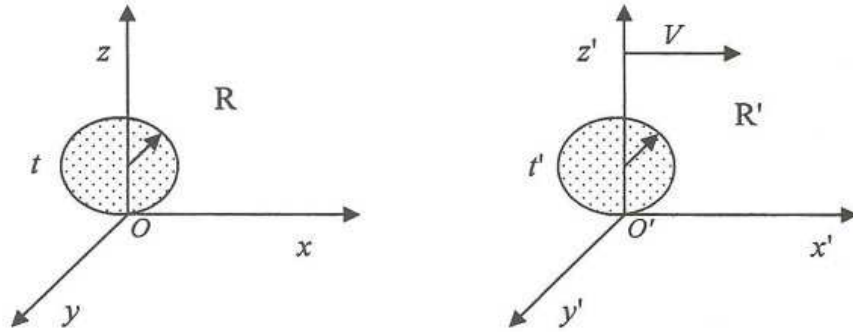


FIGURE 1.1.

Les deux référentiels R et R' ont respectivement pour coordonnées spatiales  $x, y, z$  et  $x', y', z'$  et pour coordonnée temporelle  $t$  et  $t'$ . Le référentiel R' se déplace par rapport à R à la vitesse constante  $V$  le long d'un axe  $Ox$ ; **c'est un référentiel d'inertie**. On suppose que le point  $O'$  de R' est passé au temps  $t = 0$  au point  $O$ .

Les relations entre les coordonnées d'espace et de temps des référentiels R et R' sont obtenus en utilisant les postulats de la relativité restreinte énoncés ci-dessus. Leur démonstration aboutit à la mise en évidence d'une vitesse limite lors de l'addition des vitesses de plusieurs référentiels. Cette vitesse limite est appelée **constante de structure de l'espace-temps**. Elle est identifiée à la plus grande vitesse mesurée qui est celle de la vitesse de la lumière dans le vide, notée  $c$ .

Finalement, le principe de relativité est vérifiée par les lois physiques si l'on effectue la transformation suivante, appelée **transformation spéciale de Lorentz-Poincaré** :

$$x' = \gamma(V)(x - V t) ; y' = y ; z' = z ; t' = \gamma(V)(t - V x/c^2) \quad (1.1)$$

avec :

$$\gamma(V) = (1 - V^2/c^2)^{-1/2} \quad (1.2)$$

Cette transformation se généralise pour des référentiels ayant des vitesses relatives uniformes dans une direction quelconque. Les formules correspondantes constituent **la transformation de Lorentz-Poincaré**.

### 1.1.3 Formule de composition des vitesses

Considérons un troisième référentiel R'' qui est en translation uniforme par rapport à R' à la vitesse  $U$ . La vitesse de R'' par rapport au référentiel R, notée  $W$ , est donnée par :



$$W = (V + U)(1 + VU/c^2) \quad (1.3)$$

Cette loi de composition des vitesses montre que si l'une des vitesses  $V$  ou  $U$  est égale à  $c$ , la vitesse résultante  $W$  est toujours égale à  $c$ . La constante de structure de l'espace-temps apparaît comme une vitesse que l'on ne peut pas dépasser.

Remarquons que la loi relativiste de composition des vitesses s'identifie à la loi galiléenne de la mécanique classique pour de faibles vitesses  $V$  et  $U$  par rapport à  $c$ . Cette nouvelle loi montre que la mécanique newtonienne doit être généralisée.

## 1.2 Invariants de l'espace-temps plat

La transformation de Lorentz-Poincaré montre que l'espace et le temps sont inséparables. Tout phénomène physique élémentaire, appelé **évènement**, a lieu dans l'espace à un instant donné et il est déterminé par trois coordonnées d'espace et une de temps.

### 1.2.1 Espace-temps plat

La position d'un point  $M$  immobile dans l'espace, représentant le lieu d'un évènement, peut être déterminé par trois coordonnées  $x, y, z$ . Pour chaque point  $M$ , il existe en son voisinage un nombre quelconque d'autres points dont la position peut être déterminée par des coordonnées aussi voisines que l'on veut de celles de  $M$ . On dit que **l'espace est un continuum à trois dimensions**.

Le temps,  $t$ , est également une variable continue. Tous les évènements physiques sont déterminés par quatre coordonnées continues,  $x, y, z, t$ . L'espace ponctuel formé par l'ensemble des points dans lequel se situent tous les évènements d'eterminés par quatre coordonnées constitue un continuum qui est appelé *l'espace-temps*.

**L'espace-temps de la relativité restreinte est plat.** Nous verrons plus précisément cette notion par la suite par opposition aux espaces courbes ; **la courbure d'un espace plat est nulle**. Dans l'espace-temps plat, les rayons lumineux suivent des droites ; un rayon lumineux dont la source suit une ligne droite se déplace dans un plan.

### 1.2.2 Vitesse de propagation des interactions

L'invariant fondamental de l'espace-temps est **la constante de structure de l'espace-temps**. Cet invariant est identifié à la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide. C'est également la vitesse de propagation des interactions gravifiques.

Cet invariant résulte directement du principe de relativité qui nécessite d'une part **l'existence d'une vitesse limite des interactions** et **une vitesse limite**

**identique dans tous les référentiels d'inertie.** Il permet de mettre en évidence un autre invariant de l'espace-temps, c'est-à-dire une grandeur qui reste inchangée par une transformation de Lorentz-Poincaré, appelée **intervalle entre deux évènements**.

### 1.2.3 Intervalle entre deux évènements

Dès 1905, Henri Poincaré démontra qu'il existe une quantité inavariante sous l'action d'une transformation de Lorentz-Poincaré. La racine carrée de cet invariant a été appelée par la suite intervalle entre deux évènements.

Considérons un premier évènement  $A_1$  quelconque repéré dans l'espace-temps par les coordonnées  $x, y, z, t$  dans un référentiel  $R$ . Un second évènement  $A_2$  infiniment proche a pour coordonnées  $x+dx, y+dy, z+dz, t+dt$ . Formons la quantité suivante :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (1.4)$$

La quantité infinitésimale  $ds$  est l'intervalle entre les deux évènements  $A_1$  et  $A_2$ . Si l'on considère un second référentiel  $R'$  en translation uniforme par rapport à  $R$ , dans lequel ces mêmes évènements sont repérés, on peut écrire l'expression de l'intervalle  $ds'$  en fonction des coordonnées de  $R'$ . L'application de la transformation de Lorentz-Poincaré permet de transformer l'expression (1.4) en fonction des coordonnées de  $R'$ . On démontre ainsi que  $ds^2 = ds'^2$ . De plus, le  $ds^2$  est invariant par translation, rotation spatiale et retournements d'espace et de temps.

L'intervalle entre deux évènements est donc un invariant de l'espace-temps de la relativité restreinte.

### 1.2.4 Durée propre

Considérons toujours nos deux référentiels schématisés sur la figure 1.1. Une horloge  $H'$  est fixe dans  $R'$ ; elle se déplace par rapport à  $R$  durant un temps  $dt$ , d'une distance  $dl$  telle que :  $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = V^2 dt^2$ . Cette horloge étant fixe dans  $R'$ , sa position n'aura pas varié durant ce temps, d'où :  $dx' = dy' = dz' = 0$ .

Notons  $\tau$  le temps mesuré par l'horloge  $H'$  de  $R'$ . L'intervalle  $ds'$  dans  $R'$  correspond au déplacement infinitésimal  $dl$  de l'horloge dans  $R$  se réduit donc à :  $ds' = c d\tau$ . L'invariance de cet intervalle nous permet alors d'écrire, selon (1.4) :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 = (c^2 - V^2) dt^2 = ds'^2 = c^2 d\tau^2 \quad (1.5)$$

Cette dernière relation donne l'expression de la durée mesurée par l'horloge  $H'$  fixe dans le référentiel  $R'$  :

$$d\tau = dt/\gamma(V) \quad (1.6)$$

Par définition, le temps mesuré par une horloge fixe en un point d'un référentiel est appelé **le temps propre** du référentiel ; le temps propre sera toujours noté par

la suite par la lettre grecque  $\tau$ . Ce temps est celui que mesurerait une horloge qui serait attachée à une particule se déplaçant dans l'espace-temps.

La durée  $d\tau$  est un intervalle de temps appelé **durée propre**. Cette quantité est un invariant de l'espace-temps plat de la relativité restreinte mais également, nous le verrons par la suite, de l'espace-temps courbe de la relativité générale.

La durée propre est donc un invariant dans une transformation de Lorentz-Poincaré. L'invariance de la durée propre montre que la marche de deux horloges strictement identiques, placées respectivement dans deux référentiels d'inertie, reste toujours physiquement le même conformément au principe de relativité.

Pour repérer une particule dans l'espace-temps, il faut cependant utiliser, dans un référentiel donné, **un temps-coordonnée**, que nous noterons en général par une lettre latine,  $t$ , par exemple. Le temps propre ne balise pas tout l'espace ; c'est un paramètre intrinsèque lié à chaque horloge. C'est un "temps personnel" qui ne doit pas être confondu avec le temps-coordonnée.

La durée  $dt$  qui figure dans la formule (1.6) est la différence entre deux temps-coordonnées ( $t + dt$ ) et  $t$ . Cette quantité  $dt$  est appelée **durée impropre** ; c'est une grandeur mesurée entre le temps marqué par deux horloges placées à des endroits différents ; dans le cas présent, ces lieux sont infiniment voisins.

## 1.3 Structure de l'espace-temps plat

Suivant les valeurs respectives des quantités spatiales et temporelles, le carré de l'intervalle peut être positif, nul ou négatif.

### 1.3.1 Intervalle du genre lumière

Lorsque l'intervalle infinitésimal est nul, on a :  $c^2 dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ . Les deux évènements peuvent être reliés par un rayon lumineux. L'intervalle est dit du **genre lumière**.

Considérons alors le lieu de tous les évènements possibles qui peuvent être reliés par un signal lumineux à un évènement déterminé  $O$  que nous allons prendre pour origine  $O$  de l'espace-temps représenté dans un référentiel  $R$ . Pour un évènement quelconque  $M$ , situé au point  $x, y, z, t$  et tel que l'intervalle avec  $O$  soit nul, on a :

$$c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (1.7)$$

Dans l'espace-temps à quatre dimensions, l'équation (1.7) est celle d'un **hyper-cône** représentant le lieu des trajectoires des rayons lumineux issus de l'origine  $O$ . Afin de pouvoir visualiser une telle hypersurface et mieux étudier ses propriétés, limitons-nous aux évènements pour lesquels  $z = 0$ . On obtient alors l'équation :

$$c^2 t^2 = x^2 + y^2 \quad (1.8)$$

C'est l'équation d'une famille continue de cercles, centrés sur l'axe du temps, chaque cercle étant de rayon  $ct$ . on obtient l'équation d'un cône appelé **cône de lumière** (Fig. 1.2). Tous les évènements situés sur le cône de lumière peuvent être reliés à l'évènement  $O$  par un signal de vitesse  $c$ .

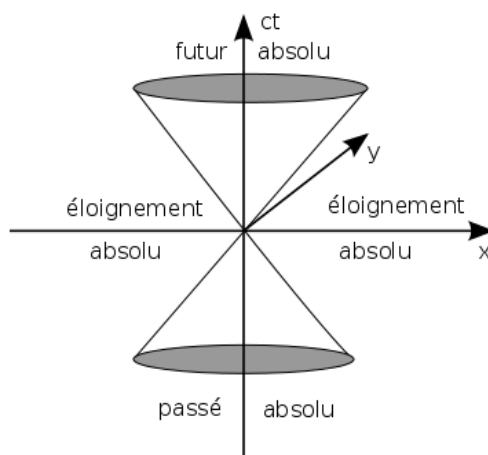


FIGURE 1.2.

Tous les évènements situés à l'intérieur du cône peuvent être reliés à  $O$  par un signal de vitesse inférieure à  $c$ .

### 1.3.2 Intervalle du genre temps

Lorsque l'intervalle entre deux évènements est tel que :  $ds^2 > 0$ , la partie temporelle de l'intervalle prédomine sur la partie spatiale. L'intervalle  $ds$  est alors un nombre réel et il est appelé **l'intervalle du genre temps**.

Remarquons que deux évènements relatifs à une même particule matérielle sont séparés par un intervalle qui est nécessairement du genre temps. En effet, la distance parcourue par la particule entre les deux évènements, situés respectivement aux temps  $t_0$  et  $t_1$ , doit rester inférieure à  $c(t_1 - t_0)$ . Si  $l_{12}$  est la distance parcourue, on a toujours  $c(t_1 - t_0) > l_{12}$ , soit  $(s_{12})^2 > 0$ .

Tous les intervalles du genre temps entre l'évènement  $O$  et un évènement quelconque sont situés à l'intérieur du cône de lumière. Ceux situés dans la région  $t > 0$  sont postérieurs à l'évènement  $O$  ; cette région est appelée région du **futur absolu** (Fig. 1.2). Ceux situés dans la région  $t < 0$  sont antérieurs à l'évènement  $O$  ; cette région est appelée région du **passé absolue**.

Dans cette région, l'interaction se propage toujours à une vitesse inférieure à celle de la lumière. Tous les évènements situés à l'intérieur du cône de lumière peuvent

donc avoir une relation de cause à effet ; il en est de même pour les évènements situés sur le cône de lumière.

Deux évènements ne peuvent donc être liés par une relation de causalité que si leur intervalle est du genre temps ou genre lumière. L'existence d'un futur et d'un passé absolus pour ces évènements montre que la notion de causalité conserve toujours un sens en relativité restreinte.

### 1.3.3 Intervalle du genre espace

Lorsque l'intervalle entre deux évènements est tel que  $ds^2 < 0$ , la partie spatiale de l'intervalle prédomine sur la partie temporelle. L'intervalle est alors un nombre imaginaire pur ; il est appelé **intervalle du genre espace**.

Dans la région extérieure au cône de lumière, tout intervalle entre l'évènement  $O$  et un évènement quelconque est du genre espace. Si l'on change de référentiel, ces évènements auront lieu en des points différents de l'espace qui appartiendront toujours à la région extérieure au cône de lumière. Cette région est appelée région d'**éloignement absolu**.

Les notions de "avant", "après", "simultanément" sont relatives pour tous les évènements de cette région. Il n'existe donc pas de notion de causalité dans la région d'éloignement absolu. Dans un référentiel où ces évènements sont simultanés, ils sont séparés d'une distance spatiale dont le carré est égal au carré de l'intervalle.

### 1.3.4 L'espace-temps euclidien de Poincaré

Un certain arbitraire peut intervenir dans le choix du signe du carré de l'intervalle entre deux évènements, ce qui ne change rien à ses propriétés. Choisissons la convention de signe opposée à celle qui figure dans la formule (1.5) en posant :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad (1.9)$$

C'est la forme quadratique définie par Poincaré dont il a démontré l'invariance. effectuons à présent le changement de variables utilisé par Poincaré :  $w = ict$ , avec  $i^2 = -1$ . L'intervalle (1.9) s'écrit alors :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 \quad (1.10)$$

On remarque que le second membre de cette dernière relation constitue la généralisation à quatre dimensions du carré de la distance entre deux points dans l'espace de la géométrie euclidienne à trois dimensions. Muni de telles coordonnées, l'espace-temps devient euclidien.

L'intervalle étant un invariant dans une transformation de Lorentz-Poincaré, cela signifie que cette transformation conserve les distances dans l'espace quadridimensionnel de Poincaré. Dans l'espace ordinaire, ce sont les rotations qui conservent les

distances par rapport à un point. Dans l'espace à quatre dimensions, la transformation de Lorentz-Poincaré constitue une rotation de l'espace-temps.

## 1.4 Métrique de l'espace-temps plat

Les bases géométriques de la relativité restreinte mettent en jeu deux espaces distincts. D'une part un espace ponctuel dont les points sont repérés par quatre coordonnées ; c'est l'espace-temps. Un espace vectoriel associé à l'espace ponctuel.

Afin de rendre plus homogène les formules relativistes définies dans l'espace-temps, on utilise le changement de variables suivant :

$$x_0 = ct \ ; \ x_1 = x \ ; \ x_2 = y \ ; \ x_3 = z \quad (1.11)$$

Pour désigner l'une quelconque de ces quatre coordonnées, on utilise un indice noté par une lettre grecque, par exemple  $x_\mu$ . Par la suite, les indices grecs prendront toujours des valeurs de 0 à 3. Par contre, lorsque cela est nécessaire, on utilisera des indices latins,  $i, j, k$ , par exemple, qui prennent des valeurs de 1 à 3. Ainsi  $x_j$  désigne l'une quelconque des coordonnées spatiales.

### 1.4.1 Quadrivecteurs

Les coordonnées  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  d'un point de l'espace-temps peuvent être considérés comme les composantes d'un vecteur  $\mathbf{R} = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, \mathbf{r})$  appelé **rayon-vecteur**. Lorsqu'on passe d'un référentiel d'inertie  $R$  à un autre  $R'$ , les composantes de ce rayon vecteur se transforment selon les formules (1.1) de la transformation de Lorentz-Poincaré.

On appelle **quadrivecteur**  $\mathbf{A}$ , ou encore **4-vecteur**  $\mathbf{A}$ , un ensemble de quatre quantités  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  qui se transforment lors d'un changement de référentiel d'inertie comme les composantes  $x_\mu$  d'un rayon vecteur. Le rayon-vecteur  $\mathbf{R}$  est par définition un quadrivecteur.

La première composante d'un quadrivecteur est dite composante temporelle et les trois suivantes composantes spatiales.

Lorsque des entités mathématiques se transforment selon les formules de la transformation de Lorentz-Poincaré, ces grandeurs sont dites **covariantes**.

**Par définition, les quadrivecteurs sont des vecteurs à quatre dimensions qui sont covariants.**

### 1.4.2 Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs de la géométrie classique est un invariant pour les transformations géométriques de l'espace tridimensionnel. Nous avons vu

que l'intervalle de l'espace-temps quadridimensionnel est un invariant ; il représente la pseudo-distance entre deux évènements.

Si l'on appelle  $d\mathbf{R}$  un quadrivecteur infinitésimal de l'espace-temps, on peut définir un produit scalaire tel que :  $d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$ . On obtient une quantité invariante qui incite à définir de manière générale le produit scalaire de deux quadrivecteurs  $\mathbf{A} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$  et  $\mathbf{B} = (b_0, b_1, b_2, b_3)$  par :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 \quad (1.12)$$

On peut vérifier aisément que le produit scalaire (1.12) satisfait aux axiomes de définition d'un produit scalaire.

La norme d'un quadrivecteur  $\mathbf{A}$  est définie par la racine carrée du produit scalaire de  $\mathbf{A}$  par lui-même, soit :  $\|\mathbf{A}\| = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})^{1/2}$ . Le nombre de signes + et - qui figurent dans l'expression de la norme d'un vecteur constitue une caractéristique de tout espace vectoriel ; elle est appelée **signature** de l'espace vectoriel. L'espace vectoriel ainsi muni d'un tel produit scalaire est un espace **préhilbertien**, encore appelé par les physiciens espace **pseudo-euclidien**.

### 1.4.3 Espace-temps de Poincaré-Minkowski

Le formalisme quadridimensionnel inauguré par Poincaré fut repris et développé par Minkowski. Ce dernier introduisit la forme (1.12) du produit scalaire. Pour cela, il définit une base de l'espace vectoriel formé par les quadrivecteurs en postulant l'existence d'une base "minkowskienne".

Cette base est constituée par quatre vecteurs  $\mathbf{e}_\alpha$  orthonormés tels que leurs produits scalaires entre eux ont pour valeurs :

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = 0 \quad (\alpha \neq \beta) ; \quad \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = 1 ; \quad \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_j = -1 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (1.13)$$

Cette base permet d'écrire l'expression d'un vecteur quadridimensionnel  $\mathbf{A}$  sous la forme :  $\mathbf{A} = a_0 \mathbf{e}_0 + a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$ , où les quantités  $a_\mu$  sont les composantes du vecteur  $\mathbf{A}$ . Par suite du choix des propriétés de la base, le produit scalaire de deux vecteurs défini par (1.12) est alors automatiquement satisfait.

### 1.4.4 Tenseur fondamental de l'espace-temps plat

Les produits scalaires des vecteurs de base, définis par les formules (1.13), forment un ensemble de seize quantités qui sont les composantes d'un **tenseur d'ordre deux**. Nous verrons par la suite la définition et les propriétés des tenseurs.

Ce tenseur, noté classiquement  $g$ , est le **tenseur fondamental de l'espace-temps plat** de la relativité restreinte ; on dit encore le **tenseur métrique**.

On écrit généralement un tenseur sous sa forme matricielle, les éléments de la matrice étant les composantes classées dans l'ordre des indices croissants. Notons

$\eta_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta$  les composantes du tenseur. Les formules (1.13) conduisent à la matrice suivante :

$$[\eta_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \eta_{00} & \eta_{01} & \eta_{02} & \eta_{03} \\ \eta_{10} & \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{20} & \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{30} & \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Le tenseur  $g$  constitue l'élément structural le plus important dans la physique de l'espace-temps. Il définit ce que l'on appelle la **métrie** de l'espace-temps plat, d'où son appellation de tenseur métrique.

## 1.5 Énergie

La physique classique reconnaît deux principes fondamentaux de conservation : ceux de conservation de l'énergie et de conservation de la masse. Ces deux principes apparaissent complètement indépendants. La théorie de la relativité restreinte permet de les fondre en un seul : le principe de conservation de la masse, généralisé sous forme de principe de conservation de l'inertie, se confond avec celui de conservation de l'énergie.

### 1.5.1 Quadrivecteur vitesse unitaire

Lorsqu'une particule effectue un certain déplacement  $d\mathbf{r}$  durant un temps impropre  $dt$ , la vitesse ordinaire de cette particule est définie par  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ .

Un tel déplacement  $d\mathbf{r}$  s'effectue durant un temps propre  $d\tau$ . On définit, en relativité restreinte, une autre vitesse appelée **vitesse propre ou célérité** par la relation :

$$\mathbf{v}_0 = d\mathbf{r}/d\tau \quad (1.15)$$

Les temps propre et impropre étant liés par la relation (1.6), la vitesse propre est distincte de la vitesse ordinaire. Notons  $v$  la norme de la vitesse  $\mathbf{v}$  ; on a la relation suivante entre ces deux vitesses :  $\mathbf{v}_0 = \gamma(v) \mathbf{v}$ . Bien que la notion de vitesse ordinaire  $\mathbf{v}$  soit plus intuitive, celle de la vitesse propre  $\mathbf{v}_0$  se révèle finalement plus naturelle pour la généralisation de la vitesse dans l'espace-temps.

Afin d'obtenir une vitesse propre de norme unité, formons le quadrivecteur  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_0/c$  ayant pour composantes :

$$u_\alpha = dx_\alpha/c d\tau = dx_\alpha/ds \quad (1.16)$$

Les composantes  $u_\alpha$  se transforment conformément à la transformation de Lorentz-Poincaré lors d'un changement de référentiel d'inertie. On obtient un quadrivecteur appelé **quadrivecteur vitesse unitaire** ou **quadrivitesse unitaire**. En effet,



compte tenu de l'expression du carré de l'intervalle  $ds^2$ , on démontre aisément que la norme de la quadrivitesse est égale à l'unité.

### 1.5.2 Quadrivecteur impulsion-énergie

En mécanique classique, la quantité de mouvement est le produit de la masse  $m$  d'un objet par sa vitesse  $\mathbf{v}$ . La généralisation de la notion de quantité de mouvement en relativité restreinte nécessite qu'une nouvelle entité permette de retrouver l'ancienne pour de faibles vitesses par rapport à celle de la lumière.

La vitesse propre  $\mathbf{v}_0$  s'identifie à la vitesse ordinaire  $\mathbf{v}$  pour les vitesses usuelles de la mécanique classique. Par conséquent, la quantité  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_0$  est un bon candidat pour généraliser la notion de quantité de mouvement. Cette quantité est appelée **l'impulsion relativiste** de la masse  $m$ .

En relativité restreinte, ce sont les quadrivecteurs qui sont les plus intéressants. Puisque l'impulsion relativiste est tridimensionnelle, utilisons les composantes de la quadrivitesse, multipliées par  $mc^2$ , pour former celles du quadrivecteur suivant :

$$\mathbf{P} = mc^2 (u_0, u_1, u_2, u_3) = (P_0, P_1, P_2, P_3) \quad (1.17)$$

La composante  $P_0 = \gamma(v) mc^2$  a la dimension d'une énergie puisque  $\gamma(v)$  est une quantité sans dimension. Développons  $P_0$  par rapport à  $v/c$ , on obtient :

$$P_0 = mc^2 + 1/2 mv^2 + \dots \quad (1.18)$$

Lorsque  $v = 0$ , le corps considéré est au repos et la quantité :

$$E_0 = mc^2 \quad (1.19)$$

est l'énergie du corps au repos dans son référentiel propre ; c'est **l'énergie propre** du corps. La relation (1.19) montre que l'énergie d'un corps au repos et sa masse sont des concepts équivalents. Il n'existe donc qu'une seule entité fondamentale, celle-ci pouvant se manifester sous forme énergétique ou massique. Le second membre de la relation (1.18) montre un deuxième terme qui est l'énergie cinétique classique. Finalement  $P_0$  représente l'énergie totale du corps.

Le quadrivecteur  $\mathbf{P}$  donné par (1.17) a donc pour première composante l'énergie  $E$  du corps et pour les trois autres, les composantes de l'impulsion au facteur  $c^2$  près.  $\mathbf{P}$  est appelé **quadrivecteur impulsion-énergie**.

### 1.5.3 Invariance de la norme du quadrivecteur impulsion-énergie

L'énergie totale d'un corps  $E = P_0$  s'écrit :

$$E = \gamma(v) mc^2 = I(v) c^2 \quad (1.20)$$

Le coefficient  $I(v) = \gamma(v) m$  est appelé **coefficient d'inertie**. La relation (1.20) généralise l'équivalence entre l'énergie d'un corps au repos et sa masse : **l'énergie et l'inertie deviennent des concepts équivalents en relativité restreinte**.

La quadrivitesse étant covariante, il en est de même de l'impulsion-énergie. Puisque la quadrivitesse a une norme unité, la norme du quadrivecteur  $\mathbf{P}$  est égal à  $mc^2$ , c'est-à-dire à l'énergie  $E_0$  d'un corps au repos.

L'énergie seule ou l'impulsion seule ne sont plus invariants lors d'un changement de référentiel. Toutes deux changent d'un référentiel à un autre mais, en revanche, la norme du quadrivecteur impulsion-énergie reste invariante. On obtient un nouvel invariant relativiste.

## 1.6 Exercices

### 1.6.1 Décalage spectral de la lumière des galaxies

Un phénomène de "fuite" des amas de galaxies a été observé dès 1912 par l'astronome Vesto Slipher en étudiant le décalage spectral de la lumière émise par les galaxies. Les vitesses des galaxies les plus lointaines atteignent l'ordre de grandeur de la vitesse de la lumière. À cette époque, la relativité générale n'était pas encore établie et la fuite des galaxies fut interprétée comme un phénomène Doppler en relativité restreinte. Ce ne fut qu'à la suite de l'article de Georges Lemaître, en 1927, que la vitesse de fuite des "nébuleuses extragalactiques" fut interprétée comme étant celle de l'expansion de l'Univers.

Au phénomène Doppler classique, étudié en optique par Fizeau, se superpose donc à ces vitesses le phénomène de relativité du temps : c'est l'effet Doppler-Fizeau relativiste que nous allons étudier.

Un observateur immobile au point  $M$  dans un référentiel  $R$ , reçoit un rayonnement électromagnétique émis par une source mobile  $S$  dans le référentiel  $R$ . Cette source est liée à un référentiel propre  $R'$  qui se déplace à la vitesse uniforme  $V$  par rapport à  $R$ , dans le sens des  $x$  positifs. La source est située au point origine  $O'$  (Fig. 1.1). À un instant donné, la direction  $O'M$  de propagation du rayonnement vers l'observation fait un angle  $\theta$  avec l'axe  $Ox$ .

1. Écrire, dans le référentiel  $R$ , les expressions des composantes  $k_x$  et  $k_y$  du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  correspondant à la propagation dans la direction  $O'M$ .
2. On sait que la phase d'onde  $(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  où  $\mathbf{r}$  est le rayon vecteur, est invariante par changement de référentiel d'inertie. Calculer les formules de changement des composantes du vecteur d'onde et de la pulsation lors du passage d'un référentiel d'inertie à un autre en translation uniforme à la vitesse relative  $V$ .
3. Soit  $\omega$  la pulsation mesurée dans  $R$  du rayonnement émis par la source  $S$ . Écrire les expressions des composantes du vecteur d'onde  $\mathbf{k}'$  et de la pulsation

$\omega'$  dans  $R'$  en fonction de  $k = \|\mathbf{k}\|$  et  $\omega$ .

4. Déterminer la pulsation  $\omega$  mesurée par l'observateur situé au point  $M$ , en fonction de la pulsation  $\omega'$  du rayonnement émis.
5. Lorsque l'observateur est situé sur la droite  $Ox$ , et que la source  $S$  se dirige vers lui, déterminer l'expression de  $\omega$ . Même question lorsque la source s'éloigne de l'observateur

### 1.6.2 Correction

1. Dans le référentiel  $R$ , le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , de norme  $k$ , correspondant à la propagation dans la direction  $O'M$  a pour composantes, avec  $k = \omega/c$  :

$$k_x = k \cos \theta = \frac{\omega}{c} \cos \theta ; \quad k_y = k \sin \theta = \frac{\omega}{c} \sin \theta \quad (1.21)$$

2. La phase  $(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  d'une onde dans  $R$  étant invariante lors du passage d'un référentiel d'inertie à un autre, on note  $(\omega' t' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}')$  la phase dans  $R'$ , d'où :

$$(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = (\omega' t' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}') \quad (1.22)$$

Les formules de la transformation de Lorentz-Poincaré appliquées à la relation (1.22) nous donnent :

$$\gamma(V) k_x (x' + Vt') + k_y y' + k_z z' - \gamma(V) \omega \left( t' + \frac{Vx'}{c^2} \right) = k'_{x'} x' + k'_{y'} y' + k'_{z'} z' - \omega' t' \quad (1.23)$$

Cette dernière relation étant valable quels que soient  $\mathbf{r}$  et  $t$ , on obtient, en identifiant dans les deux membres de (1.23) les termes dépendants de chacune des variables  $x', y', z', t'$  :

$$k'_{x'} = \gamma(V) \left( k_x - \frac{\omega V}{c^2} \right) ; \quad k'_{y'} = k_y ; \quad k'_{z'} = k_z ; \quad \omega' = \gamma(V) (\omega - k_x V) \quad (1.24)$$

3. Les formules (1.24) donnent les formules de changement des composantes du vecteur d'onde et de la pulsation lors d'un changement de référentiel d'inertie. Compte tenu des formules (1.21), on obtient :

$$k'_{x'} = \gamma(V) \left( k \cos \theta - \frac{\omega V}{c^2} \right) ; \quad \omega' = \gamma(V) (\omega - k V \cos \theta) \quad (1.25)$$

4. Avec  $k = \omega/c$  et  $\beta = V/c$ , la dernière formule (1.25) donne :

$$\omega = \frac{\omega'}{\gamma(V)(1 - \beta \cos \theta)} = \frac{\omega' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta} \quad (1.26)$$

5. Lorsque l'observateur est situé sur l'axe  $Ox$  et que la source  $S$  se dirige vers lui, on a  $\theta = 0$  et la formule (1.26) devient :

$$\omega = \frac{\omega' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta} = \omega' \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (1.27)$$

La pulsation perçue est supérieure à celle du rayonnement émis par la source dans son référentiel propre. On obtient un décalage du spectre vers les petites longueurs d'onde ; on dit qu'on a un déplacement "vers le violet".

Lorsque la source s'éloigne de l'observateur, on a :  $\theta = \pi$  et la formule (1.26) devient :

$$\omega = \omega' \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \omega' \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad (1.28)$$

Le décalage du spectre a lieu vers les grandes longueurs d'onde. On dit qu'on observe un déplacement "vers le rouge".

L'astronome Vesto Slipher observera un déplacement de la lumière des galaxies vers le rouge et son interprétation, en 1914, d'une fuite des galaxies fit sensation. Ce fut la théorie de la relativité générale qui permit par la suite, en 1927, de relier ce phénomène de "fuite" à la vitesse d'expansion de l'Univers.

### 1.6.3 La transformation de Lorentz-Poincaré est une rotation de l'espace-temps

Henri Poincaré a démontré l'invariance de l'intervalle ; il en a déduit que la transformation de Lorentz-Poincaré constitue une rotation dans l'espace-temps.

1. En utilisant la transformation spéciale de Lorentz-Poincaré, vérifier que l'intervalle entre deux événements de coordonnées  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$  et  $(x_2, y_2, z_2, t_2)$  est un invariant lors du passage d'un référentiel  $R$  à un autre  $R'$  (Fig. 1.1).
2. Effectuer le changement de variables utilisé par Poincaré :

$$x = x_1 ; y = x_2 ; z = x_3 ; ict = x_4 \quad (1.29)$$

Montrer que le carré de l'intervalle élémentaire  $ds^2$ , dans ce nouveau système de coordonnées, représente la distance entre deux points dans un espace euclidien à quatre dimensions. En déduire que la transformation de Lorentz-Poincaré est une rotation de l'espace-temps.

3. On va trouver à présent la transformation de Lorentz-Poincaré en partant de la rotation de l'espace-temps dans un plan spatio-temporel. Écrire les formules classiques de rotation d'un angle  $\theta$  dans le plan spatio-temporel  $(x_1, x_4)$  autour du point origine  $O$  du référentiel  $R$ .

4. L'origine  $O'$  du référentiel  $R'$  correspond à  $x'_1 = 0$ ; la vitesse de déplacement de  $R'$  par rapport à  $R$  est égale à  $V$  (Fig. 1.1). Calculer  $\sin \theta$  et  $\cos \theta$  en fonction de  $V$ .
5. En substituant  $\sin \theta$  et  $\cos \theta$  dans les formules de rotation, retrouver la transformation de Lorentz-Poincaré en fonction des variables initiales  $x, y, z, t$ .

### 1.6.4 Correction

1. L'intervalle  $s_{12}$  entre deux évènements est défini par :

$$(s_{12})^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \quad (1.30)$$

La transformation spéciale de Lorentz-Poincaré est donnée par les formules (1.1). En reportant dans la définition (1.30) de l'intervalle les expressions des coordonnées données par (1.1), puis en développant les carrés, on obtient :

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = \gamma^2(V) [(c^2 - V^2)(t'_2 - t'_1) - (1 - V^2/c^2)(x'_2 - x'_1)^2] \quad (1.31)$$

L'expression de  $\gamma(V)$  donne les relations :

$$\gamma^2(c^2 - V^2) = c^2 ; \quad -\gamma^2(1 - V^2/c^2) = -1 \quad (1.32)$$

Substituant dans la relation (1.31), puis compte tenu de l'invariance des termes dépendants de  $y$  et  $z$ , on obtient :

$$(s_{12})^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 = (s'_{12})^2 \quad (1.33)$$

L'intervalle est la forme quadratique invariante lors d'une transformation de Lorentz-Poincaré.

2. En effectuant le changement de coordonnée (1.29), on obtient pour l'intervalle élémentaire :

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \quad (1.34)$$

Le carré de l'intervalle entre deux évènements peut être positif ou négatif. Un certain arbitraire peut donc intervenir dans le choix du signe de  $ds^2$ , ce qui ne change rien à ses propriétés. Le second membre de la relation (1.34) constitue la généralisation à quatre dimensions du carré de la distance dans l'espace à trois dimensions. Avec les coordonnées (1.1), l'espace devient euclidien. Nous appellerons **espace-temps de Poincaré** cet espace euclidien.

L'intervalle étant un invariant par une transformation de Lorentz-Poincaré, cela signifie que cette transformation conserve les distances dans l'espace euclidien quadridimensionnel. Or les transformations de Lorentz-Poincaré sont celles du passage d'un référentiel d'inertie à un autre. Dans l'espace euclidien

défini par les coordonnées (1.29), un tel passage s'effectue par des translations et des rotations du système de coordonnées. Les translations consistent simplement en un changement de l'origine des temps et une translation de l'origine du référentiel. La transformation de Lorentz-Poincaré est donc équivalente mathématiquement à une rotation de l'espace-temps défini par les coordonnées (1.29).

3. Une rotation quelconque de l'espace-temps de Poincaré peut être décomposée en trois rotations dans les plans spatiaux  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_3)$  et  $(x_2, x_3)$  et trois rotations dans les plans spatio-temporels  $(x_4, x_1)$ ,  $(x_4, x_2)$ ,  $(x_4, x_3)$ . Les rotations dans les plans spatiaux correspondent simplement à des rotations ordinaires dans l'espace euclidien à trois dimensions. Il reste donc à étudier les rotations dans les plans spatio-temporels.

Considérons nos deux référentiels habituels  $R$  et  $R'$ . Lors d'une rotation dans le plan  $(x_4, x_1)$  d'un angle  $\theta$ , les coordonnées  $x_2$  et  $x_3$  restent invariantes. Les formules classiques de rotation dans un plan font passer des coordonnées  $(x_4, x_1)$  aux coordonnées  $(x'_4, x'_1)$  selon les formules :

$$x_1 = x'_1 \cos \theta - x'_4 \sin \theta ; \quad x_4 = x'_1 \sin \theta + x'_4 \cos \theta \quad (1.35)$$

4. L'origine  $O'$  des coordonnées du référentiel  $R'$  correspond à  $x'_1 = 0$ . La rotation de  $O'$  par rapport à  $R$  s'exprime donc en écrivant que  $x'_1$  est nul dans les formules (1.35), soit :

$$x_1 = -x'_4 \sin \theta ; \quad x_4 = x'_4 \cos \theta \quad (1.36)$$

Le rapport des deux équations précédentes nous donne :

$$\frac{x_1}{x_4} = -\tan \theta \quad (1.37)$$

Le déplacement du référentiel  $R'$  par rapport à  $R$  selon l'axe des  $x$  s'effectue à la vitesse  $V = x/t$ . Puisque  $x = x_1$  et  $x_4 = ict$ , on obtient :

$$\tan \theta = -Vt/ict = iV/c \quad (1.38)$$

L'angle de rotation  $\theta$  est un nombre imaginaire pur puisque  $\tan \theta$  est égal à  $iV/c$ . Les formules classiques de trigonométrie nous donnent :

$$\sin \theta = i \gamma(V) V/c ; \quad \cos \theta = \gamma(V) \quad (1.39)$$

5. Substituant les expressions (1.39) dans les formules de rotation (1.35), il vient :

$$x_1 = \gamma(V) \left( x'_1 - \frac{iV}{c} x'_4 \right) ; \quad x_4 = \gamma(V) \left( x'_4 + \frac{iV}{c} x'_1 \right) \quad (1.40)$$

Le changement initial de variables  $x = x_1, x' = x'_1, ict = x_4, ict' = x'_4$ , reporté dans les formules (1.40) conduit à :

$$x_1 = \gamma(V) (x' + Vt') ; t = \gamma(V) (t' + \frac{V}{c^2} x')$$
 (1.41)

On retrouve les formules classiques de la transformation de Lorentz-Poincaré. Celle-ci représente donc bien une rotation d'un angle imaginaire dans l'espace-temps de Poincaré.

### 1.6.5 Effet Compton

Le caractère corpusculaire du photon fut complété par Einstein en 1917 lorsqu'il proposa d'attribuer au photon, en plus de son énergie, une certaine quantité de mouvement  $p$ .

1. Le photon étant de masse nulle et d'énergie  $E = h\nu$  où  $\nu$  est la fréquence du rayonnement photonique, déterminer l'expression de son impulsion  $p$ .
2. Une expérience effectuée par Compton en 1923 vint confirmer directement l'aspect corpusculaire du photon. Dans cette expérience, on envoie un faisceau de rayons X sur un matériau contenant un certain nombre d'électrons libres. Pour une plaque de métal suffisamment mince, on observe, par transmission, des rayons X qui sont déviés par rapport à la direction du faisceau initial avec une longueur d'onde légèrement plus grande que celle des rayons X incidents (Fig. 1.3).

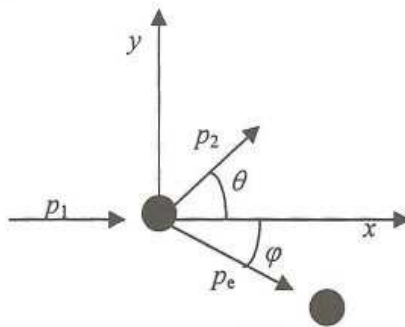


FIGURE 1.3.

La vitesse initiale de l'électron dans un métal étant très faible par rapport à la vitesse de la lumière, l'électron peut être considéré comme étant au repos. On suppose que le choc entre le photon et l'électron est parfaitement élastique et l'énergie relativiste du système se conserve. Écrire cette équation de conservation des énergies.

3. Écrire l'équation vectorielle de conservation des impulsions du photon et de l'électron lors du choc ainsi que cette même équation de conservation entre les modules des impulsions.
4. En exprimant les impulsions du photon avant et après l'impact en fonction de ses fréquences respectives,  $\nu_1$  et  $\nu_2$ , écrire l'expression de l'équation de conservation des modules des impulsions en fonction des fréquences  $\nu_1$  et  $\nu_2$ .

- Déterminer la variation de fréquence du photon avant et après l'impact. En déduire la variation de sa longueur d'onde.

### 1.6.6 Correction

- L'énergie mécanique  $E$  d'une particule de masse  $m$  et d'impulsion  $p$  est donnée en relativité restreinte par :

$$E = c(p^2 + m^2 c^2)^{1/2} \quad (1.42)$$

Le photon étant de masse nulle, son énergie relativiste se réduit à  $E = pc$ . D'autre part, son énergie exprimée en fonction de sa fréquence  $\nu$  est, selon la relation de Planck, égale à :  $E = h\nu$ . L'impulsion du photon s'écrit ainsi :

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} \quad (1.43)$$

- On note respectivement  $\nu_1$  et  $\nu_2$  les fréquences du photon avant et après le choc ;  $m$  et  $p_e$  sont respectivement la masse et l'impulsion de l'électron qui est considéré comme étant au repos. La somme des énergies du photon incident et de l'électron au repos doit être égale à la somme des énergies du photon diffusé et de l'électron mis en mouvement. On a l'équation de conservation :

$$h\nu_1 + mc^2 = h\nu_2 + c(p_e^2 + m^2 c^2)^{1/2} \quad (1.44)$$

- On note  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$  les impulsions du photon avant et après le choc,  $\mathbf{p}_e$  l'impulsion de l'électron après l'impact du photon. La conservation des impulsions s'écrit :

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_e \quad (1.45)$$

Les vecteurs  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$  font entre eux un angle  $\theta$ . La relation (1.45) conduit à l'équation suivante entre leurs modules :

$$p_e^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos \theta \quad (1.46)$$

- En utilisant l'expression (1.43) donnant l'impulsion en fonction de la fréquence, l'équation (1.46) donne l'expression de  $p_e$  en fonction des fréquences  $\nu_1$  et  $\nu_2$ . Reportant cette valeur de  $p_e$  dans l'équation (1.44), on obtient :

$$\frac{h\nu_1}{c} + mc = \frac{h\nu_2}{c} + \left[ \left( \frac{h\nu_1}{c} \right)^2 + \left( \frac{h\nu_2}{c} \right)^2 - \frac{2h^2 \nu_1 \nu_2}{c^2} \cos \theta + m^2 c^2 \right]^{1/2} \quad (1.47)$$

- En isolant les termes sous le radical et élevant au carré, on obtient après regroupement :

$$\nu_1 - \nu_2 = \frac{h \nu_1 \nu_2}{m c^2} (1 - \cos \theta) \quad (1.48)$$

Les fréquences  $\nu = c/\lambda$  donnent ainsi la variation de la longueur d'onde :



$$\Delta \lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{2h}{mc} \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2 \lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (1.49)$$

La constante  $\lambda_c = h/mc$  est appelée **longueur d'onde de Compton** pour l'électron. Les résultats expérimentaux vérifient parfaitement l'équation (1.49), ce qui justifie l'hypothèse corpusculaire du rayonnement électromagnétique.

## Chapitre 2

# Électromagnétisme et dynamique des milieux continus

Nous allons maintenant écrire sous forme tensorielle les équations de la dynamique des milieux continus et de l'électromagnétique relativistes. L'emploi du formalisme tensoriel n'est pas indispensable en relativité restreinte mais il le devient en relativité générale. Cependant, des formules déduites de la relativité restreinte doivent être exprimées sous forme tensorielle car elles entrent par la suite dans les équations de la gravitation relativiste.

C'est le mathématicien Hermann Minkowski (1864-1909) qui fut le premier à introduire le formalisme tensoriel en relativité restreinte. Albert Einstein considéra tout d'abord que c'était une "érudition superflue". Par la suite, il rendra cependant hommage à Minkowski en reconnaissant l'importance de son apport à la relativité :

*Minkowski apporta une importante contribution à l'élaboration de la théorie : avant ses recherches, il fallait appliquer à une loi la transformation de Lorentz pour pouvoir tester son invariance vis-à-vis d'une telle transformation. Minkowski réussit à introduire un formalisme tel que l'expression mathématique de la loi elle-même garantisse son invariance par rapport à la transformation de Lorentz. En créant un calcul tensoriel quadridimensionnel, il accomplit, pour l'espace à quatre dimensions, ce que le calcul vectoriel avait réalisé pour l'espace à trois dimensions.*

## 2.1 Covariance des lois de la Physique

L'importance de la transcription tensorielle des lois de la physique en relativité restreinte est ce qu'en dit Einstein ci-dessus : l'expression mathématique d'une loi sous forme tensorielle garantit son invariance par rapport à la transformation de Lorentz-Poincaré. Ces lois sont dites **covariantes**.

### 2.1.1 Quadri-vecteurs

Nous avons vu que les quadri-vecteurs sont des vecteurs à quatre dimensions qui, par définition, sont dits covariants. Ainsi, par exemple, l'énergie et l'impulsion for-

ment une entité, le quadrivecteur énergie-impulsion, dont la norme se conserve lors d'un changement de référentiel d'inertie.

Comment le terme "covariant" attribué aux quadrivecteurs rejoint-il la définition générale donnée pour les tenseurs covariants ? Des tenseurs sont dits covariants si, lors d'un changement de base, leurs composantes dans un référentiel donné se transforment comme les vecteurs de base de ce même référentiel.

Les quadrivecteurs sont des tenseurs d'ordre un dont les composantes se modifient selon la transformation de Lorentz-Poincaré lors d'un changement de référentiel d'inertie. D'une part, le passage d'un référentiel d'inertie à un autre correspond bien à un changement de base. D'autre part, les quadrivecteurs se transforment comme les rayons-vecteurs de l'espace de Poincaré-Minkowski. Ces derniers étant des combinaisons linéaires des vecteurs de base de cet espace, les quadrivecteurs se transforment précisément comme ces vecteurs de base. Les quadrivecteurs sont donc des tenseurs covariants d'ordre un.

## 2.1.2 Tenseurs covariants d'ordre quelconque

Un tenseur d'ordre quelconque peut être décomposé sous forme d'une combinaison linéaire de produits tensoriels. En relativité, on considère essentiellement des tenseurs qui peuvent être décomposés comme des combinaisons linéaires de quadrivecteurs.

Les tenseurs utilisés peuvent donc être écrits sous forme covariante. Les grandeurs physiques qu'ils représentent peuvent également être écrites sous forme contravariantes grâce à l'utilisation du produit scalaire (1.12) défini dans l'espace quadridimensionnel de Poincaré-Minkowski.

L'espace vectoriel  $E_4$  des quadrivecteurs est un espace à quatre dimensions associé à l'espace ponctuel  $E_4$  de Poincaré-Minkowski. Les tenseurs utilisés par la suite seront des tenseurs d'ordre  $n$  ayant donc un nombre de composantes égal à  $4^n$ . On verra apparaître des tenseurs d'ordre deux, trois et quatre ayant respectivement 16, 64 et 256 composantes.

## 2.1.3 Composantes covariantes et contravariantes

Les indices des tenseurs utilisés en relativité sont des lettres de l'alphabet grec ou latin. Une convention classique est que les indices grecs varient de 0 à 3, alors, alors que les indices latins varient de 1 à 3.

Par exemple, un vecteur  $\mathbf{x}$  de l'espace tridimensionnel s'écrira sur la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_k)$  en utilisant les indices latins :

$$\mathbf{x} = x^k \mathbf{e}_k \tag{2.1}$$

Par contre, un quadrivecteur  $\mathbf{A}$  de l'espace de Poincaré-Minkowski s'écrira sur une base  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_\mu)$  en utilisant des indices grecs :

$$\mathbf{A} = A^\mu \mathbf{e}_\mu \quad (2.2)$$

L'espace ponctuel de Poincaré-Minkowski a pour base les vecteurs  $\mathbf{e}_\alpha$  dont les produits scalaires sont donnés par (1.13), à savoir :

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = 0 \quad (\alpha \neq \beta) ; \quad \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = 1 ; \quad \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_j = -1 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.3)$$

Le tenseur métrique de l'espace-temps plat de la relativité restreinte est donc donné par (1.14). Les relations entre les composantes contravariantes et covariantes des tenseurs font intervenir des quantités  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ .

L'espace-temps de Poincaré-Minkowski ayant les vecteurs de base (2.3) est rapporté aux coordonnées (1.11) appelés **coordonnées galiléennes réduites** :

$$x^0 = ct ; \quad x^1 = x ; \quad x^2 = y ; \quad x^3 = z \quad (2.4)$$

L'espace-temps plat relativiste peut naturellement être rapporté à des coordonnées curvilignes quelconques où les composantes  $g_{\alpha\beta}$  du tenseur métrique deviennent des fonctions de ces nouvelles coordonnées.

## 2.2 Le tenseur champ électromagnétique

Les équations fondamentales de l'électromagnétisme sont relativistes. Ce fut précisément en étudiant leur invariance lors d'un changement de référentiel d'inertie que Lorentz découvrit la transformation qui porte son nom. Il est donc naturel que ces équations puissent être mise sous forme tensorielle.

Le champ électromagnétique est décrit classiquement dans l'espace à trois dimensions par deux entités : d'une part, un vecteur d'espace **champ électrique**  $\mathbf{E}$  et d'autre part un vecteur d'espace **champ magnétique**  $\mathbf{B}$ . Nous allons voir que l'introduction de l'espace-temps de la relativité restreinte permet de former une entité unique qui décrit globalement le champ électromagnétique.

Ces deux champs vectoriels peuvent être définis à l'aide d'un potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$  et d'un potentiel scalaire électrique  $V$  à l'aide des relations :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} ; \quad \mathbf{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.5)$$

Notons  $A_x, A_y, A_z$  les composantes de  $\mathbf{A}$  dans un système d'axes cartésiens  $Oxyz$ . Formons le quadrivecteur  $\mathbf{Q}$  ayant pour composantes contravariantes dans le système de coordonnées galiléennes réduites (2.4) :

$$q^0 = -V/c ; \quad q^1 = -A_x ; \quad q^2 = -A_y ; \quad q^3 = -A_z \quad (2.6)$$

Le quadrivecteur  $\mathbf{Q}$  est appelé le **quadripotential** du champ électromagnétique. Les composantes covariantes de  $\mathbf{Q}$  compte tenu du tenseur métrique (1.14) ont pour expression :

$$q_0 = V/c ; q_1 = A_x ; q_2 = A_y ; q_3 = A_z \quad (2.7)$$

Les expressions développées du rotationnel et du gradient permettent d'écrire les formules (2.5) sous la forme suivante :

$$B_x = \partial_2 q_3 - \partial_3 q_2 ; B_y = \partial_3 q_1 - \partial_1 q_3 ; B_z = \partial_1 q_2 - \partial_2 q_1 \quad (2.8)$$

$$\frac{E_x}{c} = \partial_1 q_0 - \partial_0 q_1 ; \frac{E_y}{c} = \partial_2 q_0 - \partial_0 q_2 ; \frac{E_z}{c} = \partial_3 q_0 - \partial_0 q_3 \quad (2.9)$$

Les six composantes des vecteurs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{E}/c$  permettent de former les six composantes covariantes strictes d'un tenseur antisymétrique, noté  $F_{\lambda\mu}$ . Ce tenseur est le rotationnel du quadripotential  $\mathbf{Q}$ , soit :

$$\text{rot}_{\lambda\mu} \mathbf{Q} = F_{\lambda\mu} = \partial_\lambda q_\mu - \partial_\mu q_\lambda \quad (2.10)$$

Dans le système de coordonnées galiléennes réduites, les composantes strictes du tenseur  $F_{\lambda\mu}$  s'expriment en fonction des composantes des vecteurs champ magnétique et champ électrique sous la forme suivante :

$$F_{23} = B_x ; F_{31} = B_y ; F_{12} = B_z ; F_{10} = \frac{E_x}{c} ; F_{20} = \frac{E_y}{c} ; F_{30} = \frac{E_z}{c} \quad (2.11)$$

Le tenseur antisymétrique  $F_{\lambda\mu}$  est appelé le **tenseur électromagnétique** ou **tenseur de Maxwell**. Ce tenseur comporte 16 composantes covariantes que l'on peut mettre sous la forme matricielle suivante :

$$[F_{\lambda\mu}] = \begin{bmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Remarquons que selon l'ordre dans lequel les coordonnées galiléennes réduites ont été classées, l'expression matricielle du tenseur champ électromagnétique ne sera pas la même. Selon également la définition des signes des composantes du quadripotential, les  $F_{\lambda\mu}$  seront classées différemment.

Les composantes contravariantes strictes du tenseur champ électromagnétique ont pour expression :

$$F^{23} = B_x ; F^{31} = B_y ; F^{12} = B_z ; F^{10} = -\frac{E_x}{c} ; F^{20} = -\frac{E_y}{c} ; F^{30} = -\frac{E_z}{c} \quad (2.13)$$

et sa forme matricielle :

$$[F^{\lambda\mu}] = \begin{bmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

La création d'une entité unique, le tenseur champ électromagnétique, englobant les champs magnétique et électrique montrent bien l'unité profonde du champ électromagnétique. L'existence d'une composante magnétique orthogonale à une composante électrique d'une onde électromagnétique plane montre bien physiquement cette unité.

Lors du passage d'un référentiel d'inertie à un autre, la transformation du tenseur champ électromagnétique montre également que les composantes du vecteur champ magnétique dépendent, dans le nouveau référentiel, à la fois des composantes du champ électrique et du champ magnétique dans le référentiel d'origine. Il en est de même pour le champ électrique.

Notons que le quadripotiel  $\mathbf{Q}$  n'est pas déterminé d'une manière unique par la connaissance du champ électromagnétique. À tout quadripotiel qui vérifie l'expression (2.10), on peut ajouter un champ gradient d'une fonction  $f$  quelconque ; les composantes du quadripotiel deviennent alors :

$$q_\mu^* = q_\mu + \partial_\mu f \quad (2.15)$$

Le rotationnel d'un gradient étant nul, les composantes  $F_{\lambda\mu}$  restent inchangées. L'addition d'un tel gradient à un potentiel vecteur s'appelle un **changement de jauge**. Des entités, comme le champ électromagnétique, qui ne sont pas modifiées lors d'un changement de jauge sont dites posséder **l'invariance de jauge**.

Nous allons voir que l'utilisation du tenseur champ électromagnétique permet d'exprimer les équations fondamentales de l'électrodynamique, dites de Maxwell-Lorentz, sous une forme particulièrement simple et condensée.

## 2.3 Les équations de Maxwell-Lorentz

Rappelons que l'invariance relativiste de la charge électrique est un postulat de la relativité restreinte basé sur diverses considérations expérimentales.

### 2.3.1 Quadrivecteur densité de courant électrique

Considérons un ensemble de charges électriques discrètes formant une charge totale  $de$ . Cette charge est contenue dans un volume élémentaire  $dV_0$  lié à un référentiel  $R_0$ . La densité de charge au repos  $\rho_0$  est définie par :

$$\rho_0 = de/dV_0 \quad (2.16)$$

Dans un autre référentiel R en translation uniforme de vitesse  $\mathbf{v}$  par rapport à  $R_0$ , la charge  $de$  est enfermée dans un élément de volume  $dV$ . La densité de charge  $\rho$  dans le référentiel R est définie par :

$$\rho = de/dV \quad (2.17)$$

La mesure  $dV$  du volume élémentaire dans R est relié à  $dV_0$  par la relation :

$$dV_0 = \gamma(v) dV \quad (2.18)$$

où  $\gamma(v) = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ . En combinant les trois formules précédentes, nous obtenons la densité de charge  $\rho$  en fonction de la densité au repos  $\rho_0$ , soit :

$$\rho = \gamma(v) \rho_0 \quad (2.19)$$

Lorsqu'une charge volumique de densité  $\rho$  est animée d'une vitesse  $\mathbf{v}$ , on définit classiquement un vecteur densité de courant par  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ . En relativité restreinte, on appelle **vecteur densité de courant électrique** le quadrivecteur  $\mathbf{J}$  ayant pour composantes :

$$J^\alpha = \rho_0 c u^\alpha \quad (2.20)$$

où les  $u^\alpha$  sont les composantes du quadrivecteur vitesse unitaire.

Les différentes composantes du quadrivecteur  $\mathbf{J}$  ont pour expression compte tenu de la définition de la quadrivitesse (1.16) :

$$J^0 = \gamma(v) \rho_0 c ; \quad J^k = \gamma(v) \rho_0 v^k \quad (2.21)$$

Compte tenu de (2.19), le quadrivecteur  $\mathbf{J}$  a pour composantes en fonction des composantes de la vitesse  $\mathbf{v}$  de la charge volumique :

$$J^0 = \rho c ; \quad J^k = \rho v^k \quad (2.22)$$

### 2.3.2 Premier groupe des équations de Maxwell-Lorentz

Les équations de Maxwell-Lorentz peuvent être partagées en deux groupes. Dans un système d'axes rectangulaires  $Oxyz$ , le premier groupe d'équations s'écrit :

$$\text{rot } \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (2.23)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2.24)$$

Effectuons une projection sur l'axe  $Ox$  des vecteurs qui figurent dans l'équation (2.23); on obtient :

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \mu_0 J_x \quad (2.25)$$

Cette dernière équation, compte tenu de l'expression des composantes contravariantes (2.13) du tenseur champ électromagnétique et celles du quadrivecteur densité de courant électrique (2.22), s'écrit :

$$\partial_2 F^{12} + \partial_3 F^{13} + \partial_0 F^{10} = \mu_0 J^1 \quad (2.26)$$

Les projections de l'équation (2.23) sur les axes  $Oy$  et  $Oz$  conduisent à des relations analogues à (2.26). Ces trois équations peuvent être écrites, en coordonnées galiléennes réduites, sous la forme condensée :

$$\partial_\lambda F^{k\lambda} = \mu_0 J^k \quad (2.27)$$

De même, en écrivant l'expression de la divergence (2.24) sous forme explicite en coordonnées  $x, y, z$ , puis en remplaçant les composantes du champ électrique  $\mathbf{E}$  par leurs expressions données par (2.13), il vient :

$$\partial_\lambda F^{0\lambda} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 c} = \mu_0 \rho c = \mu_0 J^0 \quad (2.28)$$

En rassemblant les deux équations précédentes, on voit que le premier groupe d'équations de Maxwell-Lorentz peut se mettre, en coordonnées galiléennes réduites, sous la forme :

$$\partial_\lambda F^{\mu\lambda} = \mu_0 J^\mu \quad (2.29)$$

L'utilisation de coordonnées rectilignes fait apparaître les dérivées partielles des composantes du tenseur  $F_{\mu\lambda}$ . Lorsqu'on utilise des coordonnées curvilignes, les dérivées partielles sont alors remplacées par des dérivées covariantes. Le premier groupe des équations de Maxwell-Lorentz s'écrit alors en coordonnées curvilignes :

$$\nabla_\lambda F^{\mu\lambda} = \mu_0 J^\mu \quad (2.30)$$

La forme tensorielle (2.30) des équations (2.23) et (2.24) de Maxwell-Lorentz est valable pour des systèmes quelconques de coordonnées rectilignes ou curvilignes.

### 2.3.3 Second groupe des équations de Maxwell-Lorentz

Dans un système d'axes rectangulaires  $Oxyz$  à trois dimensions, le second groupe s'écrit :

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.31)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (2.32)$$

Les composantes sur l'axe  $Ox$  des vecteurs qui figurent dans l'équation (2.31) sont les suivantes :



$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \quad (2.33)$$

En remplaçant les composantes des vecteurs à partir de l'expression des composantes covariantes (2.12) du tenseur champ électromagnétique, il vient :

$$\partial_2 F_{30} + \partial_3 F_{02} + \partial_0 F_{23} = 0 \quad (2.34)$$

Une même projection sur les axes  $Oy$  et  $Oz$  montre que l'équation (2.31) peut s'écrire en coordonnées galiléennes réduites sous la forme tensorielle :

$$\partial_\gamma F_{\alpha k} + \partial_\alpha F_{k\gamma} + \partial_k F_{\gamma\alpha} = 0 \quad (2.35)$$

En écrivant l'expression de la divergence donnée par l'équation (2.32), puis en remplaçant les composantes des vecteurs en fonction de celles du tenseur champ électromagnétique, on obtient :

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0 \quad (2.36)$$

Le regroupement des équations (2.35) et (2.36) montre que le second groupe des équations de Maxwell-Lorentz s'écrit, en coordonnées galiléennes réduites, sous la forme :

$$\partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0 \quad (2.37)$$

Ces équations étant écrites en coordonnées rectilignes, les dérivées partielles sont à remplacer par les dérivées covariantes en coordonnées curvilignes, soit :

$$\nabla_\gamma F_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} = 0 \quad (2.38)$$

### 2.3.4 Loi de conservation de l'électricité

La conservation de la charge électrique exprime simplement le fait que la variation au cours du temps de la densité de charge  $\rho$  dans un volume unité est égale à la différence de la quantité d'électricité qui entre et sort de ce volume. L'équation de conservation s'écrit en fonction du courant électrique  $\mathbf{j}$  :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (2.39)$$

Pour obtenir la loi de conservation sous forme tensorielle, utilisons le premier groupe des équations de Maxwell-Lorentz écrit sous forme (2.29) :

$$\partial_\lambda F^{\mu\lambda} = \mu_0 J^\mu \quad (2.40)$$

Dérivons chaque membre de cette équation par rapport à  $x^\mu$  et effectuons une sommation sur l'indice  $\mu$ ; il vient :

$$\partial_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda} = \mu_0 \partial_\mu J^\mu \quad (2.41)$$

Pour montrer que le nombre de gauche de cette équation est nul, utilisons l'antisymétrie de  $F^{\mu\lambda}$  puis échangeons l'ordre de dérivation ainsi que les noms des indices de sommation ; on obtient :

$$\partial_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda} = -\partial_{\mu\lambda} F^{\lambda\mu} = -\partial_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} = -\partial_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda} = 0 \quad (2.42)$$

L'équation (2.41) devient ainsi, en coordonnées rectilignes réduites :

$$\partial_{\mu} J^{\mu} = 0 \quad (2.43)$$

Si l'espace-temps est rapporté à des coordonnées curvilignes, l'équation précédente devient :

$$\nabla_{\mu} J^{\mu} = 0 \quad (2.44)$$

On obtient la loi de conservation de l'électricité sous sa forme tensorielle générale.

## 2.4 Dynamique classique des milieux continus

Avant d'aborder la dynamique relativiste, nous rappellerons quelques formules de la dynamique classique des milieux continus mises sous forme tensorielle et que nous utiliserons par la suite.

### 2.4.1 Dérivées partielles et totale par rapport au temps

Tout milieu "continu" se compose en réalité d'un très grand nombre de particules microscopiques. Mais on peut décrire un milieu continu en considérant un élément de volume qui contient un nombre suffisant de particules permettant d'évaluer des grandeurs moyennes. Nous supposons qu'on peut ainsi définir une densité de matière, notée  $\rho$ , et un vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  de ce volume élémentaire. Le référentiel dans lequel on étudie l'évolution dans le temps des caractéristiques de ce volume élémentaire est rapporté à des coordonnées curvilignes  $(u^1, u^2, u^3, t)$  où  $t$  est le temps.

Notons  $A$  une entité qui caractérise ce volume élémentaire, par exemple la densité  $\rho$ , une composante de  $\mathbf{v}$ , etc. L'évolution de cette entité peut être décrite en un point fixe du référentiel et, dans ce cas, la dérivée de  $A$  est la dérivée partielle par rapport au temps :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_{u^k = \text{constante}} \quad (2.45)$$

Cette évolution peut également être rapportée à un système de coordonnées lié localement au mouvement du volume élémentaire. Les variations de  $A$  au cours du mouvement sont alors obtenues au moyen de la dérivée **totale** par rapport au temps, soit :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial A}{\partial u^k} \frac{du^k}{dt} \quad (2.46)$$

Introduisons les composantes contravariantes  $v^k = du^k/dt$  du vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  dans la formule précédente, il vient :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + v^k \partial_k A \quad (2.47)$$

## 2.4.2 Équation de conservation

La densité  $\rho$  d'un volume élémentaire et sa vitesse  $\mathbf{v}$  sont liés ensemble car le changement de densité dépend des entrées et des sorties du flux  $\rho\mathbf{v}$  de matière qui traverse la surface de ce volume. En coordonnées cartésiennes, on a une équation classique dite de continuité ou de conservation de la matière, analogue à (2.39) pour la charge électrique :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \quad (2.48)$$

La divergence de  $\rho\mathbf{v}$  comporte la somme des dérivées partielles par rapport aux coordonnées cartésiennes. En coordonnées curvilignes, ces dérivées sont remplacées par les dérivées covariantes ; il vient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_k(\rho v^k) = 0 \quad (2.49)$$

## 2.4.3 Forces de masse et forces superficielles

Considérons un volume élémentaire  $dV$  d'un milieu continu qui possède une masse  $dm = \rho dV$ . Des **forces de masse** agissent sur chaque volume élémentaire ; elles sont déterminées par des conditions extérieures, par exemple, la présence d'un champ de gravitation. La résultante des forces de masse est notée  $\mathbf{f} dV$  où  $\mathbf{f}$  est la force de masse par unité de volume, de composantes contravariantes  $f^i$ .

D'autre part, des forces superficielles agissent sur la surface des volumes élémentaires et proviennent des flux de matière et des déformations internes du milieu continu.

Considérons un élément de surface  $dS$  à l'intérieur d'un milieu continu. Cette surface élémentaire subit de la part du milieu des forces qui proviennent de la matière contigue à  $dS$ . On note  $d\mathbf{F} = \mathbf{T} dS$  la force qui agit sur cet élément de surface et qui est due aux particules intérieures au volume élémentaire. La force  $-\mathbf{T} dS$  sera, en vertu du principe de l'égalité de l'action et de réaction, la force superficielle exercée sur  $dS$  par les particules extérieures. Cette force sera, en général, dirigée obliquement sur  $dS$ . Lorsqu'elle est dirigée vers l'intérieur d'un volume considéré, on dit que c'est une **pression**, dans le cas où elle est dirigée vers l'extérieur, on parle d'une **tension**.

## 2.4.4 Tenseur des contraintes

Nous allons voir que les composantes de la force  $\mathbf{T}$  par unité de aire s'expriment sous forme des composantes d'un tenseur du deuxième ordre appelé **tenseur des**

**contraintes.** Considérons un tétraèdre élémentaire situé à l'intérieur d'un milieu continu, solide ou liquide, supposé en équilibre statique. Les extrémités des arêtes du tétraèdre sont notées respectivement  $OABC$  (Fig. 2.1). Chaque face du tétraèdre est soumise à une force interne due au milieu lui-même et proportionnelle à l'aire de sa surface.

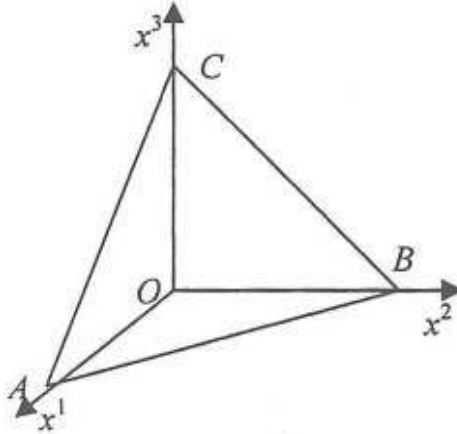


FIGURE 2.1.

Notons  $dS_k$  les aires des faces, soit :  $dS(OBC) = dS_1$ ;  $dS(OAC) = dS_2$ ;  $dS(OAB) = dS_3$ ;  $dS(ABC) = dS$ . Soit  $\mathbf{n}$  un vecteur unitaire orthogonal à la face  $ABC$ , dirigé de l'intérieur vers l'extérieur du tétraèdre.

Déterminons les expressions des composantes  $n_k$  du vecteur  $\mathbf{n}$  en fonction de l'aire  $dS$  et des aires  $dS_k$  des faces du tétraèdre. Les aires  $dS_k$  sont égales à la projection de l'aire  $ABC$  sur le  $k^e$  plan. Notons  $d\mathbf{S}$  le vecteur orthogonal à la surface  $ABC$ , de longueur égale à  $dS$  et dirigé de l'intérieur du tétraèdre vers l'extérieur. Soit  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , les vecteurs de base orthonormés, on a :

$$d\mathbf{S} = dS_1 \mathbf{i} + dS_2 \mathbf{j} + dS_3 \mathbf{k} \quad (2.50)$$

Le vecteur  $\mathbf{n}$  a donc pour composantes :

$$n_1 = dS_1/dS ; n_2 = dS_2/dS ; n_3 = dS_3/dS \quad (2.51)$$

Notons  $dt^i$  la force qui s'exerce sur une face d'aire  $dS_i$ ; ses composantes sont notées suivant les axes orthogonaux  $Ox^k$  :

$$dt^{i1} = t^{i1} dS_1 + t^{i2} dS_2 + t^{i3} dS_3 ; i = 1, 2, 3 \quad (2.52)$$

Soit  $T^j$  les composantes de la force  $\mathbf{T}$ , appelée **contrainte**, qui s'exerce par unité d'aire sur la face  $ABC$ . L'équilibre des forces du milieu continu s'exprime pour les composantes, selon l'axe  $Ox^1$ , par :

$$T^1 dS = dt^{11} + dt^{21} + dt^{31} = t^{k1} dS_k \quad (2.53)$$

Compte tenu des expressions (2.52) des composantes du vecteur  $\mathbf{n}$ , on a :

$$T^1 = t^{k1} (dS_k/dS) = t^{k1} n_k \quad (2.54)$$

On obtient des expressions analogues pour les axes  $Ox^2$  et  $Ox^3$ , d'où finalement :

$$T^j = t^{kj} n_k \quad (2.55)$$

Les quantités  $t^{kj}$  ainsi définies sont les composantes contravariantes d'un tenseur appelé **tenseur des contraintes**. Selon la direction des forces internes, on aura un **tenseur des pressions** ou **tenseur des tensions**. Le terme tenseur a précisément pour origine l'étude des tensions internes des milieux continus.

Dans un système de coordonnées curvilignes, le tenseur des contraintes  $t^{kj}$  sera également défini en fonction de la force par unité d'aire.

## 2.4.5 Équations générales de la dynamique des milieux continus

Considérons dans un milieu continu, une surface fermée quelconque  $S$  qui limite une portion de volume  $V$ . Utilisons un système de coordonnées rectilignes orthogonales  $x^1, x^2, x^3$ . Appelons  $\gamma^k$  les composantes de l'accélération du centre d'un élément de volume  $dV$  du volume  $V$ . La force élémentaire d'inertie qui s'exerce sur  $dV$  a pour expression :  $-\gamma^k \rho dV$ . D'autre part, les forces superficielles sont représentées par le tenseur  $t^{kj}$ . Écrivons les conditions classiques de nullité du vecteur du torseur formé par les forces d'inertie et les forces extérieures et superficielles, soit :

$$\int \int \int_V (f^i - \rho \gamma^i) dV - \int \int_S t^{ki} d\sigma_k = 0 \quad (2.56)$$

où l'élément d'intégration  $d\sigma_k$  est égal à  $dS_k/dS$ . Annulons d'autre part le moment du torseur, soit :

$$\int \int \int_V [(x^i(f^j - \rho \gamma^j) - x^j(f^i - \rho \gamma^i))] dV - \int \int_S (x^i t^{kj} - x^j t^{ki}) d\sigma_k = 0 \quad (2.57)$$

L'intégrale de surface qui figure au premier membre de (2.56) peut être transformée en une intégrale triple en utilisant la formule de Green. L'équation (2.56) s'écrit alors :

$$\int \int \int_V (f^i - \rho \gamma^i - \partial_k t^{ki}) dV = 0 \quad (2.58)$$

On peut faire de même pour l'intégrale de surface (2.57) ; on obtient :

$$\int \int \int_V [(x^i(f^j - \rho \gamma^j - \partial_k x^{kj}) - x^j(f^i - \rho \gamma^i - \partial_k x^{ki}))] dV - \int \int_S (t^{ij} - t^{ji}) dV = 0 \quad (2.59)$$

L'intégrale triple du premier membre de (2.58) étant identiquement nulle quel que soit le volume  $V$  considéré, il en résulte que l'élément d'intégration est nécessairement nul, soit :

$$f^i - \rho \gamma^i - \partial_k t^{ki} = 0 \quad (2.60)$$

La première intégrale triple de (2.59) est donc nulle. La seconde intégrale de cette même équation est alors également nulle, d'où :

$$t^{ij} - t^{ji} = 0 \quad (2.61)$$

Les équations (2.60) sont les équations de la dynamique des milieux continus dans un système de coordonnées rectilignes orthogonales. Dans un système de coordonnées curvilignes, ces équations s'écrivent :

$$\rho \gamma^k = f^k - \nabla_j t^{jk} \quad (2.62)$$

En coordonnées curvilignes, il correspond au tenseur des contraintes  $t^{jk}$  une densité de force par unité de volume donnée par :

$$K^k = \nabla_j t^{jk} = 0 \quad (2.63)$$

Les relations (2.61) montrent que le tenseur des contraintes est symétrique par rapport à ses deux indices.

### 2.4.6 Autre expression des équations générales

En donnant une forme explicite à l'accélération  $\gamma^i$  dans les équations générales (2.62) de la dynamique des milieux continus, on obtient une autre expression de ces équations. En effet, l'accélération est la dérivée totale par rapport au temps de la vitesse  $\mathbf{v}$  de composantes  $v^i$ . L'expression générale de l'accélération issue du calcul tensoriel nous donne :

$$\gamma^i = \frac{dv^i}{dt} + \Gamma_k^i{}^m v^k v^m = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \Gamma_k^i{}^m v^k v^m + v^k \partial_k v^i \quad (2.64)$$

En groupant les deux derniers termes du troisième membre de l'équation précédente, il vient :

$$\gamma^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^k \nabla_k v^i \quad (2.65)$$

Multiplions  $\gamma^i$  par la densité  $\rho$  et faisons entrer  $\rho$  sous les signes de dérivation du second membre de (2.65); on obtient :

$$\rho \gamma^i = \frac{\partial \rho v^i}{\partial t} + \nabla_k (\rho v^k v^i) - v^i \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_k (\rho v^k) \right] \quad (2.66)$$

La quantité précédente entre crochets représente l'équation de conservation de la masse (2.49). Cette quantité est nulle et l'équation (2.66) se réduit à :

$$\rho \gamma^i = \frac{\partial \rho v^i}{\partial t} + \nabla_k (\rho v^k v^i) \quad (2.67)$$

Les équations générales (2.62) de la dynamique des milieux continus s'écrivent alors, compte tenu de (2.67), sous la forme :

$$\frac{\partial \rho v^i}{\partial t} + \nabla_k (\rho v^k v^i + t^{ki}) = f^i \quad (2.68)$$

Ces nouvelles équations, ainsi que celle de conservation de la masse, permettent d'étudier les comportements d'un milieu continu sous l'action des différentes forces qu'il subit. Pour déterminer complètement ces évolutions, il faut naturellement connaître les expressions des composantes  $f^i$  et  $t^{ki}$ .

## 2.5 Dynamique relativiste des milieux continus

Afin d'obtenir la forme tensorielle générale de la dynamique relativiste des milieux continus, nous allons tout d'abord établir ces équations pour un volume élémentaire  $dV$  situé en un point  $M_0$  dans un référentiel  $R_0$  par rapport auquel l'élément de volume est immobile. Le référentiel  $R_0$  choisi est un système galiléen orthogonal.

### 2.5.1 Équations relativistes dans un système de repos

Puisque, par hypothèse, le volume  $dV$  est au repos au point  $M_0$ , le vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  de la matière est nul. Les composantes  $u^\alpha$  de la quadrivitesse unitaire associée à  $v^i$  sont donc telles qu'au point  $M_0$ , on a :

$$u^0 = 1 ; u^i = 0 \quad (2.69)$$

Par contre, les dérivées des composantes  $v^i, i = 1, 2, 3$ , de la vitesse ne sont pas nulles en général. Puisque  $u^\alpha$  est unitaire, on a :  $u^\alpha \partial_\mu u^\alpha = 0$  ; les dérivées de  $u^\alpha$  sont données par :

$$\partial_\mu u^0 = 0 ; \partial_\mu u^i = \frac{1}{c} \partial_\mu v^i \quad (2.70)$$

D'autre part, l'équation de conservation de la masse (2.49) s'écrit au point  $M_0$  dans le système  $R_0$  sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_k (p^{*k}) = 0 \quad (2.71)$$

L'équation (2.68) devient également au point  $M_0$ , puisque  $v^i = 0$  :

$$\frac{\partial p^{*k}}{\partial t} + \partial_k t^{ki} = f^i \quad (2.72)$$

Dans ces équations, les  $p^{*k}$  sont les composantes du vecteur impulsion par unité de volume qui, pour la mécanique classique, se réduit à  $\rho v^k$  correspondant à la masse de matière par unité de volume. Or, en dynamique relativiste, toutes les formes d'énergie apportent leur contribution au vecteur impulsion. Dans les milieux continus, il

faut donc ajouter l'énergie superficielle résultant des tensions ou des pressions. Nous verrons, par la suite, le cas où intervient l'énergie d'interaction électromagnétique.

Calculons le flux d'énergie qui traverse une surface d'aire  $dS$  dont les "composantes" sont notées  $d\sigma_k = dS_k/dS = n_k$ . La force superficielle, selon (2.55), s'écrit :

$$T^j = t^{kj} n_k \quad (2.73)$$

Supposons que le milieu matériel se déplace à la vitesse  $\mathbf{v}$  au voisinage de la surface  $dS$ . Notons  $v_j$  les composantes covariantes de cette vitesse dans la métrique d'espace  $dl^2 = -[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2]$ . Le travail de la force (2.73) est alors donné par :  $-v_j t^{kj} d\sigma_k$ .

L'élément de surface  $dS$  est donc traversé par une certaine quantité d'énergie correspondant à la fois à la densité de matière  $\rho$  et au tenseur des contraintes  $t^{kj}$ . Il va en résulter un certain vecteur impulsion de composantes  $p^k$  par unité de volume. Ces composantes comportent une partie classique  $\rho v^k$  et une masse correspond, selon l'équivalence entre masse et énergie, à  $-(1/c^2)v_j t^{kj}$  ; on obtient :

$$p^k = \rho v^k - \frac{1}{c^2} v_j t^{kj} \quad (2.74)$$

Au point  $M_0$ , le vecteur impulsion a des composantes qui sont nulles mais leurs dérivées ne le sont pas en général. Pour obtenir les équations de la dynamique relativiste des milieux continus, valables en  $M_0$  dans le repère galiléen  $R_0$ , on va substituer à  $p^{*k}$  qui figure dans les équations (2.71) et (2.72) l'expression  $p^k$  donnée par (2.74). En tenant compte du fait que les composantes  $v^i$  de la vitesse en  $M_0$  sont nulles, on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \partial_k v^k - \frac{1}{c^2} \partial_k v_j t^{kj} = 0 \quad (2.75)$$

$$\rho \frac{\partial v^i}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial v_j}{\partial t} t^{ij} + \partial_k t^{ik} = f^i \quad (2.76)$$

Transformons les deux équations précédentes en effectuant les dérivations par rapport à la variable réduite  $x^0 = ct$ , il vient :

$$c \partial_0 \rho + \rho \partial_k v^k - \frac{1}{c^2} \partial_k v_j t^{kj} = 0 \quad (2.77)$$

$$\rho c \partial_0 v^i - \frac{1}{c^2} \partial_0 v_j t^{ij} + \partial_k t^{ik} = f^i \quad (2.78)$$

Ce sont les équations relativistes du mouvement d'un milieu continu au point  $M_0$  par rapport au système de repos  $R_0$ .



## 2.5.2 Équations relativistes sous forme tensorielle

Cherchons à présent la forme tensorielle des équations générales de la dynamique relativiste des milieux continus. Les équations de la dynamique classique (2.68) écrites dans l'espace tridimensionnel suggèrent d'utiliser dans l'espace-temps un tenseur symétrique d'ordre deux, noté  $T^{\lambda\mu}$ . Ce tenseur doit admettre dans le système de coordonnées  $R_0$ , au point  $M_0$ , les composantes :

$$T^{ik} = t^{ik} ; T^{0i} = T^{i0} = T^{00} = 0 \quad (2.79)$$

Le tenseur  $T^{\lambda\mu}$  est le **tenseur relativiste des contraintes**. Si  $u_\mu$  est le quadrivecteur vitesse unitaire, le tenseur  $T^{\lambda\mu}$  vérifie l'identité tensorielle :

$$T^{\mu\lambda} u_\mu = 0 \quad (2.80)$$

En ce qui concerne le vecteur force  $f^i$  qui apparaît dans les équations (2.68), nous introduisons le vecteur de composantes  $\Phi^\lambda$  telles que au point  $M_0$  dans le système de coordonnées  $R_0$ , on ait :  $\Phi^k = f^k$  ;  $\Phi^0 = 0$ .

Le quadrivecteur  $\Phi^k$  joue le rôle d'un vecteur force ; il est constamment orthogonal à la quadrivitesse unitaire, soit :

$$\Phi^\mu u_\mu = 0 \quad (2.81)$$

En utilisant les tenseurs  $T^{\lambda\mu}$  et  $\Phi^\mu$  que nous venons d'introduire, les équations de la dynamique relativiste (2.77) et (2.78) peuvent être mises sous une forme tensorielle valable dans un système de coordonnées curvilignes quelconque. Nous vérifions, au cours de l'exercice (??) que les équations suivantes permettent de retrouver effectivement les équations (2.77) et (2.78) :

$$\nabla_\mu (\rho c^2 u^\lambda u^\mu + T^{\lambda\mu}) = \Phi^\lambda \quad (2.82)$$

Les équations (2.82) sont les équations tensorielles générales de la dynamique relativiste des milieux continus.

## 2.6 Tenseur Impulsion-Énergie

### 2.6.1 Tenseur impulsion-énergie d'un milieu continu

Le quadrivecteur impulsion-énergie qui est introduit en coordonnées rectangulaires se généralise en coordonnées curvilignes. Pour un milieu continu, les équations (2.82) conduisent à introduire un tenseur de deuxième ordre  $P^{\lambda\mu}$  :

$$P^{\lambda\mu} = \rho u^\lambda u^\mu + \frac{1}{c^2} T^{\lambda\mu} \quad (2.83)$$

Le tenseur  $P^{\lambda\mu}$  est appelé **le tenseur impulsion-énergie** d'un milieu continu. L'identité tensorielle (2.80) montre qu'on a :

$$P^{\lambda\mu} u_\mu = \rho u^\lambda \quad (2.84)$$

Ce tenseur permet d'écrire les équations tensorielles (2.82) sous la forme suivante qui généralise l'équation fondamentale de la dynamique relativiste d'une masse :

$$\nabla_{\mu} P^{\lambda\mu} = \frac{1}{c^2} \Phi^{\lambda} \quad (2.85)$$

### 2.6.2 Quadrivecteur densité de force de Lorentz

Lorsqu'on considère un milieu constitué d'un grand nombre de charges électriques, formant ainsi un milieu continu, il faut tenir compte des actions électromagnétiques pour déterminer l'impulsion-énergie du milieu. Auparavant, il faut déterminer le vecteur force qui apparaît dans l'équation (2.85).

Pour cela, considérons la force qui s'exerce sur la quantité d'électricité contenue dans l'unité de volume. Cette densité de force est donnée par la théorie de Maxwell-Lorentz et s'écrit en coordonnées galiléennes sous la forme :

$$\mathbf{K} = \rho \mathbf{E} + \rho \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.86)$$

Les vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont les vecteurs champs électrique et magnétique ;  $\mathbf{v}$ , une vitesse locale des particules ;  $\rho$ , la densité des charges du milieu. Les composantes selon l'axe  $Ox$  des vecteurs de l'équation (2.86) ont pour relation :

$$K_x = \rho E_x + \rho v_y H_z - \rho v_z H_y \quad (2.87)$$

Transformons cette dernière équation en remplaçant les composantes cartésiennes de la vitesse par leurs composantes covariantes et introduisons les composantes contravariantes du tenseur champ électromagnétique ; il vient :

$$K^1 = J_0 F^{01} + J_2 F^{21} + J_3 F^{31} = J_{\lambda} F^{\lambda 1} \quad (2.88)$$

Un calcul analogue pour les composantes  $K^k$  selon les axes  $Oy$  et  $Oz$  montre que l'on a :

$$K^k = J_{\lambda} F^{\lambda k} \quad (2.89)$$

Dans l'espace quadridimensionnel, la densité de force (2.89) doit être complétée par un terme  $K^0$  conduisant à un quadrivecteur valable dans un système quelconque de coordonnées curvilignes. Les composantes contravariantes sont données par :

$$K^{\mu} = J_{\lambda} F^{\lambda\mu} \quad (2.90)$$

La quatrième composante  $K^0$  ainsi introduite a pour expression en coordonnées galiléennes réduites :

$$K^0 = J_1 F^{10} + J_2 F^{20} + J_3 F^{30} \quad (2.91)$$

Compte tenu de la formule (2.86), la composante  $K^0$  s'écrit :

$$K^0 = \frac{1}{c} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{c} \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} \quad (2.92)$$

La composante  $K^0$  représente au facteur  $1/c$  près, le travail fourni par unité de temps et de volume par la densité de force  $\mathbf{K}$ . Le quadrivecteur défini par (2.90) est appelé **quadrivecteur densité de force de Lorentz**. On démontre aisément que ce vecteur est orthogonal au vecteur courant  $J^\mu$ .

### 2.6.3 Tenseur impulsion-énergie du champ électromagnétique

Lorsque le nombre de charges électriques qui figurent dans un milieu continu est extrêmement élevé, chaque particule chargée subit le champ électromagnétique  $F^{\lambda\mu}$  créé par l'ensemble des autres charges. Le milieu considéré est donc soumis à la densité de force de Lorentz  $K^\mu$  défini par (2.90).

Les équations générales du mouvement du milieu continu comportant des charges électriques sont donc les équations (2.85) dans lesquelles le vecteur force par unité de volume  $\Phi^\mu$  est remplacé par la densité de force  $K^\mu$ . Les équations (2.85) s'écrivent alors :

$$\nabla_\mu P^{\lambda\mu} = \frac{1}{c^2} K^\lambda \quad (2.93)$$

Le second membre de cette dernière équation peut être mis sous la forme de la dérivée covariante d'un tenseur du deuxième ordre. Pour cela, substituons dans l'expression de  $K^\lambda$  donnée par (2.90), le courant  $J_\mu$  donné par (2.30) et dont l'expression est :

$$K_\lambda = J^\mu F_{\lambda\mu} \quad (2.94)$$

il vient :

$$K_\lambda = \frac{1}{\mu_0} F_{\lambda\mu} \nabla_\nu F^{\mu\nu} \quad (2.95)$$

En intégrant par partie le second membre de l'équation précédente, on obtient :

$$\mu_0 K_\lambda = -\nabla_\nu (F_{\lambda\mu} F^{\mu\nu}) + F^{\mu\nu} \nabla_\nu F_{\lambda\mu} \quad (2.96)$$

Le dernier terme de l'équation (2.96) s'écrit en échangeant les indices de sommation  $\mu, \nu$  et en tenant compte de l'antisymétrie du tenseur champ électromagnétique :

$$F^{\mu\nu} \nabla_\nu F_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} (F^{\mu\nu} \nabla_\nu F_{\lambda\mu} + F^{\nu\mu} \nabla_\mu F_{\lambda\nu}) = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} (\nabla_\nu F_{\lambda\mu} + \nabla_\mu F_{\nu\lambda}) \quad (2.97)$$

D'autre part, le second groupe des équations de Maxwell peut s'écrire sous la forme :

$$\nabla_\nu F_{\lambda\mu} + \nabla_\mu F_{\nu\lambda} + \nabla_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \quad (2.98)$$

L'expression (2.97) s'écrit alors compte tenu de (2.98) :

$$F^{\mu\nu} \nabla_\nu F_{\lambda\mu} = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \nabla_\lambda F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \nabla_\lambda (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \quad (2.99)$$

En reportant le dernier terme de (2.99) dans la relation (2.96), on obtient :

$$-\mu_0 K_\lambda = \nabla_\nu (F_{\lambda\mu} F^{\mu\nu}) + \frac{1}{4} \nabla_\lambda (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) \quad (2.100)$$

Changeant les indices, il vient :

$$-\mu_0 K_\lambda = \nabla_\mu \left( F_{\lambda\alpha} F^{\alpha\mu} + \frac{1}{4} g_\lambda^\mu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \quad (2.101)$$

Cette dernière expression de  $K_\lambda$  permet d'introduire un tenseur symétrique, appelé **tenseur d'impulsion-énergie du champ électromagnétique**, à savoir :

$$M_{\lambda\mu} = \frac{1}{\mu_0 c^2} \left( \frac{1}{4} g_{\lambda\mu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F_{\lambda\alpha} F_\mu^\alpha \right) \quad (2.102)$$

En ayant  $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ , on peut aussi écrire :

$$M_{\lambda\mu} = \varepsilon_0 \left( \frac{1}{4} g_{\lambda\mu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F_{\lambda\alpha} F_\mu^\alpha \right) \quad (2.103)$$

Compte tenu de (2.102), les équations fondamentales (2.93) du mouvement d'un milieu continu contenant des charges électriques s'écrit alors sous la forme :

$$\nabla_\mu (P^{\lambda\mu} + M^{\lambda\mu}) = 0 \quad (2.104)$$

Le tenseur impulsion-énergie  $P^{\lambda\mu}$  pour un milieu continu a pour origine les forces de masse et les forces superficielles ; le tenseur  $M^{\lambda\mu}$  est lié aux forces électromagnétiques agissant sur les particules chargées. Le tenseur :

$$Q^{\lambda\mu} = P^{\lambda\mu} + M^{\lambda\mu} \quad (2.105)$$

est le **tenseur impulsion-énergie total** pour un milieu continu prenant en compte les actions électromagnétiques.

## 2.7 Exercices

### 2.7.1 Quadrivecteur dalembertien

1. L'opérateur gradient, noté  $\nabla$ , de l'espace à trois dimensions peut être généralisé pour l'espace-temps à quatre dimensions sous la forme :

$$\nabla_4 = \left( -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial ct} \right) = \left( -\nabla_3, -\frac{\partial}{\partial ct} \right) \quad (2.106)$$

où les coordonnées  $x, y, z, ct$  sont les coordonnées galiléennes.

Montrer que l'opérateur  $\nabla_4$  possède les propriétés d'un quadrivecteur lors du passage d'un référentiel d'inertie  $R$  à un autre  $R'$  animé d'une vitesse uniforme de translation par rapport au précédent.

2. Écrire l'expression de la divergence d'un quadrivecteur  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ .

3. Écrire l'expression du dalembertien, noté  $\square$ , en fonction de l'opérateur  $\nabla_4$  et en déduire que  $\square$  est un quadrivecteur.

### 2.7.2 Correction

1. Utilisons les formules de la transformation de Lorentz-Poincaré qui sont des formules de changement de variables. On obtient :

$$-\frac{\partial}{\partial x'} = \gamma(V) \left( -\frac{\partial}{\partial x} - \beta \frac{\partial}{\partial ct} \right) ; \quad -\frac{\partial}{\partial y'} = -\frac{\partial}{\partial y} ; \quad -\frac{\partial}{\partial z'} = -\frac{\partial}{\partial z} \quad (2.107)$$

$$-\frac{\partial}{\partial ct'} = \gamma(V) \left( \frac{\partial}{\partial ct} - \beta \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (2.108)$$

L'opérateur défini par :

$$\nabla_4 = \left( -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial ct} \right) = \left( -\nabla_3, -\frac{\partial}{\partial ct} \right) \quad (2.109)$$

possède bien les propriétés de transformation d'un quadrivecteur.

2. La divergence d'un quadrivecteur  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$  s'obtient en effectuant le "produit scalaire" entre les quadrivecteurs  $\nabla_4$  et  $\mathbf{A}$ . On obtient :

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla_4 \cdot \mathbf{A} = - \left( -\frac{\partial A_1}{\partial x} - \frac{\partial A_2}{\partial y} - \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) + \frac{\partial A_4}{\partial ct} \quad (2.110)$$

3. L'opérateur dalembertien s'obtient en effectuant le carré scalaire du quadrivecteur  $\nabla_4$ . On obtient :

$$\nabla_4 \cdot \nabla_4 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \square \quad (2.111)$$

Puisque l'opérateur  $\nabla_4$  est un quadrivecteur, sa norme est un invariant relativiste. Par conséquent, le dalembertien reste invariant pour la transformation de Lorentz-Poincaré. On écrira :  $\square = \square'$ .

### 2.7.3 Équations fondamentales de la dynamique relativiste des milieux continus

Les équations fondamentales de la dynamique relativiste des milieux continus sont données par les relations (2.82), à savoir :

$$\nabla_\mu (\rho c^2 u^\lambda u^\mu + T^{\lambda\mu}) = \Phi^\lambda \quad (2.112)$$

où  $\rho$  est la densité d'un volume élémentaire du milieu continu ;  $T^{\lambda\mu}$  les composantes du tenseur des pressions ou des tensions ;  $\Phi^\lambda$  est un vecteur qui a pour composantes :  $\Phi^k = f^k$  ;  $\Phi^0 = 0$ , où  $\mathbf{f}$  est la force de masse par unité de volume, de composantes contravariantes  $f^i$ .

1. Écrire les équations (2.112) pour  $\lambda = 0$  et pour  $\lambda = k$  dans un système de coordonnées galiléennes  $S_0$  par rapport auquel la matière est au repos en un point  $M_0$  de l'espace-temps.
2. Démontrer qu'on a la relation :  $\partial_\lambda T^{0\mu} = -\partial_\lambda u_k T^{k\mu}$ .
3. Reporter dans les équations écrites en (1) les expressions de  $\partial_\lambda T^{0\mu}$ .
4. En substituant aux composantes  $u^i$  les composantes  $\nu^i$  selon (2.70) dans les équations précédentes, montrer qu'on retrouve les équations (2.77) et (2.78).

#### 2.7.4 Correction

1. Pour  $\lambda = 0$  et pour  $\lambda = i$ , les équations (2.112) s'écrivent :

$$c^2 \partial_0 \rho + c^2 \rho \partial_k u^k + \partial_k T^{0k} + \partial_0 T^{00} = 0 \quad (2.113)$$

$$c^2 \partial_0 u^i + \partial_k t^{ik} + \partial_0 T^{i0} = f^i \quad (2.114)$$

2. Les termes  $\partial_\lambda T^{0\mu}$  qui figurent dans les équations (2.113) et (2.114) peuvent s'écrire au point  $M_0$  :

$$\partial_\lambda T^{0\mu} = \partial_\lambda (u_0 T^{0\mu}) \quad (2.115)$$

Compte tenu de l'équation (2.80), on peut écrire :

$$\partial_\lambda (u_0 T^{0\mu}) = -\partial_\lambda (T^{hu} u_h) = -\partial_\lambda u_h T^{h\mu} \quad (2.116)$$

Les relations (2.115) et (2.116) nous donnent :

$$\partial_\lambda T^{0\mu} = -\partial_\lambda u_h T^{h\mu} \quad (2.117)$$

3. En reportant les expressions de  $\partial_\lambda T^{0\mu}$  données par (2.117) dans les équations (2.113) et (2.114), on obtient :

$$c^2 \partial_0 \rho + c^2 \rho \partial_k u^k - \partial_k u_h t^{kh} = 0 ; \quad \lambda = 0 \quad (2.118)$$

$$c^2 \partial_0 u^i + \partial_k t^{ik} - \partial_0 u_h t^{hi} = f^i ; \quad \lambda = i \quad (2.119)$$

4. Les dérivées partielles  $u^i$  de la vitesse unitaire sont liées aux dérivées des composantes  $\nu^i$  de la vitesse de la matière, qui est nulle au point  $M_0$ , par les relations (2.70), à savoir :

$$\partial_\mu u^0 = 0 ; \quad \partial_\mu u^i = \frac{1}{c} \partial_\mu v^i \quad (2.120)$$

Substituons aux composantes  $u^i$  les composantes  $\nu^i$  données par (2.120) dans les équations (2.118) et (2.119), il vient :

$$c \partial_0 \rho + \rho \partial_k u^k - \frac{1}{c^2} \partial_k v_h t^{kh} = 0 \quad (2.121)$$

$$c \partial_0 v^i + \partial_k t^{ik} - \frac{1}{c} \partial_0 v_h t^{ih} = f^i \quad (2.122)$$

On vérifie ainsi que les équations fondamentales de la dynamique relativiste des milieux continus redonnent bien les équations établies dans le cas d'un système galiléen orthogonal.

### 2.7.5 Quadrivecteur potentiel

Les champs électrique  $\mathbf{E}$  et magnétique  $\mathbf{B}$  constituent des aspects parcellaires d'une seule entité, le champ électromagnétique. Il en est de même pour le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  et le potentiel scalaire  $\Phi$  puisque ces derniers sont liés aux champs électrique et magnétique par les équations de Maxwell.

1. Déterminer les équations de propagation des potentiels électrique  $\mathbf{E}$  et magnétique  $\mathbf{B}$  à partir des équations de Maxwell en imposant la condition de jauge de Lorentz définie par :

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (2.123)$$

2. On définit le quadripotentiel  $\mathbf{A}$  par :

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z, \Phi/c) = (A, \Phi/c) \quad (2.124)$$

Déterminer l'équation de propagation du quadripotentiel  $\mathbf{A}$  en partant des équations de propagation de  $A$  et  $\Phi$ .

3. En déduire que le quadripotentiel est un quadrivecteur. Déterminer les formules de transformation des composantes de  $\mathbf{A}$  lors du passage d'un référentiel d'inertie à un autre.

### 2.7.6 Correction

1. Avec le choix de jauge de Lorentz, les potentiels satisfont aux équations de propagation :

$$\square \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} ; \quad \square \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta \Phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2.125)$$

où  $\rho$  est la densité de courant,  $\mathbf{j}$ , le vecteur densité de courant.

2. On définit le quadripotentiel  $\mathbf{A}$  dans un référentiel R par :

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z, \Phi/c) = (A, \Phi/c) \quad (2.126)$$

Le vecteur  $\mathbf{A}$  ainsi défini permet de mettre la jauge de Lorentz sous la forme d'une quadridivergence :

$$\nabla_4 \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (2.127)$$

L'équation de propagation du potentiel scalaire  $\Phi$  peut s'écrire sous la forme :

$$\square \frac{\Phi}{c} = \frac{\rho c}{\varepsilon_0 c^2} = \mu_0 c \rho = \mu_0 J_4 \quad (2.128)$$

où  $J_4$  est la quatrième composante du quadrivecteur densité de courant  $\mathbf{J}$ . Le quadripotentiel  $\mathbf{A}$  permet alors de regrouper les équations de propagation des potentiels  $A$  et  $\Phi$  en une seule :

$$\square \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (2.129)$$

3. Il en résulte de cette dernière équation que le quadripotentiel  $\mathbf{A}$  est un quadrivecteur. Le dalembertien  $\square$  est un invariant relativiste et  $\mathbf{J}$  est un quadrivecteur. Dans un autre référentiel d'inertie  $R'$ , le quadripotentiel a pour expression :

$$\mathbf{A}' = (A'_x, A'_y, A'_z, \Phi'/c) = (A', \Phi'/c) \quad (2.130)$$

Par conséquent, les formules de transformation des composantes du quadrivecteur  $\mathbf{A}$  sont données par :

$$A'_x = \gamma(V) \left( A_x - \beta \frac{\Phi}{c} \right) ; \quad A'_y = A_y ; \quad A'_z = A_z ; \quad \frac{\Phi'}{c} = \gamma(V) \left( \frac{\Phi}{c} - \beta A_x \right) \quad (2.131)$$



# Chapitre 3

## Idées de base de la relativité générale

Considéré d'un point de vue mathématique, l'espace-temps plat de la relativité restreinte n'est rien de plus qu'un ensemble dont les points représentent les positions spatiotemporelles des événements physiques. Dans un tel espace-temps, les effets gravitationnels sont complètement négligés, comme si la matière n'existait pas. En relativité générale, la matière, et donc la gravitation, va être prise en compte, déformant l'espace-temps de la relativité restreinte.

D'autre part, la relativité restreinte ne considère que des systèmes de référence en translation uniforme les uns par rapport aux autres. Une telle restriction ne permet pas d'englober tous les types de référentiels possibles ainsi que va le faire la relativité générale.

Un petit nombre d'idées de base, conduisant à des hypothèses ou principes, va être utilisé pour poser les fondements de la relativité générale. Les développements mathématiques de ces hypothèses aboutissent à des formules fondamentales appelées **équations du champ de gravitation ou équations d'Einstein**.

### 3.1 Il faut modifier la loi de gravitation

Selon la loi d'attraction universelle, la force d'attraction qui s'exerce entre deux masses quelconques est proportionnelle à leur produit et inversement proportionnelle au carré de la distance qui sépare leur centre de masse.

Cette loi newtonienne n'entre cependant pas dans le cadre de la relativité restreinte car elle n'est pas invariante par une transformation de Lorentz-Poincaré. Il est remarquable que dès 1905, Henri Poincaré s'interroge sur la loi de la gravitation et il va rechercher :

**Quelles modifications elle [la transformation de Lorentz-Poincaré] nous obligerait à apporter aux lois de la gravitation. C'est ce que j'ai cherché à déterminer : j'ai été d'abord conduit à supposer que la propagation de la gravitation n'est pas instantanée, mais se fait avec la vitesse de la lumière.**

Poincaré a ainsi cherché à rendre relativiste la loi de la gravitation ce que d'autres feront après lui. Plusieurs essais infructueux virent ainsi le jour avant l'avènement de la théorie de la relativité générale d'Einstein en 1915 car ces tentatives restèrent dans le cadre de la relativité restreinte. Einstein, par le biais d'une généralisation à tous les repères accélérés ou non, va venir à bout de toutes les difficultés qu'engendrait une restriction aux seuls référentiels d'inertie.

## 3.2 Gravitation et accélération équivalentes

La loi de la dynamique de Newton postule que la résultante  $F$  des forces appliquées à un corps est égale au produit de son accélération  $a$  par un coefficient appelé **masse inerte** ou **inertielle**, notée  $m_i$ , du corps :  $F = m_i a$ .

D'autre part, Newton introduisit ce que'on appelle la **masse gravitationnelle**, notée  $M_g$  ou  $m_g$ , dans l'expression de la loi d'attraction universelle entre les corps. Cette dernière postule que la force  $F$  qu'exerce une masse  $M_g$  sur une autre  $m_g$ , est attractive et dirigée suivant la droite joignant le centre des masses, qu'elle est proportionnelle au produit des deux masses, et inversement proportionnelle au carré de la distance  $r$  qui sépare ces centres :  $F = G M_g m_g / r^2$ .

On peut considérer que ces masses gravitationnelles, encore appelées **masses graves**, agissent comme des sources qui engendrent la force de gravitation, ou encore comme des "charges" gravitationnelles qui s'attirent l'une l'autre.

### 3.2.1 Principe d'équivalence de Newton

La masse inerte  $m_i$  ainsi que la masse gravitationnelle  $m_g$  peuvent à priori être distinctes et varier suivant la substance du corps.

Newton postula, au contraire, que le rapport entre les masses  $m_i$  et  $m_g$  d'un même corps est indépendant de la substance dont il est constitué. Il se proposa de vérifier expérimentalement la validité de son postulat à l'aide d'expériences faites avec des pendules comportant des masses de différentes substances suspendues à des fils de même longueur. En mesurant la fréquence d'oscillations des pendules, Newton vérifia que le rapport  $m_g/m_i$  est indépendant de la substance formant la masse du pendule. Certes, la précision n'était que de l'ordre de  $10^{-3}$  mais de nombreuses expériences ultérieures, jusqu'au cours du 20e siècle, ont permis d'atteindre une précision de  $10^{-12}$ .

Le rapport  $m_i/m_g$  est donc une constante universelle indépendante de toute substance particulière. En choisissant convenablement un système d'unités, on peut faire en sorte que  $m_i = m_g$ . Le postulat de l'égalité entre les masses inertes et graves constitue le **principe d'équivalence newtonien**.

L'étude de la chute des corps dans le vide permet également de vérifier ce principe d'équivalence. Cette expérience classique montre que tous les corps tombent avec la

même accélération  $a$  dans un champ de gravitation donné. En combinant la loi d'attraction universelle et la loi de la dynamique de Newton, on obtient pour expression de l'accélération :  $a = F/m_i = (G M_g/r^2)/(m_g/m_i)$ . Puisque l'accélération  $a$  est une constante, le rapport  $m_g/m_i$  est identique pour tous les corps.

La loi d'attraction universelle présente donc une caractéristique fondamentale parmi les autres forces connues de la physique. En effet, l'accélération  $a$  communiquée à une masse  $m_i$  par une force quelconque  $F$ , dépend en général de sa masse puisque :  $a = F/m_i$ . Par contre un corps placé dans un champ de gravitation dû à une masse  $M_g$  acquiert une **accélération indépendante de sa masse** puisque  $m_g = m_i$ , d'où :  $a = (G M_g/r^2)$

### 3.2.2 Mesures dans des champs de gravitation et d'accélération

Un problème reste posé par cette identification entre masses inerte et grave. Newton n'avait fait que constater un résultat expérimental, puis l'avait posé comme postulat, mais sans donner une interprétation de l'origine d'une telle identité.

Pour comprendre cette dernière, imaginons les expériences suivantes décrites par la figure 3.1. Une masse  $m$  est suspendue à un ressort fixé dans la partie supérieure d'une boîte. Lorsque la boîte se trouve immobile sur la Terre, la masse  $m$  subit un champ de gravitation  $g$  et elle étire le ressort d'une certaine longueur  $L$ . Imaginons à présent la même boîte suffisamment éloignée de la Terre pour ne plus subir d'influence gravifique, et supposons qu'elle soit soumise à une accélération de valeur  $g$ . Le ressort subira également un allongement identique  $L$ . Les effets d'un champ de gravitation ou d'un champ d'accélération sont les mêmes. Un observateur situé à l'intérieur de la boîte ne pourra pas savoir si l'étirement du ressort est dû à la gravitation ou à l'accélération.

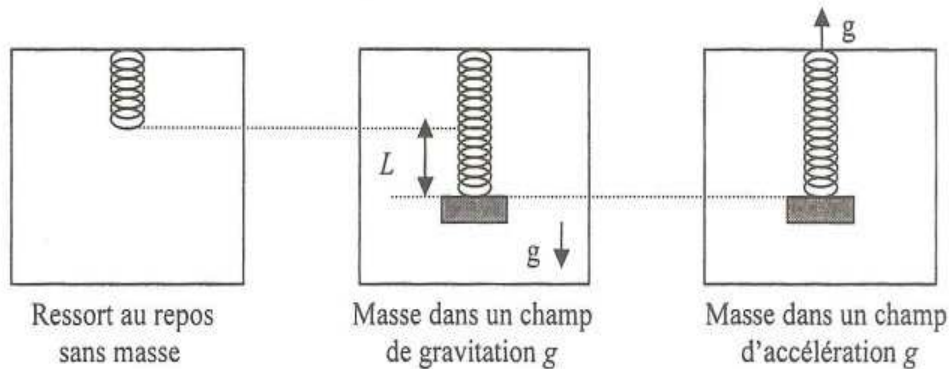


FIGURE 3.1.

Dans un champ de gravitation, l'allongement du ressort est déterminé par la masse gravitationnelle  $m_g$  du corps. Par contre dans un champ d'accélération, ce même allongement est dû à la masse inertielle  $m_i$ . Nous voyons apparaître l'égalité

nécessaire entre la masse gravitationnelle et la masse inertielle puisque l'allongement  $L$  du ressort est identique dans les deux expériences.

### 3.2.3 Principe d'équivalence d'Einstein

C'est cette équivalence physique entre un champ de gravitation et l'accélération correspondante de la boîte, celle-ci pouvant être considérée comme un système de référence, qui constitue le principe d'équivalence d'Einstein.

Ce principe est publié par Einstein en 1907, dans un article intitulé : **Le principe de la relativité et les conséquences tirés de celui-ci** :

**Nous considérons deux systèmes en mouvement  $S_1$  et  $S_2$ . Supposons  $S_1$  accéléré selon l'axe des  $X$  et soit  $\gamma$  la grandeur constante dans le temps de cette accélération. On suppose  $S_2$  au repos mais placé dans un champ de gravitation homogène qui communique à tous les objets une accélération  $\gamma$  dans la direction des  $X$ . Pour autant que nous sachions, les lois physiques par rapport à  $S_1$  ne diffèrent pas de celle par rapport à  $S_2$ . Nous n'avons par conséquent, dans l'état actuel de notre expérience, aucune raison d'admettre que les systèmes  $S_1$  et  $S_2$  diffèrent l'un de l'autre sous quelque rapport que ce soit, et nous allons dans la suite faire la complète équivalence physique entre un champ de gravitation et l'accélération correspondant du système de référence.**

En particulier, si la boîte située dans un champ de gravitation de la figure 3.1 est en chute libre avec une accélération  $g$ , tous les corps présents dans cette boîte apparaîtront comme non accélérés par rapport à celle-ci. Donc, par rapport à un tel référentiel, le champ gravitationnel extérieur est "effacé". Les lois de la physique non gravitationnelle s'appliquent donc, dans ce référentiel local en chute libre, comme elles le faisaient dans un référentiel inertiel.

### 3.2.4 Équivalence locale entre gravitation et accélération

La formulation de l'équivalence d'Einstein a lieu pour une accélération **constante** et un champ de gravitation **homogène**. Dans ce cas, c'est tout le référentiel accéléré qui est équivalent à tout référentiel contenant le champ de gravitation.

On pourrait penser que, quel que soit le champ de gravitation, il est possible de trouver un référentiel accéléré donnant un champ d'accélération équivalent. Ce n'est pas vrai en général; c'est le cas, par exemple, du champ de gravitation de notre planète. Celui-ci est en effet dirigé, en tout point de la surface du globe, vers le centre de la Terre. Aucun système de référence accéléré ne permet de recréer la **totalité** du champ de gravitation terrestre.

La principe d'équivalence entre gravitation et accélération ne s'applique, en général, qu'à un espace assez limité. Ce principe est donc le suivant :

**Un champ de gravitation est localement équivalent à un champ d'accélération.**

Il est donc seulement possible de remplacer **localement** les forces gravitationnelles par des forces d'inertie engendrées par une accélération.

### 3.3 Systèmes de référence équivalents

En Relativité restreinte, on postule que les lois de la physique doivent avoir la même forme dans tous les référentiels en translation uniforme. Ces derniers jouissent donc d'un certain privilège par rapport à des référentiels quelconques accélérés.

Or le principe d'équivalence met en avant le fait que les lois de la physique ne diffèrent pas selon qu'il s'agit d'un référentiel accéléré ou gravitationnel. Il existe donc des référentiels qui ne sont pas ceux de la Relativité restreinte.

#### 3.3.1 Critique des fondements de la mécanique classique

Les réflexions du physicien Ernst Mach sur les fondements de la mécanique classique furent à l'origine de la recherche de nouveaux principes de base. Dans son ouvrage de 1916, Einstein reprend les critiques de Mach sur les insuffisances des fondements de la mécanique classique; il y ajoute également ceux de la relativité restreinte :

**Comme nous l'avons déjà signalé à plusieurs reprises, la Mécanique classique part de ce principe : les points matériels suffisamment éloignés d'autres points matériels effectuent un mouvement rectiligne et uniforme ou restent au repos. Nous avons aussi plus d'une fois fait remarquer que cette loi fondamentale ne peut être valable que pour des corps de référence  $K$  qui sont dans des états de mouvements particuliers et qui effectuent, les uns par rapport aux autres, un mouvement de translation uniforme. Relativement à d'autres corps de référence  $K'$  la loi n'est pas valable.**

Parmi les systèmes de référence  $K'$ , ceux qui effectuent un mouvement de rotation uniforme sans avoir besoin pour leur maintien d'aucune action extérieure mettent bien en évidence cette différence arbitraire entre référentiels.

[...] je cherche en vain dans la Mécanique classique (ou dans la théorie de la relativité restreinte) ce quelque chose de réel auquel je puisse attribuer le comportement différent des corps par rapport aux systèmes de référence  $K$  et  $K'$ . Newton avait déjà vu cette objection et il chercha en vain à l'infirmier. C'est E. Mach qui l'a reconnue le plus clairement et exigé, à cause d'elle, que la mécanique soit établie sur une nouvelle base. Cette objection ne peut être évitée que par une physique qui satisfait au principe de relativité générale.

### 3.3.2 Principe de relativité généralisée

On peut alors se demander si les lois de la physique ne doivent pas pouvoir être exprimées, sous une même forme dans n'importe quel genre de référentiel. Pourquoi, en effet, la nature donnerait-elle un privilège particulier aux systèmes en translation uniforme ? Le fait de juger qu'un mouvement est uniforme dépend en effet de l'état de mouvement dans lequel on se trouve soi-même. Ainsi que le dit Einstein :

**Qu'est-ce que la Nature a à faire avec les systèmes de coordonnées et leur état de mouvement, alors que c'est nous qui les avons introduits ?**

Einstein va donc étendre le principe de relativité de Poincaré et postuler que toutes les lois de la Nature doivent avoir la même forme dans tous les référentiels.

C'est le **principe de relativité générale** qui peut être exprimé de la manière simple suivante :

**Tous les systèmes de référence, quel que soit leur état de mouvement, doivent être équivalents pour l'expression des lois de la Nature.**

Ainsi que nous allons le voir par la suite, l'idée fondamentale de ce principe doit être exprimée d'une manière plus abstraite pour être tout à fait exacte.

### 3.3.3 Une idée audacieuse

Il fallait une certaine audace pour généraliser ainsi le principe de relativité, car les observations les plus familières semblent contredire cette généralisation. Par exemple, lorsque nous sommes dans une voiture qui roule à vive allure et que le conducteur décélère brusquement, en donnant un coup de frein, nous sommes projetés en avant. Il paraît difficile d'admettre que les lois de la mécanique sont les mêmes dans un système en translation uniforme et dans un autre accéléré.

Si le principe d'équivalence repose sur des mesures précises et des faits expérimentaux, il n'en est pas de même du principe de relativité généralisée.

Aucun argument basé sur l'expérience ou la théorie ne permettait de soutenir ce principe, mais Einstein le concevait sans doute comme une sorte de nécessité philosophique, d'idéal unificateur. Comme toutes les hypothèses, ce seront les résultats expérimentaux qui devront valider ou non cette extension du principe de relativité.

## 3.4 Nécessité d'une géométrie non-euclidienne

La relativité générale va être édifiée sur la base de la Relativité restreinte. Puisque cette dernière ne s'occupe que des référentiels en translation uniforme, elle ne remet pas en cause les propriétés géométriques classiques de l'espace. Ces propriétés sont

celles de la géométrie dite euclidienne. Pour celle-ci, par exemple, la somme des angles d'un triangle est égale à 180 degrés, le rapport entre la circonférence et le diamètre d'un cercle est égal à 3.14..., etc. Il n'en est plus de même lorsqu'on considère des systèmes de référence accélérés auxquels on applique les lois de la Relativité restreinte.

### 3.4.1 Systèmes de référence en rotation

Dans un système de référence d'inertie rapporté à des coordonnées galiléennes, l'intervalle  $ds$  est déterminé par la relation (1.4) :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (3.1)$$

Lorsqu'on passe à tout autre référentiel d'inertie, on sait que l'expression de l'intervalle n'est pas affectée. Mais si l'on passe à un référentiel non inertiel, l'expression de  $ds^2$  n'est plus alors la différence des carrés des différentielles temporelles et spatiales.

Considérons, par exemple, deux référentiels (Fig. 3.2) dont l'un  $R$  est supposé fixe, et l'autre  $R'$  tourne uniformément autour d'un axe commun  $Oz$ . Un cercle dans le plan  $Oxy$  du référentiel  $R$ , centré sur  $Oz$ , peut être aussi considéré comme un cercle dans le plan  $Ox'y'$  du référentiel tournant  $R'$ .

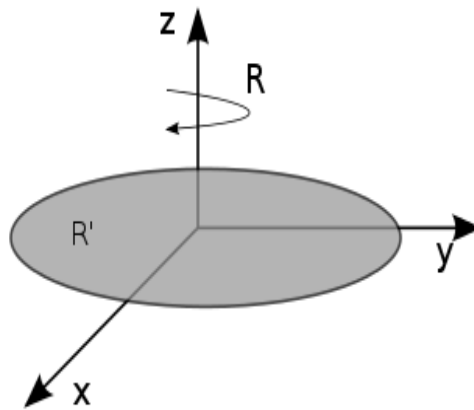


FIGURE 3.2.

Appelons  $\omega$  la vitesse de rotation angulaire, dirigée selon l'axe  $Oz$ . On a les relations suivantes entre les coordonnées des deux référentiels en rotation l'un par rapport à l'autre :

$$x = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t ; \quad y = x' \sin \omega t + y' \cos \omega t \quad (3.2)$$

L'intervalle entre deux événements qui ont lieu dans  $R'$  prend alors la forme :

$$ds^2 = [c^2 - w^2 (x'^2 + y'^2)] dt^2 - (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) + 2\omega y' dx' dt - 2\omega x' dy' dt \quad (3.3)$$

Quelle que soit la transformation du temps, l'expression (3.3) ne peut être réduite à la forme euclidienne (3.1). Cela signifie que la géométrie même du référentiel  $R'$ , vue du référentiel  $R$ , n'est pas une géométrie euclidienne. On démontre, par exemple, que le rapport entre la circonférence d'un cercle de  $R'$  et son diamètre est différente de  $\pi$  (Exercice 3.9.1).

### 3.4.2 Décalage gravitationnel

Divers effets physiques mesurables se déduisent du principe d'équivalence. C'est le cas, par exemple, de la variation de la fréquence d'un phénomène lumineux dans un champ de gravitation. De la lumière émise par une source depuis le haut d'une boîte ayant une accélération  $g$  (Fig. 3.3) sera vue décalée vers le bleu si on l'observe depuis le bas de la boîte. Un calcul de mécanique classique met en évidence ce phénomène. C'est ce que montre Richard Feynman dans son ouvrage : **Leçons sur la gravitation**.

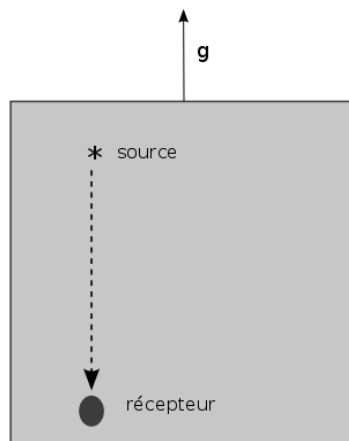


FIGURE 3.3.

Pour de faibles vitesses de la boîte, le temps nécessaire à la lumière pour parcourir la distance  $h$  qui sépare la source du récepteur vaut  $h/c$ . Pendant ce laps de temps, le bas de la boîte s'est rapproché de la source avec une vitesse qui a augmenté de  $v = gh/c$ . Le récepteur se déplace donc par rapport à l'émetteur de sorte que le décalage en fréquence  $\nu$  s'écrit :

$$\nu_{\text{mesurée}} = \nu_{\text{émise}} (1 + v/c) = \nu_{\text{émise}} (1 + gh/c^2) \quad (3.4)$$

Le signal reçu vers le bas de la boîte a une fréquence différente de la fréquence émise en haut. Selon le principe d'équivalence, une lumière émise dans un champ gravitationnel subira le même sort que dans un champ d'accélération. On observe



un décalage des longueurs d'onde entre l'émission et la réception appelé **décalage gravitationnel**. Lorsque le récepteur se rapproche de la source, on obtient un décalage vers le bleu ; par contre, lorsqu'il s'en éloigne, on a un décalage vers le rouge.

Il ne faut évidemment pas confondre ce décalage gravitationnel avec l'effet Doppler classique qui a lieu lorsque la source se déplace à vitesse constante. L'effet gravitationnel est beaucoup plus faible que l'effet classique. Il a été mesuré, avec une marge d'erreur assez importante, seulement à partir de 1925 lors de la découverte d'étoiles très denses où la gravitation est extrêmement intense. La première mesure précise n'a été obtenue en laboratoire qu'à partir de 1960.

La mesure du décalage d'origine gravitationnel des fréquence est d'une grande importance théorique car c'est un argument indéniable en faveur du principe d'équivalence.

### 3.4.3 Courbure des rayons lumineux

Les rayons lumineux qui passent au voisinage d'un astre très massif, comme le Soleil, sont déviés de leur trajectoire rectiligne qui se courbe légèrement. Or, la structure de l'espace-temps de Poincaré-Minkowski est déterminée par le cône de lumière qui est partout identique. Par contre, lors de la présence d'un champ de gravitation, le cône de lumière est plus ou moins déformé selon le lieu où la lumière se déplace. La métrique de l'espace-temps de la relativité restreinte est alors insuffisante pour prendre en compte cette variation spatiale. Il devient nécessaire de faire appel à un espace non euclidien pour décrire ce phénomène physique de courbure du trajet de la lumière qui, de même que le décalage gravitationnel, a été mesuré avec précision.

### 3.4.4 Systèmes de référence non inertiels

La formule (3.3) montre que pour des référentiels où règne un champ d'accélération, le carré de l'intervalle aura une forme plus compliquée qu'en considérant seulement des référentiels d'inertie. Dans un référentiel non inertielle, le carré de l'intervalle sera une forme quadratique générale des différentielles des coordonnées. Reprenons les notations (1.11) pour les coordonnées, à savoir :  $x_0 = ct$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ . Le carré de l'intervalle s'écrit sous sa forme la plus générale :

$$ds^2 = g_{00} dx_0^2 + g_{01} dx_0 dx_1 + g_{02} dx_0 dx_2 + \dots + g_{32} dx_3 dx_2 + g_{33} dx_3^2 \quad (3.5)$$

Les seize coefficients  $g_{\alpha\beta}$  sont des fonctions de la coordonnée temporelle et des coordonnées spatiales. Lorsqu'on utilise des systèmes de référence accélérés, les coordonnées  $x_0, x_1, x_2, x_3$  sont des coordonnées curvilignes. Les quantités  $g_{\alpha\beta}$  déterminent toutes les propriétés de la géométrie dans chaque système de coordonnées curvilignes. Elles définissent **la métrique** du système considéré. Les quantités  $g_{\alpha\beta}$  sont les **les composantes du tenseur métrique** de ce système ; étant définies en

chacun des points de l'espace-temps, ces composantes forment le **champ de composantes du tenseur métrique**.

Les quantités  $g_{\alpha\beta}$  sont symétriques selon les indices,  $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ , puisqu'elles sont déterminées par la forme symétrique (3.5) où les  $g_{\alpha\beta}$  et  $g_{\beta\alpha}$  possèdent le même facteur  $dx_\alpha dx_\beta$ . On a donc seulement 10 quantités  $g_{\alpha\beta}$  distinctes en général.

La géométrie d'un système de référence non inertiel dont la métrique est définie par (3.5) n'est pas, en général, une géométrie euclidienne. Cette dernière n'est qu'un cas particulier des géométries possibles pour la relativité.

Dans le cas de la géométrie euclidienne, tous les systèmes de coordonnées curvilignes que l'on peut imaginer donnent un tenseur fondamental  $g_{\alpha\beta}$  qui peut être ramené par un changement approprié de coordonnées, à la forme  $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ . Il n'en est plus de même pour des géométries non euclidiennes. Ainsi que nous le verrons, il n'existe qu'un seul espace euclidien, alors qu'on peut inventer une infinité d'espaces non euclidiens

## 3.5 Principe de relativité généralisé

La nécessité d'utiliser une géométrie non euclidienne pour la description de l'espace-temps va nous amener à énoncer le principe de relativité généralisé sous une forme plus exacte que celle de la partie 3.3.2.

### 3.5.1 Espace non euclidien : surface sphérique à deux dimensions

Voyons tout d'abord un exemple d'espace non euclidien. Considérons une sphère de rayon  $R$ , située dans l'espace ordinaire à trois dimensions. La localisation d'un point  $M$  sur la surface de cette sphère peut être exprimée, par exemple, en fonction des coordonnées sphériques, la longitude  $\varphi$  et la colatitute  $\theta$ . La sphère est entièrement décrite si  $0 \leq \theta < \pi$  et  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

Deux tels paramètres, permettant de déterminer précisément un point sur la surface de la sphère, sont appelés des **coordonnées de Gauss**. D'autres paramètres quelconques,  $u$  et  $v$ , peuvent évidemment être choisis comme coordonnées curvilignes sur cette surface.

Le carré  $ds^2$  de l'élément linéaire de la surface sphérique s'écrit en fonction des coordonnées de Gauss :

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \quad (3.6)$$

La distance élémentaire  $ds$  de la surface sphérique s'exprime en fonction de seulement deux paramètres. Cette surface est un espace à deux dimensions. C'est un

exemple d'**espace de Riemann** à deux dimensions.

Les propriétés géométriques des figures tracées sur une telle surface ne sont plus celles de la géométrie euclidienne. Ainsi, le plus court chemin d'un point  $A$  à un autre point  $B$ , sur la surface sphérique, est constitué d'un arc de grand cercle passant par les points  $A$  et  $B$ . Les arcs de grand cercle jouent le même rôle pour la sphère que les droites dans le plan. Ce sont les **géodésiques** de la sphère qui sont les plus courts chemins d'un point à un autre.

### 3.5.2 Coordonnées curvilignes de Gauss

L'exemple de la surface sphérique peut être étendu à une surface continue de forme quelconque. Un système de coordonnées curvilignes arbitraire peut être utilisé pour repérer chaque point d'une surface, l'essentiel étant d'utiliser des coordonnées qui varient continûment. La géométrie sur une telle surface sera, en général, non euclidienne.

Le système de coordonnées curvilignes se généralise à des espaces ayant un nombre quelconque de dimensions. Chaque point de l'espace-temps à quatre dimensions peut être ainsi repéré par quatre coordonnées. Au lieu d'employer à présent un système de référence formé par des règles rigides et des horloges, comme cela a lieu en relativité restreinte, c'est le système de coordonnées de Gauss qui va jouer le rôle de référentiel.

Le principe de relativité généralisé qui a été énoncé au cours de la partie 3.3.2 doit alors être remplacé par l'énoncé suivant :

**Tous les systèmes de coordonnées de Gauss sont en principe équivalents pour la formulation des lois générales de la nature.**

### 3.5.3 Covariance des lois de la nature

Nous avons vu, en relativité restreinte, que les lois de la physique sont covariantes. Cela signifie que les équations qui expriment les lois générales de la nature se transforment en équations de même forme par application de la transformation de Lorentz-Poincaré.

Une covariance plus complexe existe pour les équations de la relativité générale. Ces équations doivent se transformer en équations de même forme lorsqu'on opère des **substitutions quelconques** des coordonnées curvilignes de Gauss. C'est une invariance des lois de la nature vis-à-vis de certaines transformations que les mathématiciens appellent **difféomorphismes**.

Un difféomorphisme est une déformation de l'espace-temps qui déplace tous les points de manière arbitraire. Cependant, les valeurs attachées aux points (fonctions, vecteurs, tenseurs, etc) doivent être transportées en même temps qu'eux. L'espace-temps de départ est ainsi transformé en un autre espace-temps, différent du premier,

mais qui lui est difféomorphe.

Le principe de relativité généralisé consiste donc en cette covariance des équations de la relativité générale qui s'exprime comme l'indifférence de ses lois vis-à-vis des difféomorphismes.

Alors que la relativité restreinte affirme que les lois de la physique sont les mêmes dans une classe particulière de référentiels, la relativité générale pose un **principe d'indifférence** : les phénomènes ne se déroulent pas, en général, de la même façon dans des systèmes de coordonnées différents, mais aucun des systèmes de coordonnées n'a de statut privilégié par rapport aux autres.

## 3.6 La matière-énergie déforme l'espace-temps

Divers phénomènes physiques montrent que la géométrie de l'espace-temps ne peut être euclidienne. Ces phénomènes étant dus à la présence de matière et d'énergie dans l'espace-temps, il semble logique de penser que la géométrie elle-même est une description théorique déterminée par la matière-énergie.

### 3.6.1 Le contenu de l'espace pourrait déterminer sa métrique

La remise en cause de la géométrie euclidienne au cours du 19<sup>e</sup> siècle incita les mathématiciens à discuter des fondements de nos représentations de la nature. Bernhard Riemann (1826-1866) présenta un mémoire, **Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie**, dans lequel il introduisit l'idée révolutionnaire possible entre les corps matériels et l'espace :

**Or, il semble que les concepts empiriques, sur lesquels sont fondées les déterminations métriques de l'étendue, le concept du corps solide et celui du rayon lumineux, cessent de substituer dans l'infiniment petit. Il est donc très légitime de supposer que les rapports métriques de l'espace dans l'infiniment petit ne sont pas conformes aux hypothèses de la Géométrie euclidienne, et c'est ce qu'il faudrait effectivement admettre, du moment où l'on obtiendrait par là une explication plus simple des phénomènes.**

Ainsi, selon Riemann, le contenu de l'espace pourrait déterminer sa métrique. C'est également Riemann qui, dans ce même mémoire, introduisit le concept de variété différentielle à  $n$  dimensions, extension de la notion d'espace et dont nous nous servirons en relativité générale.

### 3.6.2 L'espace non euclidien de Poincaré

Dans son célèbre ouvrage, **la science et l'hypothèse**, Henri Poincaré publie ses réflexions sur les fondements des sciences. Dans sa partie consacrée à l'espace et la géométrie, il reprend l'idée de Riemann et imagine un univers dans lequel la matière

induit nécessairement une géométrie non euclidienne car les lois  $y$  sont différentes de celles auxquelles nous sommes accoutumés :

**Supposons, par exemple, un monde renfermé dans une grande sphère et soumis aux lois suivantes : la température n'y est pas uniforme ; elle est maxima au centre, et elle diminue à mesure qu'on s'en éloigne, pour se réduire au zéro absolu quand on atteint la sphère où ce monde est renfermé.**

**Je supposerai de plus que, dans ce monde, tous les corps aient même coefficient de dilatation, de telle façon que la longueur d'une règle quelconque soit proportionnelle à sa température absolue. Je supposerai enfin qu'un objet transporté d'un point à un autre, dont la température est différente, se met immédiatement en équilibre calorifique avec son nouveau milieu.**

Dans un tel monde, des êtres qui étudieraient leur univers découvrirait une géométrie non euclidienne. Un tel exemple d'un monde à température variable non euclidien est souvent repris de manière plus simple en imaginant un plan dont la surface est chauffée de manière non homogène.

### 3.6.3 Chronogéométrie de l'espace-temps

Comment exprimer mathématiquement l'idée que les propriétés géométriques de l'espace-temps sont déterminées par l'existence de la matière et de l'énergie ? Nous avons vu, par exemple, que l'expression (3.3) du  $ds^2$  d'un disque tournant s'écrit en fonction de la vitesse angulaire de rotation. Les  $g_{\alpha\beta}$  qui définissent la métrique de l'espace-temps dépendent du champ d'accélération.

De manière générale, les référentiels non inertiels sont équivalents à des champs de force. La forme  $ds^2$ , donnée par (3.5), pour des systèmes de référence non inertiels, s'exprime en fonction du champ de composantes  $g_{\alpha\beta}$  du tenseur métrique. En mécanique relativiste, ces champs de force sont déterminés par les  $g_{\alpha\beta}$ . Les caractéristiques géométriques de l'espace-temps s'identifient aux paramètres mécaniques d'un système non inertiel.

Par suite du principe d'équivalence entre les champs de gravitation et ceux d'accélération, il en résulte que tout champ gravitationnel est également déterminé par les quantités  $g_{\alpha\beta}$ . La présence d'un champ de gravitation entraîne une modification de la métrique non euclidienne de l'espace-temps.

Ainsi se trouve fermé un triangle des équivalences entre champ de composantes du tenseur métrique, champ de gravitation et champ d'accélération. Cette triple équivalence est représentée sur la figure 3.4.

**La détermination des composantes  $g_{\alpha\beta}$  du tenseur métrique va être le problème central de la relativité générale. Ce tenseur détermine en effet**

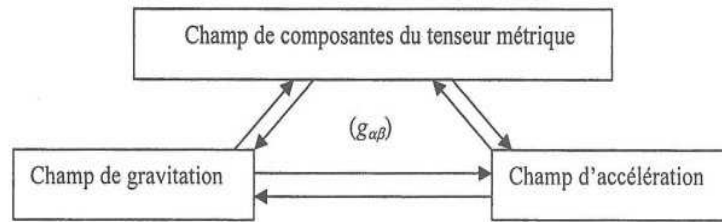


FIGURE 3.4.

toutes les propriétés géométriques de l'espace-temps.

Puisque le temps est l'une des dimensions de l'espace-temps, on parle plutôt de **chronogéométrie** de l'espace-temps.

### 3.6.4 La matière-énergie détermine la chronogéométrie de l'espace-temps

L'espace-temps n'est donc plus conçu en relativité générale comme un espace abstrait formé uniquement d'espace géométrique et de temps ainsi que c'est le cas en relativité restreinte. Ce sont les masses et l'énergie qui structurent l'espace-temps qui devient nécessairement non euclidien.

L'effet d'une masse n'est plus de créer une force gravitationnelle ainsi que cela a lieu dans la théorie de Newton. La masse modifie la chronogéométrie de l'espace-temps.

Remarquons que le changement de la métrique de l'espace-temps entraîne également le changement de la métrique proprement spatiale. À des  $g_{\alpha\beta}$  galiléens dans un espace-temps plat correspond une géométrie euclidienne de cet espace.

Par contre, dans un champ de gravitation, la géométrie de l'espace devient non euclidienne. Ceci concerne aussi bien les champs gravitationnels "réels", dans lesquels l'espace-temps est déformé, que les champs devant leur existence à un référentiel non inertiel.

Dans le cas d'un champ de gravitation variable dans le temps, non seulement la géométrie de l'espace n'est pas euclidienne mais elle varie en outre avec le temps. Autrement dit, les rapports entre les diverses distances géométriques subissent des variations dans le temps.

C'est le tenseur impulsion-énergie total  $Q^{\lambda\mu}$  qui doit être la source du champ gravitationnel. Cette hypothèse est fondée sur l'idée que la masse gravitationnelle  $m_g$  est égale, au facteur  $c^2$  près, à l'énergie totale du corps considéré, c'est-à-dire à l'intégrale sur l'espace de la densité d'énergie  $T^{00}$ . Au moins l'une des composantes du tenseur impulsion-énergie doit donc jouer le rôle de source pour le champ gravitationnel. Mais comme ce dernier est décrit par les composantes de la métrique

$g_{\lambda\mu}$ , il est naturel de supposer que la source de  $g_{\lambda\mu}$  doit aussi avoir dix composantes indépendantes, ce qui est précisément le cas du tenseur symétrique  $T^{\lambda\mu}$ .

## 3.7 L'espace-temps riemannien

Puisque l'espace-temps est non-euclidien, divers choix de structures chronogéométriques non euclidiennes sont possibles. Le cas non euclidien le plus simple est celui des espaces riemannien. Einstein a supposé que **l'espace-temps est un espace de Riemann**. Cette hypothèse s'est révélée particulièrement fructueuse.

### 3.7.1 Courbure de l'espace-temps

Tout espace riemannien est caractérisé par une certaine **courbure**. Nous avons vu, par exemple, que la surface à deux dimensions d'une sphère de rayon  $R$  est un espace de Riemann. La courbure  $C$  de cette surface sphérique est définie comme étant l'inverse du carré du rayon de la sphère, soit  $C = 1/R^2$ . Dans ce cas, la notion de courbure se rattache à celle d'une surface courbe située dans un espace extérieur plus vaste.

Cependant, même si une sphère est bien "courbée" au sens que requiert la théorie d'Einstein, la notion de courbure, qui existe dans l'espace-temps riemannien, n'est pas une courbure de ce type. C'est plutôt une **déformation interne** de l'espace-temps qui n'a pas besoin de dimensions extérieures pour exister.

Reprenons l'exemple du disque plan en rotation dont la métrique est donnée par la formule (3.3). La géométrie naturelle édifée par un observateur lié au disque à l'aide des étalons de son propre système n'est pas une géométrie euclidienne. L'espace-temps lié au disque a une certaine courbure qui dépend du champ d'accélération qui règne à la surface de ce disque. Celui-ci reste cependant parfaitement plan, la courbure n'étant qu'une certaine caractéristique physique de l'espace-temps.

La courbure est définie par un **tenseur de courbure** de l'espace-temps riemannien appelé **tenseur de Riemann-Christoffel**. Ce dernier ne dépend que des dérivées des composantes du tenseur métrique de l'espace-temps riemannien. L'espace-temps plat de la relativité restreinte ne possède pas de courbure.

Par suite du principe d'équivalence entre champ d'accélération et de gravitation, la courbure de l'espace-temps résulte également de la présence de matière-énergie. Le statut de la courbure de l'espace-temps se rapproche d'ailleurs de celui de la matière. Comme cette dernière, la courbure est localisée, faible en un endroit, plus intense ailleurs. La distinction entre géométrie et matière-énergie s'ammenuise par suite de l'existence de la courbure qui caractérise les espaces de Riemann. La gravitation est totalement absorbée dans la chronogéométrie.

### 3.7.2 Principe des géodésiques

Dans la partie 3.3.1, nous avons vu qu'Einstein critique le principe de la cinématique en relativité restreinte, selon lequel les masses libres effectuent des mouvements rectilignes et uniformes seulement dans des référentiels qui sont aux-mêmes, les uns par rapport aux autres, en mouvement de translation uniforme.

Les déplacements rectilignes et uniformes sont des lignes droites qui forment le plus court chemin d'un point à un autre, ou **géodésiques**, dans l'espace-temps de la relativité restreinte.

En relativité générale, Einstein va postuler que dans un espace riemannien, les masses et le rayonnement électromagnétique, lorsqu'ils ne sont soumis qu'à la seule gravitation, effectuent des mouvements en suivant nécessairement les géodésiques de l'espace-temps riemannien. C'est le **principe des géodésiques**.

Ce dernier postulat s'inspire de celui d'équivalence entre accélération et gravitation. Après avoir fait remarquer qu'un déplacement rectiligne dans un référentiel d'inertie devient un déplacement curviligne dans un système de référence accéléré, Einstein fait la remarque suivante :

**Mais on obtient un résultat nouveau d'une importance fondamentale quand on applique une considération analogue à un rayon de lumière. Par rapport au corps de référence galiléen  $K$ , ce rayon se propage en ligne droite avec la vitesse  $c$ . Mais par rapport à la boîte accélérée (corps de référence  $K'$ ), la trajectoire du même rayon de lumière, comme il est facile de le montrer, n'est plus une ligne droite. D'où il faut conclure que dans les champs de gravitation les rayons lumineux se propagent généralement en décrivant des trajectoires curvilignes.**

Cette prévision faite par Einstein, déduite du postulat d'équivalence, ne fut vérifiée que quelques années plus tard. Le calcul que fit Einstein, à partir des équations de la relativité générale, de la déviation d'un rayon lumineux passant au voisinage du Soleil fut en effet confirmé lors de l'éclipse du 29 mai 1919.

Ainsi que nous le verrons par la suite, on démontre que les déplacements d'un point mobile dont l'accélération est nulle suivent effectivement les géodésiques des espaces de Riemann. Un point qui se déplace suivant une géodésique est donc "libre" bien qu'il soit soumis à la gravitation sans aucune interaction. Cela montre bien que la gravitation est totalement absorbée par la chronogéométrie. Tout mouvement inertiel dans l'espace-temps de la relativité générale se ramène à déterminer les géodésiques correspondant à un système physique donné. Il n'est nul besoin de tenir compte en plus de la gravitation qui est déjà prise en compte dans la structure chronogéométrique de l'espace-temps.

Le déplacement de la Terre autour du Soleil, par exemple, est un mouvement



inertiel car notre planète n'est soumise qu'à la seule gravitation. Si l'on calcule la trajectoire de la Terre en utilisant l'équation des géodésiques de la relativité générale, compte tenu de la présence du Soleil et d'autres planètes, on obtient une orbite elliptique parcourue selon les lois de Kepler.

### 3.8 Les équations d'Einstein

Les principes énoncés précédemment conduisent à l'idée qu'il faut trouver des équations, appelées **équations d'Einstein**, pour déterminer précisément l'espace de Riemann qui correspond à une répartition donnée des masses et de l'énergie. En d'autres termes, ces équations doivent permettre de calculer les composantes  $g_{\alpha\beta}$  du tenseur métrique puisque toute la description de l'espace-temps se ramène à la détermination d'une chronogéométrie relative à chaque système physique particulier. Ceci détermine du même coup le champ de gravitation du système considéré.

Comment Einstein a-t-il découvert les équations fondamentales de la relativité générale? Tout simplement en les devinant. Toute théorie nouvelle est en effet une devinette pour l'intelligence humaine. Il faut évidemment de grandes connaissances et un esprit suffisamment inventif pour résoudre une devinette difficile. Tous les principes physiques et les propriétés connues des espaces de Riemann ne précisent pas le lien mathématique qui existe entre les postulats et le monde physique. Richard Feynman (1918-1988), prix Nobel de physique 1965 pour ses travaux sur l'électrodynamique quantique, nous le dit dans ses **Leçons sur la gravitation** :

**Ce que fit Einstein fut tout bonnement de deviner ce lien. Il est impossible de le déduire de principes plus fondamentaux.**

Les équations d'Einstein constituent donc un postulat supplémentaire, largement indépendant du principe d'équivalence. Outre la validation des principes énoncés précédemment, les règles du jeu qui permettent d'obtenir ces équations sont assez vagues.

D'une part, on sait que l'espace-temps euclidien peut exister dans la nature à grande distance de toute matière exerçant une attraction gravitationnelle. Les équations cherchées doivent donc conduire à une gravitation nulle, donc une courbure nulle, lorsque les coordonnées tendent vers l'infini.

D'autre part, il faut que les équations chronogéométriques permettent de retrouver la gravitation newtonienne en présence de champs peu intenses.

De plus, le champ de gravitation et la matière doivent ensemble satisfaire à la loi de conservation de l'impulsion-énergie.

Les grands principes de base ainsi que les conditions précédentes, si vagues en apparence, sont suffisantes pour déterminer d'une manière presque univoque les équations

tions cherchées.

Les équations d'Einstein s'appliquent à tous les problèmes dans lesquels intervient la gravitation ; chute des corps, orbites des planètes et des satellites naturels ou artificiels, mouvement des étoiles dans une galaxie, des galaxies dans un amas, etc. Ces équations permettent d'envisager une cosmologie non pas fondée sur des hypothèses hasardeuses mais comme une étude de l'espace-temps dans l'ensemble de l'Univers.

Il est remarquable que la théorie des champs de gravitation édiflée sur la base de la théorie de la relativité générale ait été construite par Einstein par voie purement déductive. C'est seulement par la suite qu'elle a été confirmée par des test tirés d'observations astronomiques.

## 3.9 Exercices

### 3.9.1 Géométrie à bord d'un disque tournant

La relativité restreinte ne s'applique pas, en principe, au disque tournant, puisqu'il ne constitue pas un système d'inertie. On peut cependant étendre cette théorie en considérant un disque tournant  $S$  où les instruments de mesure sont affectés par la force centrifuge. Cependant, les valeurs des étalons de longueur et de temps par rapport à  $S$  seront définies en supposant que toutes les corrections que nécessitent les forces propres aux systèmes accélérés ont été effectuées. Cela revient à postuler qu'après correction des effets propres aux accélérations, les règles liées au disque tournant sont uniquement soumises à une contraction de Lorentz.

Soit  $S_0$  un système galiléen par rapport auquel le disque  $S$  est animé d'une vitesse de rotation  $\omega$ . Choisissons un système de coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . La distance entre deux points infiniment voisins  $(r, \theta)$  et  $(r + dr, \theta + d\theta)$  du système  $S$ , mesuré à l'aide de l'étalon de longueur du système  $S_0$  est toujours :

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (3.7)$$

pour un observateur de  $S_0$ .

Pour un tel observateur, l'étalon de longueur  $dl$  de  $S$  placé dans une direction radiale quelconque aura une longueur unité puisqu'il n'est pas animé d'une quelconque vitesse de translation dans le sens de sa longueur. Par contre, si cet étalon de longueur est dirigé selon une perpendiculaire au rayon du disque, en un point situé à une distance  $r$  du centre de rotation, cet étalon possède une vitesse dans le sens de sa longueur :  $v = r\omega$  et subit une contraction de longueur.

1. Déterminer, pour un observateur de  $S_0$ , l'expression de la distance entre les deux points  $(r, \theta)$  et  $(r + dr, \theta + d\theta)$ , mesurée avec les étalons de longueur liés au système accéléré  $S$ .

2. Comparer la circonférence d'un cercle de rayon  $r$  mesurée dans  $S_0$  avec celle du même cercle mesurée dans  $S$ .
3. Faire de même pour la surface de ce cercle. Que peut-on en déduire quant à la géométrie naturelle du disque ?
4. Déterminer les composantes du tenseur métrique du disque tournant  $S$ .
5. Calculer les symboles de Christoffel de deuxième espèce de cette métrique.
6. Calculer les équations des géodésiques du disque tournant.

### 3.9.2 Correction

1. Lorsqu'il est placé perpendiculairement au rayon du disque, l'étalon de longueur  $dl$  de  $S$  subit une contraction qui pour  $S_0$ , ramène sa longueur au repos  $dl_0$  à la valeur :

$$dl_0 = dl \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} \quad (3.8)$$

Pour un observateur de  $S_0$ , la distance entre deux points  $(r, \theta)$  et  $(r + dr, \theta + d\theta)$  mesurée avec les étalons de longueur liés au système accéléré  $S$ , devient :

$$d\sigma^2 = dr^2 + \frac{r^2 d\theta^2}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} \quad (3.9)$$

2. Mesurée avec les étalons de  $S_0$ , une circonférence de rayon  $r$  a la longueur :

$$s_0 = r \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r \quad (3.10)$$

Lorsque les mesures sont effectuées à l'aide des étalons liés au disque tournant, on obtient la longueur de la circonférence en effectuant la sommation sur les  $d\sigma$  donnés par (3.9) avec  $r = \text{constante}$  :

$$s = \int \frac{r d\theta}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} = \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{s_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} \quad (3.11)$$

La longueur de la circonférence d'un cercle dans  $S$  est telle que  $s > s_0$ .

3. La superficie du cercle de rayon  $r$  est donnée par :

$$S_T = \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{r d\theta}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} dr = \frac{2\pi c^2}{\omega^2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} \right) \quad (3.12)$$

La superficie  $S_T$  d'un cercle de rayon  $r$  du disque tournant est supérieure à celle mesurée par un observateur de  $S_0$ .

Ces mesures sont réalisées avec des étalons liés au disque tournant. Or ces étalons sont des étalons naturels que choisirait un observateur de S, la géométrie édifée à l'aide de son propre système de mesure n'est pas une géométrie euclidienne.

4. La géométrie de S a pour élément linéaire :

$$d\sigma^2 = g_{ij} dy^i dy^j ; \quad i, j = 1, 2 \quad (3.13)$$

Numérotons les coordonnées :  $r = y^1, \theta = y^2$ . La métrique (3.13) nous donne :

$$g_{11} = 1 ; \quad g_{22} = \frac{r^2}{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}} ; \quad g_{12} = g_{21} = 0 \quad (3.14)$$

5. Les symboles de Christoffel se calculent en utilisant la formule suivante :

$$\Gamma_k^j{}_i = \frac{1}{2} g^{jl} (\partial_k g_{il} + \partial_i g_{lk} - \partial_l g_{ki}) \quad (3.15)$$

Dans le cas présent, les indices  $i, j, k, l$ , prennent les valeurs 1 et 2. Il faut d'abord calculer les composantes contravariantes du tenseur métrique. On note  $g$  le déterminant de la matrice des composantes du tenseur métrique. On a :

$$g = \frac{r^2}{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}} \quad (3.16)$$

Les composantes covariantes du tenseur métrique ont pour valeurs d'après :

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_{ij} \quad (3.17)$$

Puisque la matrice  $[g_{ij}]$  est diagonale, on en déduit :

$$g^{11} = \frac{1}{g} g_{11} = 1 ; \quad g^{22} = \frac{1}{g} g_{22} = \frac{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}}{r^2} ; \quad g^{12} = g^{21} = 0 \quad (3.18)$$

Par conséquent, les valeurs non nulles des symboles de Christoffel de deuxième espèce sont les suivantes :

$$\Gamma_2^1{}_2 = -\frac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{22} = -\frac{r}{\left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}\right)^2} ; \quad \Gamma_1^2{}_2 = \Gamma_2^2{}_1 = \frac{1}{2} g^{22} \partial_1 g_{22} = \frac{1}{r \left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}\right)} \quad (3.19)$$

6. Les géodésiques du système S représentent les plus courts chemins d'un point à un autre. Elles sont données par l'équation suivante :

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma_k^i{}_j \frac{du^k}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0 ; \quad i, j, k = 1, 2 \quad (3.20)$$

Pour  $i = 1$ , on obtient selon les formules (3.19) et (3.20) :

$$\frac{d^2 r}{ds^2} - \frac{r}{\left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}\right)^2} \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 0 \quad (3.21)$$

Pour  $i = 2$ , on a :

$$\frac{d^2 \theta}{ds^2} + \frac{2}{r \left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}\right)} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} = 0 \quad (3.22)$$

L'équation (3.22) s'écrit :

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{r^2}{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}} \frac{d\theta}{ds} \right) = 0 \quad (3.23)$$

Cette dernière équation s'intègre sous la forme :

$$\frac{r^2}{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}} \frac{d\theta}{ds} = K \quad (3.24)$$

L'équation (3.9) peut être mise sous la forme suivante dans laquelle on reporte l'expression (3.24); il vient en prenant  $d\sigma = ds$  :

$$\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 = 1 - \frac{r^2}{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}} \left(\frac{d\theta}{d\sigma}\right)^2 = 1 - \frac{K^2}{r^2} \left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}\right) \quad (3.25)$$

d'où :

$$\frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{d\sigma} = \frac{dr}{d\theta} \frac{K}{r^2} \left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}\right) = \pm \sqrt{1 - \frac{K^2}{r^2} \left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}\right)} \quad (3.26)$$

Lorsque  $K = 0$ , on a :

$$\frac{dr}{d\sigma} = 1 ; \quad \frac{d\theta}{d\sigma} = 0 \quad (3.27)$$

Les courbes  $\theta = \text{cste}$ , c'est-à-dire les rayons du disque, sont les géodésiques de S. Lorsque K est différent de zéro, l'équation différentielle des géodésiques s'écrira :

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm \frac{1}{K} \frac{r^2}{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}} \sqrt{1 + \frac{K^2 \omega^2}{c^2} - \frac{K^2}{r^2}} \quad (3.28)$$

L'intégration de cette équation différentielle s'obtient en effectuant un changement de variable :

$$\rho = \frac{r}{K} \sqrt{1 + \frac{K^2 \omega^2}{c^2}} \quad (3.29)$$

En choisissant l'origine afin que  $\theta_0 = 0$ , on obtient pour solution de (3.28) :

$$\theta = \pm \arccos \frac{a}{\rho} \pm \frac{a\omega^2}{c^2} \sqrt{r^2 - a^2} \quad (3.30)$$

avec :

$$a = \frac{K}{\sqrt{1 + \frac{K^2 \omega^2}{c^2}}} \quad (3.31)$$

Les géodésiques sont des courbes définies par (3.30) lorsque  $K$  est différent de zéro. En particulier, on peut former un triangle curviligne à partir de trois géodésiques et montrer que la somme des angles d'un tel triangle est comprise entre zéro et  $\pi$ .

### 3.9.3 Décalage spectral gravitationnel

Nous avons vu que la mécanique classique permet, selon Richard Feynman, d'interpréter le décalage gravitationnel d'un phénomène lumineux. En considérant la lumière sous l'aspect quantique, nous allons voir qu'on retrouve le même phénomène de décalage vers le rouge ou le bleu.

1. Un photon est émis à l'altitude  $z_0$  avec une fréquence  $\nu_0$  dans le champ gravitationnel d'une étoile. En utilisant l'équivalence relativiste entre masse et énergie, déterminer la "masse" du photon émis.
2. Le photon atteint l'altitude  $z_1 > z_0$ . Soit  $M$  la masse de l'étoile,  $R$  son rayon,  $G$  sa constante de gravitation. Calculer l'énergie du photon à l'altitude  $z_1$  où le photon est observé.
3. Déterminer la fréquence  $\nu$  du photon à l'altitude  $z_1$  en supposant que la variation d'altitude est très faible devant  $R$ .
4. En déduire la variation de fréquence  $\Delta\nu$ . Déterminer le **décalage spectral** défini par  $Z = \Delta\nu/\nu$ .

### 3.9.4 Correction

1. L'énergie quantique d'un photon de fréquence  $\nu_0$  est :  $E_0 = h\nu_0$ . D'autre part, l'équivalence entre la masse et l'énergie d'une particule est donnée par :  $E_0 = mc^2$ . On obtient ainsi la "masse" du photon :

$$m = \frac{h\nu_0}{c^2} \quad (3.32)$$

Bien entendu, le photon n'a pas de masse mais on peut considérer que l'influence de la gravitation sur le photon a la même conséquence que s'il possédait une certaine "masse" donnée par (3.32).

2. Pour atteindre l'altitude  $z_1$ , le photon doit dépenser contre la gravitation une certaine énergie  $\Delta E$ . Notons  $\Delta U$  la variation du potentiel de gravitation entre les points d'émission et le point d'observation du photon ; on a :

$$\Delta E = m \Delta U \quad (3.33)$$

Déterminons la variation  $\Delta U$  de potentiel gravitationnel en fonction des paramètres de l'étoile :

$$\Delta U = \frac{GM}{R + z_0} - \frac{GM}{R + z_1} \quad (3.34)$$

L'énergie du photon à l'altitude  $z_1$  est donnée par :

$$E = E_0 - m\Delta U = E_0 - m \left( \frac{GM}{R + z_0} - \frac{GM}{R + z_1} \right) \quad (3.35)$$

3. Pour de faibles variations d'altitude, le potentiel gravitationnel varie de :

$$\Delta U = \frac{GM}{R + z_0} - \frac{GM}{R + z_1} = -\frac{GM}{R^2} (z_1 - z_0) \quad (3.36)$$

La fréquence  $\nu$  du photon à l'altitude  $z_1$  est telle que :  $E = h\nu$ . Les relations (3.35) et (3.36) nous donnent :

$$\nu = \nu_0 \left( 1 - \frac{m|\Delta U|}{h} \right) = \nu_0 \left( 1 - \frac{mGM}{R^2 h} (z_1 - z_0) \right) \quad (3.37)$$

4. La variation de fréquence a pour expression :

$$\Delta\nu = \nu_0 - \nu = \frac{mGM}{R^2 h} (z_1 - z_0) \quad (3.38)$$

La fréquence d'émission est supérieure à celle d'observation ; la longueur d'onde est donc inférieure ; on observe un décalage du spectre vers le rouge. Le **décalage spectral**  $Z$  est défini par :  $Z = \Delta\nu/\nu$ . Avec  $E = m c^2$ , on obtient :

$$Z = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{GM}{R^2 c^2} (z_1 - z_0) \quad (3.39)$$

# Chapitre 4

## Espace-temps de la Relativité Générale

L'espace-temps de Poincaré-Minkowski qui constitue le cadre chronogéométrique de la relativité restreinte va être "déformé" par la présence de matière-énergie. Un espace-temps riemannien à quatre dimensions permet alors de décrire le nouveau cadre chronogéométrique qui résulte des principes fondamentaux sur lesquels est bâtie la relativité générale.

### 4.1 Espace-temps à courbure riemannienne

Le cadre chronogéométrique de la relativité générale postulé par Einstein est un espace de Riemann à quatre dimensions dont les grandeurs physiques sont décrites par des tenseurs. Les conventions déjà utilisées pour les notations indicielles des tenseurs de la relativité restreinte sont toujours les mêmes : les indices grecs varient de 0 à 3 et les indices latins de 1 à 3.

#### 4.1.1 La variété espace-temps $V_4$

L'élément primitif de la relativité générale est constitué par une **variété espace-temps**  $V_4$  à quatre dimensions sur laquelle est définie une métrique riemannienne  $ds^2$ . L'expression locale de cette métrique dans un système de coordonnées  $x^\mu$  est :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^\mu) dx^\alpha dx^\beta \quad (4.1)$$

Les coefficients  $g_{\alpha\beta}$  sont les composantes du tenseur métrique ; ce sont des fonctions des coordonnées  $x^\mu$ . Les  $g_{\alpha\beta}$  sont appelés les **potentiels de gravitation** puisque tout champ de gravitation n'est pas autre chose qu'une modification de l'espace-temps et qu'il est donc déterminé par les coefficients  $g_{\alpha\beta}$ . Par suite des symétries :  $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ , les potentiels de gravitation sont au nombre de dix.

L'expression  $ds$  définie par (4.1) est dite **intervalle élémentaire** dans la variété  $V_4$ . En particulier, l'équation  $ds^2 = 0$  définit, en chaque point de la variété, un **hypercône élémentaire**, lieu des directions spatio-temporelles dans lesquelles se



propage la lumière à partir de ce point.

**Le problème fondamental de la relativité générale consiste à déterminer les potentiels de gravitation correspondant aux différents systèmes physiques considérés.**

### 4.1.2 Métrique spatiale non euclidienne

La métrique riemannienne de l'espace-temps entraîne le changement de la métrique proprement spatiale. Dans un champ de gravitation, la géométrie de l'espace devient non euclidienne. Ceci concerne aussi bien les champs gravitationnels dus à la matière-énergie pour lesquels l'espace-temps a une certaine courbure que les champs qui doivent leur existence à des référentiels non inertiels conservant l'espace-temps plat.

Dans le cas d'un champ de gravitation variable, non seulement la métrique de l'espace n'est pas euclidienne, mais elle varie avec le temps. Cela signifie que les rapports entre les diverses distances géométriques sont variables.

Par conséquent, l'immobilité relative d'un ensemble de corps est généralement impossible en relativité générale. La notion même de système de référence en relativité générale va donc essentiellement changer par rapport au sens qu'il avait en relativité restreinte. Dans cette dernière, un référentiel inertiel est considéré comme formé par un ensemble de corps au repos les uns par rapport aux autres. Dans un champ gravitationnel variable, il n'existe pas de tels ensembles de corps. C'est donc un système de coordonnées de Gauss qui joue le rôle d'un référentiel de l'espace-temps riemannien.

### 4.1.3 Temps propre

Notons  $x^0$  la coordonnée temporelle et  $x^1, x^2, x^3$  les coordonnées spatiales d'un système de référence arbitraire. Comment peut-on déterminer le temps propre, noté  $\tau$  en un point donné de l'espace en fonction de la coordonnée temporelle  $x^0$ ? À cet effet, considérons deux événements infiniment voisins qui ont lieu en un seul et même point de l'espace. Dans ce cas, l'intervalle élémentaire  $ds$  entre ces deux événements est égal à  $c d\tau$ , où  $d\tau$  est la durée de temps propre entre les deux événements. Puisque, par hypothèse :  $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ , l'expression de la métrique (4.1) se réduit à :

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{00} (dx^0)^2 \quad (4.2)$$

Le laps de temps propre entre deux événements infiniment voisins est donc :

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0 \quad (4.3)$$

La relation précédente permet d'obtenir la durée propre entre deux événements quelconques qui ont lieu en un seul et même point de l'espace :

$$\tau = \frac{1}{c} \int \sqrt{g_{00}} dx^0 \quad (4.4)$$

Remarquons la différence qui existe entre la coordonnée  $x^0$  qui ne sert qu'au **repérage** des points de l'espace-temps et la **mesure** du temps propre en un point.

#### 4.1.4 Élément de distance spatiale

Déterminons l'expression de l'élément de distance spatiale  $dl$  de l'espace-temps riemannien. En relativité restreinte, l'élément infinitésimal  $dl$  est défini comme étant la distance spatiale entre deux évènements ayant lieu au même instant. En relativité générale, on ne peut déterminer  $dl$  en écrivant simplement  $dx^0 = 0$  dans l'intervalle élémentaire  $ds$ . Cela tient au fait que le temps propre en différents points de l'espace est diversement lié à la coordonnée temporelle  $x^0$ .

Afin de calculer  $dl$ , considérons un signal lumineux émis d'un point  $P_1$  de l'espace de coordonnées  $x^\alpha + dx^\alpha$ , et se dirigeant vers le point infiniment voisin  $P_2$  de coordonnées  $x^\alpha$ . Supposons que ce signal soit réfléchi instantanément au point  $P_2$ , en sens inverse. Le temps nécessaire, mesuré du point d'émission  $P_1$ , est égal au double de la distance entre les deux points divisé par la vitesse  $c$ .

L'intervalle élémentaire  $ds$  du parcours du signal lumineux entre les deux points est nul. Écrivons le  $ds^2$  de ce parcours en mettant en évidence la coordonnée temporelle et les coordonnées spatiales ; on a :

$$ds^2 = g_{00} dx^0 dx^0 + 2 g_{0i} dx^0 dx^i + g_{ik} dx^i dx^k = 0 \quad (4.5)$$

La sommation sur les lettres latines s'effectue de 1 à 3. La résolution de l'équation du second degré (4.5) relativement à  $dx^0$  donne deux racines :

$$dx_{(1)}^0 = -\frac{1}{g_{00}} \left( g_{0i} dx^i - \sqrt{(g_{0i} g_{0k} - g_{ik} g_{00}) dx^i dx^k} \right) \quad (4.6)$$

$$dx_{(2)}^0 = -\frac{1}{g_{00}} \left( g_{0i} dx^i + \sqrt{(g_{0i} g_{0k} - g_{ik} g_{00}) dx^i dx^k} \right) \quad (4.7)$$

Ces deux racines correspondent respectivement à la propagation du signal lumineux dans une direction puis dans l'autre entre les deux points  $P_1$  et  $P_2$ . Soit  $x^0$  l'instant d'arrivée du signal au point  $P_2$ , alors les instants de son départ de  $P_1$  et de son retour en  $P_1$  sont respectivement  $x^0 + dx_{(2)}^0$  et  $x^0 + dx_{(1)}^0$ . Le laps de temps total entre l'émission et le retour du signal au même point  $P_1$  est alors donné par :

$$dx_{(1)}^0 - dx_{(2)}^0 = \frac{2}{g_{00}} \sqrt{(g_{0i} g_{0k} - g_{ik} g_{00}) dx^i dx^k} \quad (4.8)$$

On obtient la durée entre l'émission et l'arrivée du signal au même point exprimée en fonction de la coordonnée de repérage temporelle  $x^0$  dans l'espace-temps. Pour obtenir le laps de temps propre entre les deux évènements, il faut, selon (4.3),

multiplier (4.8) par  $(1/c)\sqrt{g_{00}}$ . De plus, la distance  $dl$  séparant les deux points est obtenue en multipliant ce laps de temps propre par  $c/2$ . On obtient finalement :

$$dl^2 = \left( \frac{g_{0i} g_{0k}}{g_{00}} - g_{ik} \right) dx^i dx^k \quad (4.9)$$

Les quantités entre parenthèses dans l'expression (4.9) sont les composantes du tenseur métrique tridimensionnel qui détermine les propriétés géométriques de l'espace. Les composantes  $g_{ik}$  dépendent, en général, de la coordonnée  $x^0$ , de sorte que la métrique spatiale varie avec le temps. La notion de distance entre deux corps n'est généralement valable que localement, l'intégration de  $dl$  sur une courbe spatiale n'ayant un sens que lorsque les  $g_{ik}$  sont indépendants du temps.

## 4.2 Principe d'équivalence

Voyons comment le principe d'équivalence entre champ de gravitation et champ d'accélération peut s'appliquer dans l'espace-temps riemannien. Dans ce but, nous allons voir que, en chaque point d'un espace de Riemann, on peut définir un **espace euclidien tangent** ou, en d'autres termes, qu'on peut douer l'espace riemannien d'une métrique euclidienne en chacun de ses points. C'est la généralisation d'un plan tangent en chaque point d'une surface sphérique.

### 4.2.1 Métrique euclidienne tangente

L'espace-temps riemannien  $V_4$  est muni de la métrique (4.1), à savoir :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (4.10)$$

Soit  $M_0$  un point de  $V_4$  de coordonnées  $(x^\alpha)_0$ . On appelle **métrique euclidienne tangente** au point  $M_0$  à la métrique (4.10), la métrique définie par un élément linéaire euclidien :

$$ds^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (4.11)$$

construit avec les mêmes coordonnées  $x^\alpha$  et tel que pour  $(x^\alpha)_0$ , on ait :

$$(\gamma_{\alpha\beta})_0 = (g_{\alpha\beta})_0 \quad (4.12)$$

La manière la plus simple de trouver une métrique euclidienne répondant à cette définition est de choisir des coefficients de l'élément linéaire (4.11) constants, à savoir :  $\gamma_{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta})_0$ . Dans ce cas, on est certain que la métrique est euclidienne ; en choisissant un changement convenable des coordonnées, on obtient une métrique où les coefficients de l'élément linéaire sont tous égaux à  $\delta_{ik}$ .

Pour que la notion de métrique tangente soit indépendante du système de coordonnées, on est amené à faire une convention supplémentaire sur les coefficients  $g_{\alpha\beta}$  de la métrique d'un espace de Riemann.

À cet effet, considérons un changement de système de coordonnées, en faisant passer des  $x^\alpha$  à de nouvelles coordonnées  $x^{\alpha'}$ . Les composantes du tenseur métrique de l'espace euclidien tangent sont égaux à  $\gamma_{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta})_0$  dans le système  $x^\alpha$  et à  $\gamma_{\alpha'\beta'} = (g_{\alpha'\beta'})_0$  dans le système  $x^{\alpha'}$ . Les formules générales de transformation des composantes covariantes d'un tenseur lors d'un changement de coordonnées nous donnent les relations :

$$\gamma_{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta})_0 = (\partial_\alpha x^{\mu'})_0 (\partial_\beta x^{\nu'})_0 (g_{\mu'\nu'})_0 \quad (4.13)$$

Pour que la notion de métrique tangente euclidienne soit indépendante du système de coordonnées utilisées, il faut et il suffit que les relations (4.13) soient vérifiées. On est donc amené à faire la convention suivante : dans tout changement de coordonnées, les coefficients  $g_{\alpha\beta}$  de la métrique d'un espace de Riemann se transforment selon la loi :

$$\gamma_{\alpha\beta} = \partial_\alpha x^{\mu'} \partial_\beta x^{\nu'} g_{\mu'\nu'} \quad (4.14)$$

Avec une telle convention, la notion de métrique tangente euclidienne acquiert un caractère intrinsèque, indépendant du système de coordonnées.

### 4.2.2 Système inertiel local

La métrique tangente euclidienne en un point  $M_0$  définit un espace euclidien qu'on appelle **l'espace euclidien tangent** en  $M_0$  à l'espace de Riemann considéré. En fait, il existe une infinité de métriques euclidiennes tangentes en un point donné et par conséquent une infinité d'espaces euclidiens tangents en  $M_0$ . Cependant, comme on utilisera seulement par la suite uniquement les propriétés communes à tous les espaces euclidiens, on peut parler sans inconvénient de l'espace euclidien tangent en un point.

L'existence d'un tel espace euclidien tangent permet de le choisir en tant que système de référence localement inertiel. En conséquence, ce système de référence exclut tout champ de gravitation dans le volume infiniment petit de l'espace-temps donné. La possibilité d'un tel choix de référentiel est précisément l'expression du principe d'équivalence de la relativité générale.

En effet, selon ce principe, tout champ de gravitation homogène et uniforme peut être annulé à l'aide d'un choix judicieux de coordonnées. D'autre part, dans le cas d'un champ de gravitation ni homogène ni uniforme, il existe toujours une échelle de temps et de distance telles qu'il peut être approximativement considéré comme homogène et uniforme. Il est alors possible d'annuler très localement dans le temps et l'espace les effets de gravitation.

Dans un système de référence localement inertiel, les lois de la physique sont les lois relativistes dans l'espace-temps  $E_4$  de Poincaré-Minkowski. Pour déterminer ces lois dans l'espace-temps  $V_4$  de la relativité générale, il sera très souvent possible de le faire en partant des lois de la relativité restreinte. Pour cela, les indices relatifs aux

coordonnées rectilignes de l'espace-temps  $E_4$  sont conservés mais ces coordonnées peuvent être remplacées dans  $V_4$  par n'importe quel autre système. D'autre part, les dérivées classiques  $\partial_\alpha$  seront remplacées par des dérivées covariantes  $\nabla_\alpha$ . C'est ce que nous avons déjà vu, par exemple, pour l'équation de conservation de l'électricité (2.43) écrite en coordonnées rectilignes réduites :  $\partial_\alpha J^\alpha = 0$ , et qui se transforme en  $\nabla_\alpha J^\alpha = 0$  en coordonnées curvilignes quelconques.

### 4.3 Principe des géodésiques

Le principe des géodésiques postulé par Einstein s'accorde parfaitement avec la description de l'espace-temps par un espace de Riemann. Nous avons vu qu'en relativité générale, il n'y a plus de force de gravitation puisque c'est la courbure de l'espace-temps qui en tient lieu. Une particule matérielle qui serait soumise uniquement à une force de gravitation doit donc être considérée comme "libre" en relativité générale. En conséquence, on ne peut pas distinguer son mouvement de celui d'une particule effectuant un mouvement purement inertiel.

La droite décrite par une particule libre de la mécanique classique a été généralisée par Einstein en supposant que sous la seule action de l'inertie et de la gravitation, toute particule décrit une géodésique de l'espace-temps riemannien.

#### 4.3.1 Système différentiel des géodésiques

L'étude du mouvement d'un corps de masse importante dans un champ de gravitation est difficile puisque ce corps crée lui-même son propre champ. Par contre, une particule matérielle suffisamment petite plongée dans un champ extérieur est sans influence sur le champ de gravitation créée par d'autres masses beaucoup plus importante ainsi que sur leur mouvement propre.

L'utilisation d'une particule de masse très faible dans un champ de gravitation simplifie donc beaucoup l'étude des lois du mouvement. Une telle particule se trouve plongée dans un champ extérieur à elle-même qu'elle ne modifie pas. Dans ce cas, Einstein a supposé que sa trajectoire est une géodésique de l'espace-temps riemannien.

Ce n'est seulement que onze ans après avoir énoncé son hypothèse des géodésiques, en 1927, qu'Einstein et Grommer ont réussi à démontrer qu'une particule qui se déplace dans un champ extérieur, devrait décrire une géodésique de ce champ, au premier ordre. Les trajectoires des particules dans un champ extérieur de gravitation sont donc décrites par le système différentiel suivant :

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\chi \beta}^{\alpha} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\chi}{ds} = 0 \quad (4.15)$$

Les symboles de Christoffel qui figurent dans ces équations doivent être déterminés en fonction des coefficients  $g_{\alpha\beta}$  de la métrique (4.1) de l'espace-temps considéré.

### 4.3.2 Approximation newtonienne

Dans le cas de faibles vitesses des particules dans un champ de gravitation, les équations relativistes du mouvement doivent se réduire aux équations correspondantes non relativistes. Si les vitesses sont faibles, cela signifie que le champ de gravitation lui-même est faible sinon les particules acquerraient de grandes vitesses. Cette circonstance permet de déterminer les composantes  $g_{00}$  du tenseur métrique dans ce cas limite.

En mécanique non relativiste, le mouvement d'une particule dans un champ de gravitation est déterminé par la fonction de Lagrange, ou lagrangien, qui s'écrit dans un référentiel d'inertie :

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - m\Phi \quad (4.16)$$

La fonction  $\Phi$  est une fonction des coordonnées et du temps caractérisant le champ et est appelée **le potentiel de gravitation**. Dans le cas d'une masse  $M$  isolée, le potentiel  $\Phi$  à la distance  $r$  du centre de cette masse est donné par :

$$\Phi = -\frac{GM}{r} \quad (4.17)$$

où  $G$  est la constante de gravitation.

La fonction de Lagrange d'une particule matérielle libre a pour expression, en relativité restreinte :  $L = -mc^2(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ . Lorsque la vitesse  $v$  devient très petite vis-à-vis de  $c$ , le lagrangien tend vers la limite :  $L_0 = -mc^2$ . Pour que le lagrangien non relativiste (4.16) devienne égal à  $L_0$  lorsque le potentiel de gravitation  $\Phi$  et la vitesse  $v$  deviennent très faibles, il faut ajouter la constante  $-mc^2$  à la fonction de Lagrange ; on obtient :

$$L = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - m\Phi \quad (4.18)$$

Le lagrangien (4.18) peut donc être considéré comme la limite aux basses vitesses d'un lagrangien relativiste pour une particule de masse  $m$  dans un champ gravitationnel. L'action  $S$  pour une telle particule a, dans ce cas, la forme :

$$S = \int Ldt = -mc \int \left( c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\Phi}{c} \right) dt \quad (4.19)$$

D'autre part, en relativité restreinte, l'action pour une particule matérielle libre est donnée par :  $S = -mc \int ds$ . Comparant cette dernière expression avec (4.19), on voit que, dans le cas limite considéré, on a :

$$ds = \left( c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\Phi}{c} \right) dt \quad (4.20)$$

En élevant au carré et en négligeant les termes qui s'annulent lorsque  $c$  tend vers l'infini, on obtient :

$$ds^2 = (c^2 + 2\Phi) dt^2 - d\mathbf{r}^2 \quad (4.21)$$

avec  $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$ . Par conséquent, la composante  $g_{00}$  du tenseur métrique est, dans le cas limite considéré :

$$g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \quad (4.22)$$

Pour une masse  $M$  située à l'origine des coordonnées, on obtient, compte tenu de l'expression (4.17) du potentiel de gravitation :

$$g_{00} = 1 - 2\frac{GM}{rc^2} \quad (4.23)$$

### 4.3.3 Propagation d'un rayon lumineux

Les équations des géodésiques sous la forme (4.15) ne conviennent pas à la propagation des rayons lumineux car le long de leurs lignes de propagation, l'intervalle  $ds$  est nul et tous les termes de l'équation des géodésiques deviennent infinis. Pour obtenir une équation convenable pour la lumière, utilisons le fait que la direction de propagation d'un rayon lumineux est déterminée, en optique géométrique, par le vecteur d'onde qui est tangent au rayon.

Le quadrivecteur d'onde  $k^\alpha$  peut être écrit sous la forme :  $k^\alpha = dx^\alpha/dh$ , où  $h$  est un paramètre qui varie le long du rayon lumineux. Ce paramètre est déterminé par l'équation que l'on peut déduire du fait que, en relativité restreinte, le vecteur d'onde ne varie pas le long d'un rayon lumineux qui se propage dans le vide, soit  $dk^\alpha$ . En relativité générale, on aura  $\nabla k^\alpha = 0$ , d'où :

$$\frac{dk^\alpha}{dh} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha} k^\mu k^\lambda = 0 \quad (4.24)$$

Le paramètre  $h$  est donc déterminé par ces dernières équations. D'autre part, le carré du quadrivecteur d'onde est nul :  $k_\alpha k^\alpha = 0$ . Soit  $\Psi$  la phase de l'onde lumineuse, le quadrivecteur d'onde est tel que :  $k^\alpha = \partial_\alpha \Psi$ . En substituant  $\partial_\alpha \Psi$  à  $k^\alpha$  dans la relation  $k_\alpha k^\alpha = 0$ , on obtient l'équation de propagation d'un rayon lumineux dans un champ de gravitation sous la forme :

$$g_{\alpha\beta} \partial_\alpha \Psi \partial_\beta \Psi = 0 \quad (4.25)$$

Cette dernière équation, appelée **équation d'eikonale**, est fondamentale en optique géométrique.

## 4.4 Équations d'Einstein

Nous avons déjà dit que la détermination de la métrique de l'espace-temps riemannien constitue le problème fondamental de la relativité générale. Ce sont en effet les composantes  $g_{\alpha\beta}$  du tenseur métrique ainsi que les symboles de Christoffel, obtenus à partir des  $g_{\alpha\beta}$ , qui interviennent dans toutes les équations de la relativité

générale. La détermination des  $g_{\alpha\beta}$  pour un système physique donné est obtenue à partir des **équations d'Einstein** ou **équations du champ de gravitation**.

#### 4.4.1 Déformation de l'espace-temps de la relativité restreinte

Avant de déterminer les équations d'Einstein, reprenons quelques commentaires de T. Damour à propos de la relativité générale :

**On peut résumer la théorie de la relativité générale, ou théorie de la gravitation d'Einstein, en une phrase : l'Espace-Temps est une structure élastique qui est déformée par la présence en son sein de Masse-Énergie.**

En ce qui concerne la représentation de cette déformation, T. Damour critique l'image classique qui traîne dans de nombreux ouvrages ou articles, à savoir :

**Celle d'une balle massive posée sur une toile élastique, et la déformant sous son poids ... [Cette image] suggère que la déformation de la toile ne peut se penser que comme une courbure dans un espace extérieur à la toile, et aussi que cette déformation n'existe que grâce à un champ gravitationnel extérieur s'exerçant sur la balle. Or, justement, ce qui fait tout le sel de la théorie d'Einstein, c'est que la déformation de l'espace-temps est une affaire purement interne à cet espace-temps, et n'a pas besoin de dimensions extérieures pour être pensée.**

Afin de rendre intuitive la détermination de cette déformation, T. Damour propose de présenter la théorie de la gravitation d'Einstein comme une généralisation de la loi d'élasticité de Hooke. Rappelons que, selon cette dernière, la déformation d'une structure élastique est proportionnelle à la tension qui s'exerce sur cette structure. Le coefficient de proportionnalité mesure **l'élasticité** de la structure considérée. T. Damour résume alors la démarche d'Einstein :

**C'est, semble-t-il, à Zurich, au mois d'août 1912, qu'Einstein fit un "pas" conceptuel très important vers la construction de la relativité générale. Il comprit essentiellement ce que nous avons expliqué ci-dessus, c'est-à-dire :**

- (i) que le champ gravitationnel est équivalent à une déformation de la géométrie de l'espace-temps, et doit donc se décrire par les dix composantes du "tenseur géochronométrique"  $g$ ,**
- (ii) que la source du "champ  $g$ " est la distribution de masse-énergie, d'impulsion et de tension décrite par un objet à dix composantes, le tenseur d'énergie-tension  $T$ , et enfin,**
- (iii) que l'équation fondamentale de la gravitation relativiste doit avoir la forme qu'une loi d'élasticité de l'espace-temps.**

Ainsi que le précise T. Damour dans une note, Einstein n'a jamais utilisé l'expression de la loi d'élasticité de l'espace-temps, mais que ce n'est pas trahir l'idée



centrale de sa théorie, mais plutôt l'éclairer, en utilisant cette image.

#### 4.4.2 Contraintes imposées aux équations d'Einstein

Les équations d'Einstein permettant de décrire l'espace-temps riemannien constituent un postulat supplémentaire, indépendant du principe d'équivalence ainsi que celui des géodésiques. Ces équations pourraient donc être posées a priori. Cependant, leur découverte a naturellement été orientée afin de satisfaire certaines contraintes que nous allons passer en revue.

**Contrainte newtonienne** : les équations de la gravitation relativiste doivent se réduire à l'équation de Poisson à la limite newtonienne. Ce passage à la limite s'effectue lorsque les vitesses de toutes les particules dans un champ de gravitation sont petites, ce qui exige en même temps que le champ gravitationnel soit lui-même faible.

Dans l'équation de Poisson figure un laplacien. Par suite, on peut imposer aux équations relativistes d'être du second ordre en ce qui concerne les dérivées du tenseur métrique  $g_{\alpha\beta}$ . De plus, ces dérivées doivent y apparaître linéairement. Les conditions ci-dessus ne sont évidemment pas absolument nécessaires pour aboutir à une limite newtonienne. Ce sont cependant les conditions les plus simples mais il est toujours possible d'en imaginer de plus compliquées.

**Courbure nulle à l'infini** : lorsqu'on s'éloigne de toute masse attractive, la gravitation devient nulle à l'infini. Les équations cherchées doivent permettre de retrouver une gravitation nulle, donc une courbure nulle, lorsque les coordonnées tendent vers l'infini.

**Principe de relativité généralisé** : les équations cherchées doivent être covariantes afin de satisfaire au principe de relativité généralisé. Elles s'exprimeront sous forme tensorielle mais tous les tenseurs qui figurent dans une équation doivent être du même ordre, autrement dit le nombre de composantes de tous les tenseurs utilisés doit être identique.

De plus, si un tenseur est conservatif, il ne peut être égal à un autre tenseur que si ce dernier est également conservatif. La première intuition d'Einstein fut, par exemple, de former une équation en écrivant que le tenseur de Ricci  $R_{ik}$  est proportionnel au tenseur impulsion-énergie. Ce dernier est conservatif mais le tenseur de Ricci ne l'est pas et cette équation ne pouvait convenir.

#### 4.4.3 Les équations de la gravitation relativiste

C'est l'intuition extraordinaire d'Einstein qui lui permit d'aboutir aux équations relativistes de la gravitation. Cette intuition reposait fondamentalement sur l'idée que la courbure d'un espace-temps riemannien a pour source physique la matière et l'énergie, représentées par le tenseur impulsion-énergie. Il fallait donc obtenir une

certaine relation entre la chronogéométrie gravitationnelle et sa source.

Cette courbure est décrite par le tenseur de Riemann-Christoffel  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$  qui est un tenseur du quatrième ordre ; c'est la mesure la plus complète possible de la déformation locale d'un espace-temps courbe. Ce tenseur ne peut cependant pas être identifié, à un coefficient de proportionnalité près, au tenseur impulsion-énergie total  $Q_{\alpha\beta}$  donné par (2.105), car celui-ci est du second ordre. Il faut donc trouver un tenseur  $S_{\alpha\beta}$  tel que :

$$S_{\alpha\beta} = \kappa Q_{\alpha\beta} \quad (4.26)$$

Le coefficient de proportionnalité  $\kappa$  sera déterminé par comparaison avec la limite newtonienne de l'équation (4.26). Soit  $G$  la constante de gravitation, on a :

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (4.27)$$

Par contractions successives du tenseur  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ , on obtient le tenseur de Ricci  $R_{\alpha\beta}$  puis le scalaire de courbure  $R$ . Ce sont des quantités qui mesurent elles aussi la déformation de l'espace-temps mais d'une manière incomplète. Une combinaison du tenseur de Ricci et du scalaire de courbure est donnée par le tenseur appelé **tenseur d'Einstein**. Il a pour expression :

$$S_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu} \left( R^\mu_{\beta} - \frac{1}{2} \delta^\mu_{\beta} R \right) = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \quad (4.28)$$

C'est un tenseur du deuxième ordre, de signification purement chronogéométrique, qui vérifie les contraintes énoncées ci-dessus, à savoir :

**1** - Les composantes  $S_{\alpha\beta}$  du tenseur d'Einstein ne dépendent que des potentiels de gravitation  $g_{\alpha\beta}$  et de leurs dérivées des deux premiers ordres. Ces composantes sont linéaires par rapport aux dérivées du second ordre.

**2** - Le tenseur  $S_{\alpha\beta}$  satisfait aux équations de conservation :

$$\nabla_{\alpha} S_{\beta}^{\alpha} = 0 \quad (4.29)$$

Le tenseur d'Einstein n'est pas le plus général vérifiant les conditions ci-dessus. Élie Cartan a démontré que les seuls tenseurs satisfaisant aux deux conditions énoncées ci-dessus sont données, à un facteur multiplicatif près, par :

$$S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R + \Lambda g_{\alpha\beta} \quad (4.30)$$

Le système d'équations aux dérivées partielles correspondant à (4.26) s'écrit alors, compte tenu de (4.27) et (4.30) :

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R + \Lambda g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} Q_{\alpha\beta} \quad (4.31)$$

La constante  $\Lambda$  est appelée **constante cosmologique** et ne fut introduite par Einstein que lors d'applications à la cosmologie. Les équations proposées en premier lieu par Einstein pour les potentiels de gravitation sont les suivantes :

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = \frac{8\pi G}{c^4} Q_{\alpha\beta} \quad (4.32)$$

Les équations (4.32) sont appelées **équations d'Einstein** ou **équations du champ de gravitation**. Ce sont les équations fondamentales de la relativité générale.

#### 4.4.4 Rigidité de l'espace-temps

Les équations d'Einstein, de la forme  $S_{\alpha\beta} = \kappa Q_{\alpha\beta}$ , relient une **déformation** locale de la chronogéométrie de l'espace-temps mesurée par  $S_{\alpha\beta}$  à la présence de **tensions**, définies par  $Q_{\alpha\beta}$ . Ainsi que le fait remarquer T. Damour, les équations (4.32) sont analogues aux équations fondamentales de Hooke décrivant l'élasticité d'un milieu peu déformé.

Le coefficient  $\kappa = 8\pi G/c^4$  peut donc être considéré comme une mesure de **l'élasticité de l'espace-temps**. Calculons un ordre de grandeur de la "constante d'élasticité"  $\kappa$ . Dans le système international d'unités, la constante de gravitation est égale à :  $G = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$  ; la vitesse de la lumière dans le vide a pour valeur :  $c = 299\,792.458 \text{ m/s}$ . On obtient une valeur de  $\kappa$  d'un ordre de grandeur égal à  $10^{-43}$ . Autant dire que l'élasticité de l'espace-temps est extraordinairement petite ou que, inversement, la "rigidité" de l'espace-temps est extrêmement grande. Dans son ouvrage, T. Damour conclut ainsi :

**Cela explique pourquoi, pendant des millénaires, on avait pu supposer que l'espace et le temps étaient des structures "rigides", non influencées par la présence d'énergie ou de tensions. Il faut concentrer d'énormes densités d'énergie ou de tensions pour réussir à déformer de façon significative la gelée espace-temps.**

#### 4.4.5 Limite newtonienne

Afin de déterminer la valeur de la constante d'élasticité  $\kappa$ , étudions le passage à la limite dans les équations du champ gravitationnel conduisant à la loi d'attraction de Newton. Dans ce but, les vitesses des particules ainsi que le champ gravitationnel sont supposés faibles.

L'expression de la composante  $g_{00}$  du tenseur métrique est donnée, dans le cas de l'approximation newtonienne par (4.22), soit :

$$g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \quad (4.33)$$

Considérons un tenseur particulier d'impulsion-énergie  $P^{\alpha\beta}$  d'un système macroscopique constitué de particules en mouvement. La masse spécifique de ce système

est notée  $\rho$  ;  $c$  est la somme des masses au repos des particules dans l'unité de volume. Dans l'équation (2.82), le tenseur d'impulsion-énergie se réduit à  $P^{\alpha\beta} = \rho c^2 u^\alpha u^\beta$  pour un tenseur de contraintes  $T^{\alpha\beta} = 0$ .

Supposons un mouvement macroscopique très lent dans le champ de gravitation, toutes les composantes spatiales de la quadrivitesse peuvent être considérées comme négligeables ; seule la composante temporelle n'est pas supposée nulle ; elle est telle que :  $u^0 = -u_0 = 1$ . Par conséquent, seule la composante temporelle  $P_0^0$  subsiste et elle est égale à  $P_0^0 = -\rho c^2$ . Le scalaire  $P = P_i^i$  sera égal à la même quantité  $P = -\rho c^2$ .

Les équations d'Einstein (4.32) s'écrivent pour les composantes mixtes :

$$R^\alpha_\beta - \frac{1}{2} \delta^\alpha_\beta R = \kappa P^\alpha_\beta \quad (4.34)$$

La contraction de cette dernière expression sur les indices  $\alpha$  et  $\beta$  (qui varient de 1 à 4), donne :

$$R = -\kappa P^\alpha_\alpha = -\kappa P \quad (4.35)$$

Compte tenu de (4.35), les équations (4.34) s'écrivent :

$$R^\alpha_\beta = \kappa \left( P^\alpha_\beta - \frac{1}{2} \delta^\alpha_\beta P \right) \quad (4.36)$$

On obtient ainsi, pour  $\alpha = \beta = 0$  :

$$R_0^0 = -\frac{\kappa}{2} \rho c^2 \quad (4.37)$$

Toutes les autres équations données par (4.36) s'annulent indifféremment à l'approximation considérée.

La composante  $R_0^0$  du tenseur de Ricci se calcule en fonction des symboles de Christoffel à partir des formules suivantes :

$$R_{is} = R_i^k{}_{ks} = \partial_k \Gamma_i^k{}_s - \partial_s \Gamma_i^k{}_k + \Gamma_i^l{}_s \Gamma_k^k{}_l - \Gamma_i^l{}_k \Gamma_s^k{}_l \quad (4.38)$$

et

$$R^i{}_j = g^{ik} R_{kj} \quad (4.39)$$

Dans ces formules, les termes qui contiennent les produits des  $\Gamma_{\alpha\chi}^\beta$  sont des infiniment petits du second ordre. D'autre part, les termes où figurent des dérivées par rapport à  $x^\alpha = ct$  sont petits, en comparaison des autres dérivées par rapport à  $x^\alpha$ , car elles contiennent des puissances supplémentaires en  $1/c$ . En définitive, l'expression de la composante  $R_0^0$  se réduit à :  $R_{00} = -R_0^0 = \partial \Gamma_0^{\alpha 0} / \partial x^\alpha$ . La formule suivante donne le calcul des symboles de Christoffel en fonction des  $g_{\alpha\beta}$  :

$$\Gamma_k^j{}_i = \frac{1}{2} g^{jl} (\partial_k g_{il} + \partial_i g_{lk} - \partial_l g_{ki}) \quad (4.40)$$

Compte tenu des approximations sur les dérivées et de la valeur de  $g_{00}$  donnée par (4.33), on obtient :

$$\Gamma_0^0{}_0 \simeq 0 ; \quad \Gamma_0^i{}_0 = -\frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \quad (4.41)$$

L'expression de la composante  $R^0{}_0$ , compte tenu de (4.41), est finalement :

$$R^0{}_0 = -\frac{\partial \Gamma_0^\alpha{}_0}{\partial x^\alpha} = -\frac{\partial \Gamma_0^i{}_0}{\partial x^i} = -\frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^{i2}} = -\frac{1}{c^2} \Delta \Phi \quad (4.42)$$

Reportant l'expression (4.37) de  $R^0{}_0$  dans (4.42), on obtient :

$$\Delta \Phi = \frac{\kappa}{2} \rho c^4 \quad (4.43)$$

L'équation du champ de gravitation newtonien a pour expression classique :

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho \quad (4.44)$$

La comparaison de ces deux dernières équations nous donne finalement l'expression du coefficient d'élasticité de l'espace-temps :

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (4.45)$$

Cette constante permet ainsi de déterminer complètement les équations d'Einstein. Celles-ci s'appliquent à tous les problèmes dans lesquels la gravitation intervient de manière importante : chute des corps, déviation de la lumière, orbite des planètes et des satellites, mouvement des étoiles, etc. Ces équations vont permettre d'envisager une cosmologie, non pas fondée sur des hypothèses arbitraires mais comme une étude de l'espace-temps dans l'ensemble de l'univers.

## 4.5 Champ de gravitation central symétrique

La résolution des équations d'Einstein appliquées à un système physique donné, est extrêmement ardue. Ces équations sont au nombre de seize mais les symétries permettent d'en réduire le nombre à dix. On a en effet :  $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ ,  $R_\alpha = R_{\beta\alpha}$ ,  $Q_{\alpha\beta} = Q_{\beta\alpha}$ . Malgré cette réduction, on doit résoudre un système différentiel du second ordre où les  $g_{\alpha\beta}$  sont les inconnues à déterminer. Cependant, la considération d'autres symétries physiques permet de simplifier la résolution ainsi que nous allons le voir dans le cas d'un champ à symétrie centrale.

### 4.5.1 Champ à symétrie centrale dans le vide

C'est l'astronome Karl Schwarzschild qui, dès 1916, va trouver la première solution exacte des équations d'Einstein pour un champ de gravitation central symétrique. Un tel champ est engendré par une distribution de matière ayant une même symétrie. C'est le cas du Soleil et de ne nombreux astres. Nous étudierons d'abord le champ de gravitation dans le vide, c'est-à-dire à l'extérieur des masses qui l'engendrent.

Dans ce cas, nous supposons que le tenseur d'impulsion-énergie est égal à zéro et les équations d'Einstein (4.32) se réduisent alors à :

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 0 \quad (4.46)$$

La symétrie centrale du champ signifie que la métrique de l'espace-temps doit être la même pour tous les points équidistants du centre considéré. Si l'on a recours à des coordonnées spatiales "sphériques"  $r, \theta, \varphi$ , l'expression la plus générale de l'intervalle s'écrit :

$$ds^2 = A(r, t) dr^2 + B(r, t) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + C(r, t) dt^2 + D(r, t) dr dt \quad (4.47)$$

Les fonctions  $A, B, C, D$  dépendent du "rayon vecteur"  $r$  et du "temps"  $t$ . Par suite de l'arbitraire dans le choix du système de référence en relativité générale, on peut changer les coordonnées en les soumettant à n'importe quelle transformation qui ne viole pas la symétrie centrale de l'intervalle.

Chosissons les coordonnées  $r$  et  $t$  de sorte que la fonction  $D(r, t)$  soit nulle et que  $B(r, t)$  soit égale à  $-r^2$ . Cette dernière condition implique que la coordonnée  $r$  est telle que la longueur de la circonférence d'un cercle, centrée sur l'origine des coordonnées, soit égale à  $2\pi r$ . Afin de simplifier les notations pour les calculs, il est commode de faire les choix suivants :  $A(r, t) = -e^\lambda$ ,  $C(r, t) = c^2 e^\nu$ , où  $\lambda$  et  $\nu$  sont des fonctions à déterminer de  $r$  et  $t$ . Finalement, l'intervalle  $ds^2$  choisi s'écrit :

$$ds^2 = c^2 e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (4.48)$$

Notons les coordonnées "sphériques" sous la forme suivante :  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \theta$ ,  $x^3 = \varphi$ . Les composantes covariantes non nulles du tenseur métrique sont alors les suivantes :

$$g_{00} = e^\nu ; g_{11} = -e^\lambda ; g_{22} = -r^2 ; g_{33} = -r^2 \sin^2\theta \quad (4.49)$$

Ces valeurs permettent de calculer aisément les expressions des symboles de Christoffel  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  en utilisant les formules (4.40). On calcule ensuite les composantes covariantes du tenseur de Ricci  $R_{\alpha\beta}$  à partir des formules (4.38), puis, par contraction, le scalaire de courbure  $R$ . Ces calculs, détaillés au cours de l'exercice 4.7.2, permettent d'écrire les équations d'Einstein (4.46) sous forme d'équations différentielles des fonctions  $\lambda(t, r)$  et  $\nu(t, r)$ . L'intégration de ces équations donne les expressions de  $\lambda$  et  $\nu$ . En écrivant que le champ de gravitation devient nul à l'infini, on détermine la constante d'intégration.

Finalement, on obtient explicitement l'expression du carré de l'intervalle :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - (2GM/rc^2)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (4.50)$$

Le champ de gravitation dans le vide créé par une masse  $M$  centrale symétrique est ainsi complètement déterminé par (4.50).

## 4.5.2 Singularité de Schwarzschild

La métrique (4.50) est valable à l'extérieur de la masse qui crée le champ de gravitation. On voit que cette métrique présente une première singularité pour  $r = 0$ , le coefficient  $g_{00}$  de  $dt^2$  devenant alors infini.

Une seconde singularité est celle pour laquelle la coordonnée est telle que :

$$r_0 = \frac{2GM}{c^2} \quad (4.51)$$

Cette quantité  $r_0$  est appelée le **rayon gravitationnel**. Dans ce cas,  $g_{00}$  s'annule et  $g_{11}$  devient infini. On peut alors définir une région singulière pour :

$$0 < r < \frac{2GM}{c^2} \quad (4.52)$$

Dans cette région, les coordonnées de temps et d'espace échangent leur rôle. Si l'on identifie  $r$  avec une distance newtonienne, on peut montrer que cette région singulière est située très profondément à l'intérieur de la masse  $M$  qui crée le champ de gravitation. Or dans ce domaine, la métrique (4.50) n'est plus valable puisqu'elle a été calculée en prenant un tenseur d'impulsion-énergie nul.

Cette **singularité de Schwarzschild** n'est qu'apparente car elle peut être éliminée par un choix convenable du système de coordonnées. Mais ce qui est éliminé est la singularité mathématique dans les composantes du tenseur métrique. Par contre, il n'en reste pas moins un phénomène physique tel que tout signal électromagnétique émis par une telle masse ne peut atteindre un observateur extérieur.

## 4.5.3 Champ à symétrie centrale à l'intérieur de la matière

Les équations de la gravitation d'Einstein ne déterminent pas entièrement la distribution et le mouvement de la matière. Ces équations n'impliquent pas **l'équation d'état** de la matière, c'est-à-dire l'équation qui relie entre elles la densité et la pression. Outre les équations d'Einstein, il faut donc se donner une équation d'état lorsqu'on veut résoudre le problème de la gravitation à l'intérieur de la matière.

Pour un système à symétrie sphérique en équilibre hydrostatique, la métrique générale (4.48) peut être écrite sous la forme suivante :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi(r)}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - (2GM(r)/rc^2)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (4.53)$$

La forme (4.53) constitue une généralisation de l'équation (4.50) où les fonctions  $\Phi(r)$  et  $M(r)$  sont à déterminer. L'utilisation de la métrique (4.53) permet le calcul du tenseur d'Einstein en fonction de  $\Phi(r)$  et  $M(r)$ . Les équations d'Einstein fournissent ensuite pour ces deux fonctions un système d'équations couplées, appelées **équations de Tolman-Oppenheimer-Volkov**, dépendant de la densité d'énergie et de la pression de la matière dans le système considéré. Ainsi, la fonction  $M(r)$

apparaît comme étant la masse située dans une sphère de rayon inférieur à  $r$ .

La métrique de Schwarzschild (4.50) étant un cas particulier de la métrique (4.53), les deux métriques se raccordent parfaitement à la surface d'une sphère de rayon donné  $R$  et de masse  $M$ . On a en effet :  $\Phi(R) = -GM/R$ ,  $M(R) = M$ .

## 4.6 Ondes gravitationnelles

L'idée d'une vitesse de propagation finie de l'attraction gravitationnelle est due à Pierre-Simon Laplace (1740-1827). Ce fut ensuite Henri Poincaré qui, en 1905, fit l'hypothèse d'une vitesse égale à celle de la lumière.

Une onde gravitationnelle peut être considérée comme une petite perturbation qui se propage dans l'espace-temps riemannien en le déformant légèrement. Nombre de phénomènes physiques peuvent être la source de telles perturbations puisqu'il n'y a pas de matière qui n'ait une action gravitationnelle. Le simple mouvement des planètes du système solaire, par exemple, est une source d'ondes gravitationnelles extrêmement faibles. De nombreux laboratoires d'astrophysique essaient de nos jours de détecter directement des ondes gravitationnelles.

### 4.6.1 Équations d'Einstein linéarisées

Considérons un espace-temps riemannien dont la métrique  $g'_{\alpha\beta}$  est connue. Supposons qu'une onde gravitationnelle perturbe légèrement cet espace-temps et déterminons les perturbations  $h_{\alpha\beta}$  qui en résulte pour la nouvelle métrique  $g_{\alpha\beta}$  :

$$g_{\alpha\beta} = g'_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad (4.54)$$

Afin de simplifier cette étude, supposons que le champ de gravitation initial soit suffisamment faible pour que la métrique soit pratiquement euclidienne. Dans ce cas, nous pouvons choisir un système de référence tel que les composantes  $g'_{\alpha\beta}$  du tenseur métrique soient presque égales à celles de l'espace-temps de Poincaré-Minkowski. Dans ce cas, nous pouvons écrire :

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad (4.55)$$

Afin de respecter la cohérence de notre approximation, il est nécessaire d'utiliser les composantes  $\eta_{\alpha\beta}$  du tenseur métrique pour lever ou abaisser les indices. On a pour les composantes contravariantes  $g^{\alpha\beta}$  en posant :

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} + k^{\alpha\beta} \quad (4.56)$$

Nous allons calculer le terme  $k^{\alpha\beta}$  :

$$\begin{aligned} g_{i\alpha} g^{\alpha\beta} &= \delta_{\beta}^i \\ (\eta_{i\alpha} + h_{i\alpha})(\eta^{\alpha\beta} + k^{\alpha\beta}) &= \delta_{\beta}^i \\ \eta_{i\alpha} \eta^{\alpha\beta} + \eta_{i\alpha} k^{\alpha\beta} + h_{i\alpha} \eta^{\alpha\beta} + h_{i\alpha} k^{\alpha\beta} &= \delta_{\beta}^i \end{aligned} \quad (4.57)$$



$$\begin{aligned}
\eta_{i\alpha} k^{\alpha\beta} + h_{i\alpha} \eta^{\alpha\beta} &= 0 \\
\eta_{i\alpha} \eta^{\mu i} k^{\alpha\beta} &= -\eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu i} h_{i\alpha} \\
k^{\mu\beta} &= -\eta^{\mu i} \eta^{\alpha\beta} h_{i\alpha}
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Soit en posant  $h^{\mu\beta} = \eta^{\mu i} \eta^{\alpha\beta} h_{i\alpha}$ , on a :

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} + O(h_{\alpha\beta}^2) \tag{4.59}$$

Compte tenu des hypothèses ci-dessus, et en notant :

$$h_{kj,\alpha\beta} = \partial_{\alpha\beta} h_{kj} \tag{4.60}$$

nous allons calculer le tenseur d'Einstein linéarisé. Commençons par le tenseur de Ricci :

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \eta^{kj} (h_{\beta j, \alpha k} + h_{\alpha k, \beta j} - h_{\alpha\beta, kj} - h_{kj, \alpha\beta}) \\
&= -\frac{1}{2} \eta^{kj} \partial_{\alpha\beta} h_{kj} + \frac{1}{2} \eta^{kj} \partial_{\alpha k} h_{\beta j} + \frac{1}{2} \eta^{kj} \partial_{\beta j} h_{\alpha k} - \frac{1}{2} \eta^{kj} \partial_{kj} h_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{4.61}$$

En posant  $h = \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$  et  $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu\nu}$  on obtient :

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \partial_{\alpha\beta} h + \frac{1}{2} \partial_{\alpha k} h_{\beta}^k + \frac{1}{2} \partial_{\beta j} h_{\alpha}^j - \frac{\square}{2} h_{\alpha\beta} \tag{4.62}$$

Calculons maintenant le scalaire de courbure  $R$  :

$$\begin{aligned}
R &= g^{li} R_{li} = \frac{1}{2} \eta^{li} \eta^{kj} (h_{ij, kl} + h_{kl, ij} - h_{li, kj} - h_{kj, li}) \\
&= \eta^{li} \eta^{kj} (h_{ij, kl} - h_{li, kj})
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Ce qui donne pour le terme  $\eta_{\alpha\beta} R$  :

$$\begin{aligned}
\eta_{\alpha\beta} R &= \eta_{\alpha\beta} \eta^{li} \eta^{kj} (h_{ij, kl} - h_{li, kj}) \\
&= \eta_{\alpha\beta} \partial_{kl} h^{lk} - \eta_{\alpha\beta} \eta^{li} \square h_{li} \\
&= \eta_{\alpha\beta} \partial_{kl} h^{lk} - \eta_{\alpha\beta} \square h_{\alpha}^{\alpha} \\
&= \eta_{\alpha\beta} \partial_{kl} h^{lk} - \eta_{\alpha\beta} \square h
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Finalement, on a :

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (-\partial_{\alpha\beta} h + \partial_{\alpha k} h_{\beta}^k + \partial_{\beta j} h_{\alpha}^j - \square h_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} (\eta_{\alpha\beta} \partial_{kl} h^{lk} - \eta_{\alpha\beta} \square h) \tag{4.65}$$

Le tenseur  $S_{\alpha\beta}$  peut être simplifié en posant :

$$\tilde{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h \quad (4.66)$$

Commençons par le terme  $-\partial_{\alpha\beta} h + \partial_{\alpha k} h_{\beta}^k + \partial_{\beta j} h_{\alpha}^j$  ; nous choisissons une jauge pour laquelle :

$$\partial_{\alpha} \tilde{h}^{\alpha\beta} = 0 \quad (4.67)$$

Nous avons alors :

$$\partial_{\alpha k} h_{\beta}^k = \partial_{\alpha k} \tilde{h}_{\beta}^k + \frac{1}{2} \partial_{\alpha\beta} h \quad (4.68)$$

$$\partial_{\beta j} h_{\alpha}^j = \partial_{\beta j} \tilde{h}_{\alpha}^j + \frac{1}{2} \partial_{\alpha\beta} h \quad (4.69)$$

d'où, avec la relation de la jauge (4.67) :

$$-\partial_{\alpha\beta} h + \partial_{\alpha k} h_{\beta}^k + \partial_{\beta j} h_{\alpha}^j = \quad (4.70)$$

$$\partial_{\alpha k} \tilde{h}_{\beta}^k + \partial_{\beta j} \tilde{h}_{\alpha}^j =$$

$$\partial_{\alpha k} \tilde{h}_{\beta}^k + \partial_{\beta j} g_{i\alpha} \tilde{h}^{ji} =$$

$$\partial_{\alpha k} \tilde{h}_{\beta}^k + \partial_{\beta} g_{i\alpha} \partial_j \tilde{h}^{ji} =$$

$$(1) \partial_{\alpha k} \tilde{h}_{\beta}^k \quad (4.71)$$

Passons aux termes  $-\square h_{\alpha\beta}$ ,  $-\eta_{\alpha\beta} \partial_{kl} h^{kl}$  et  $-\eta_{\alpha\beta} \square h$

$$(2) \quad -\square h_{\alpha\beta} = -\square \tilde{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \square h \quad (4.72)$$

$$(3) \quad -\eta_{\alpha\beta} \partial_{kl} h^{kl} = -\eta_{\alpha\beta} \partial_{kl} \tilde{h}^{kl} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \partial_{kl} \eta^{kl} h \quad (4.73)$$

$$= -\eta_{\alpha\beta} \partial_{kl} \tilde{h}^{kl} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \square h \quad (4.74)$$

$$(4) \quad \eta_{\alpha\beta} \square h \quad (4.75)$$

Ajoutons (1)+(2)+(3)+(4), on obtient donc pour le tenseur d'Einstein linéarisé :

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (-\square \tilde{h}_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta} \partial_{kl} \tilde{h}^{kl} + \partial_{\alpha k} \tilde{h}_{\beta}^k) \quad (4.76)$$

Finalement, les équations d'Einstein (4.32) s'écrivent :

$$-\square \tilde{h}_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta} \partial_{kl} \tilde{h}^{kl} + \partial_{\alpha k} \tilde{h}_{\beta}^k = \frac{16\pi G}{c^4} Q_{\alpha\beta} \quad (4.77)$$

Les équations (4.77) sont appelées **équations d'Einstein linéarisées**.

## 4.6.2 Propagation dans le vide

Par analogie avec l'équation de Maxwell pour les potentiels électromagnétiques, on peut imposer une condition de jauge de Lorentz que l'on a déjà utilisée en (4.67) :

$$\partial_\alpha \tilde{h}^{\alpha\beta} = 0 \quad (4.78)$$

Avec cette condition de jauge, les équations d'Einstein linéarisées s'écrivent :

$$\square \tilde{h}_{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} Q_{\alpha\beta} \quad (4.79)$$

Dans le vide, les équations de propagation du champ de gravitation deviennent :

$$\square \tilde{h}_{\alpha\beta} = 0 \quad (4.80)$$

C'est l'équation classique de propagation des ondes dans le vide. Par conséquent, les champs gravitationnels se propagent dans le vide avec la vitesse de la lumière.

Considérons une onde de gravitation plane qui se propage selon une seule direction de l'espace, soit l'axe  $x^1 = x$ . Les équations de propagation (4.80) se réduisent à :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \tilde{h}_{\alpha\beta} = 0 \quad (4.81)$$

Cette équation admet pour solution toute fonction de  $t \pm x/c$ . On démontre que ces ondes de gravitation sont des ondes transverses dont la polarisation est déterminée par un tenseur symétrique du second ordre dans le plan perpendiculaire à l'axe des  $x$ .

Comme pour les ondes électromagnétiques, les ondes gravitationnelles transportent une certaine quantité d'énergie. Mais les énergies mises en jeu lors du passage d'une onde de gravitation sont extrêmement faibles. Pour une onde très intense, par exemple l'explosion d'une supernovae au centre de la Galaxie, l'énergie de passage est d'un ordre de grandeur de  $10^{-25}$  joules. Autant dire que leur détection est des plus délicates.

Au cours du chapitre suivant, nous verrons que ce n'est pas actuellement la détection directe des ondes gravitationnelles qui apporte la preuve de l'existence de telles ondes. C'est l'étude de la variation de l'orbite d'un pulsar double qui, en émettant des ondes de gravitation, perd de l'énergie et dont la mesure très précise de cette variation au cours de plus de 25 années constitue la preuve la plus remarquable de la validité de la relativité générale.

## 4.7 Exercices

### 4.7.1 Élément de distance spatiale dans un système en rotation

Considérons un cas particulier de champ gravitationnel stationnaire : celui d'un disque en rotation à vitesse angulaire  $\omega$  uniforme.

1. On considère un système d'inertie "immobile" en coordonnées cylindriques  $r', \varphi', z', t$ . Écrire l'expression du carré de l'intervalle dans ce référentiel.
2. Soient  $r, \varphi, z, t$  les coordonnées cylindriques du disque tournant dont l'axe de rotation coïncide avec l'axe  $Oz'$  du référentiel d'inertie. Déterminer l'expression du carré de l'intervalle dans le système de coordonnées en rotation.
3. Déterminer le carré de l'élément linéaire  $dl$  de distance spatiale dans le système de coordonnées en rotation.

### 4.7.2 Correction

1. En coordonnées cylindriques  $r', \varphi', z', t$ , le carré de l'intervalle s'écrit :

$$ds'^2 = c^2 dt^2 - dr'^2 - r'^2 d\varphi'^2 - dz'^2 \quad (4.82)$$

2. Si l'axe de rotation du disque coïncide avec l'axe  $Oz'$  du référentiel fixe, on a les relations suivantes entre coordonnées :

$$r' = r ; z' = z ; \varphi' = \varphi + \omega t \quad (4.83)$$

En calculant les différentielles des coordonnées (4.83), puis en élevant au carré et en substituant dans (4.82), on obtient :

$$ds'^2 = ds^2 = (c^2 - \omega^2 r^2) dt^2 - 2\omega r^2 d\varphi dt - r^2 d\varphi^2 - dz^2 - dr^2 \quad (4.84)$$

3. L'élément linéaire spatial est obtenu à partir de la formule (4.9), à savoir :

$$dl^2 = \left( \frac{g_{0i} g_{0k}}{g_{00}} - g_{ik} \right) dx^i dx^k \quad (4.85)$$

Les indices  $i$  et  $k$  varient de 1 à 3 et concernent les variables  $r, \phi, z$ . On a donc :

$$g_{00} = c^2 - \omega^2 r^2 ; g_{02} = -2\omega r^2 ; g_{11} = -1 ; g_{22} = -r^2 ; g_{33} = -1 \quad (4.86)$$

Les autres composantes sont nulles. Compte tenu de (4.86), la formule (4.85) nous donne :

$$dl^2 = dr^2 + \frac{4\omega^2 r^2 - 1}{c^2 - \omega^2 r^2} r^2 d\varphi^2 + dz^2 \quad (4.87)$$

### 4.7.3 Métrique d'un champ de gravitation central symétrique

C'est l'astronome Karl Schwarzschild qui dès 1916, va trouver la première solution exacte des équations d'Einstein pour un champ de gravitation central symétrique. Un tel champ est engendré par une distribution de matière ayant une même symétrie. C'est le cas du soleil et de nombreux astres.

1. La symétrie centrale du champ signifie que la métrique de l'espace-temps doit être la même pour tous les points équidistants du centre considéré. Si l'on a recours à des coordonnées spatiales "sphériques"  $r, \theta, \varphi$ , écrire l'expression la plus générale de l'intervalle.
2. Choisissons les coordonnées  $r$  et  $t$  de sorte que la fonction  $D(r, t)$  soit nulle et que  $B(r, t)$  soit égale à  $-r^2$ . Cette dernière condition implique que la coordonnée  $r$  est telle que la longueur de la circonférence d'un cercle, centré sur l'origine des coordonnées soit égale à  $2\pi r$ . Afin de simplifier les notations pour les calculs, il est commode de faire les choix suivants :  $A(r, t) = -e^\lambda$ ,  $C(r, t) = e^2 e^\nu$ , où  $\lambda$  et  $\nu$  sont des fonctions à déterminer de  $r$  et  $t$ . Déterminer l'expression de l'intervalle  $ds^2$  avec les notations ainsi choisies.
3. Écrire les composantes covariantes du tenseur métrique en considérant que les coordonnées  $ct, r, \theta, \varphi$  représentent respectivement les coordonnées d'indices 0, 1, 2, 3.
4. Calculer les composantes contravariantes du tenseur métrique.
5. Calculer les symboles de Christoffel de deuxième espèce correspondant à cette métrique.
6. En considérant un tenseur d'impulsion-énergie égal à zéro, écrire les équations d'Einstein avec leurs composantes mixtes.
7. Intégrer les équations d'Einstein. On montrera qu'on peut choisir  $\lambda = -\nu$ . La constante d'intégration sera déterminée en comparant avec la limite newtonienne.
8. En déduire l'expression du carré de l'intervalle  $ds^2$  permettant de déterminer complètement le champ de gravitation dans le vide créé par une distribution de matière centrale symétrique.
9. En déduire la métrique spatiale.
10. Déterminer la correction à apporter à la métrique galiléenne à de grandes distances de l'origine des coordonnées. Que peut-on en déduire pour la métrique à grande distance de n'importe quel système de corps ?

### 4.7.4 Correction

1. Si l'on a recours à des coordonnées spatiales "sphériques"  $r, \theta, \varphi$ , on a pour l'expression la plus générale de l'intervalle, la formule (4.47) :

$$ds^2 = A(r, t) dr^2 + B(r, t) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + C(r, t) dt^2 + D(r, t) dr dt \quad (4.88)$$

2. Avec le choix des fonctions données, il vient :

$$ds^2 = c^2 e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (4.89)$$

3. Considérons que les coordonnées  $ct, r, \theta, \varphi$  représentent respectivement les coordonnées d'indices 0, 1, 2, 3. Les composantes covariantes du tenseur métrique sont données par :

$$g_{00} = e^\nu ; g_{11} = -e^\lambda ; g_{22} = -r^2 ; g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta \quad (4.90)$$

4. Les composantes contravariantes du tenseur métrique sont données par :

$$g^{00} = e^{-\nu} ; g^{11} = -e^{-\lambda} ; g^{22} = -r^{-2} ; g^{33} = -r^{-2} \sin^{-2} \theta \quad (4.91)$$

5. Les symboles de Christoffel de deuxième espèce correspondant à cette métrique se calculent en utilisant les formules générales (3.15), à savoir :

$$\Gamma_k^j{}_i = \frac{1}{2} g^{jl} (\partial_k g_{il} + \partial_i g_{lk} - \partial_l g_{ki}) \quad (4.92)$$

Les indices 0, 1, 2, 3 correspondent respectivement aux variables  $ct, r, \theta, \varphi$ . On utilise le signe prime pour désigner la dérivation par rapport à la variable  $r$  et le point au dessus d'une lettre pour indiquer la dérivation par rapport à  $ct$ . On obtient les valeurs suivantes :

$$\Gamma_0^0{}_0 = \dot{\nu} / 2 ; \Gamma_1^0{}_0 = \nu' / 2 ; \Gamma_1^0{}_1 = \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} \quad (4.93)$$

$$\Gamma_0^1{}_0 = \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} ; \Gamma_1^1{}_0 = \frac{\dot{\lambda}}{2} ; \Gamma_1^1{}_1 = \frac{\lambda'}{2} ; \Gamma_2^1{}_2 = -r e^{-\lambda} ; \Gamma_3^1{}_3 = -r \sin^2 \theta e^{-\lambda} \quad (4.94)$$

$$\Gamma_1^2{}_2 = \Gamma_1^3{}_3 = \frac{1}{r} ; \Gamma_3^2{}_3 = -\sin \theta \cos \theta ; \Gamma_2^3{}_3 = \cotan \theta \quad (4.95)$$

Les autres composantes sont nulles, sauf celles écrites ci-dessus pour lesquelles on effectue une transposition des indices  $k$  et  $i$  situés en bas des symboles de Christoffel.

6. Les équations d'Einstein sont données par les relations (4.31) sous forme covariante. Elles s'écrivent également avec les composantes mixtes des tenseurs sous la forme (4.34). Pour un tenseur d'impulsion-énergie égal à zéro, on a :

$$R^\alpha{}_\beta - \frac{1}{2} \delta^\alpha_\beta R = 0 \quad (4.96)$$

Les composantes covariantes  $R_{is}$  du tenseur de Ricci se calculent à partir de la formule (4.38), soit :

$$R_{is} = R_i^k{}_{ks} = \partial_k \Gamma_i^k{}_s - \partial_s \Gamma_i^k{}_k + \Gamma_i^l{}_s \Gamma_k^k{}_l - \Gamma_i^l{}_k \Gamma_s^k{}_l \quad (4.97)$$

Ses composantes mixtes sont données par (4.39) :

$$R^i_j = g^{ik} R_{kj} \quad (4.98)$$

Le scalaire de courbure, noté  $R$ , est obtenu par contraction du tenseur de Ricci, soit :

$$R = g^{is} R_{is} \quad (4.99)$$

L'utilisation des formules qui précèdent conduit aux équations suivantes :

$$e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0 \quad (4.100)$$

$$\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left( \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu' \lambda'}{2} \right) - \frac{1}{2} e^{-\nu} \left( \ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\nu} \dot{\lambda}}{2} \right) = 0 \quad (4.101)$$

$$e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = 0 \quad (4.102)$$

$$e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r} = 0 \quad (4.103)$$

Les autres composantes des équations d'Einstein sont identiquement nulles.

7. L'équation (4.101) étant une conséquence des équations (4.100), (4.102) et (4.103), l'intégration des équations d'Einstein portent uniquement sur ces trois dernières.

L'équation (4.103) se réduit à :

$$\dot{\lambda} = 0 \quad (4.104)$$

Elle montre que la fonction  $\lambda$  ne dépend que du temps. La somme des équations (4.100) et (4.102) se réduit à  $\lambda' + \nu' = 0$ . On obtient donc :

$$\lambda + \nu = f(t) \quad (4.105)$$

où  $f(t)$  est une fonction quelconque de  $t$ . On peut supposer que  $f(t) = 0$  car les choix effectués lors de la question 2 laisse la possibilité d'ajouter à  $\nu$  une fonction arbitraire. Avec  $f(t) = 0$ , on a :  $\lambda = -\nu$ .

L'équation (4.102) s'intègre facilement et nous donne comme solution, compte tenu de  $g_{00} = e^\nu$  :

$$e^{-\lambda} = e^\nu = 1 + \frac{K}{r} = g_{00} \quad (4.106)$$

La constante d'intégration  $K$  s'obtient en considérant qu'à grande distance où le champ de gravitation est faible, son expression devient newtonienne. La

composante  $g_{00}$  du tenseur métrique est donnée, dans le cas de l'approximation newtonienne, par (4.22), soit :

$$g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \quad (4.107)$$

Les équations (4.106) et (4.107) donnent la relation :

$$1 + \frac{K}{r} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \quad (4.108)$$

L'expression du potentiel gravitationnel est :  $\Phi = -GM/r$ ,  $M$  étant la masse totale du corps créant le champ. La relation (4.106) nous donne donc pour valeur de la constante d'intégration :

$$K = -\frac{2GM}{c^2} \quad (4.109)$$

8. Le carré de l'intervalle  $ds^2$  permettant de déterminer complètement le champ de gravitation dans le vide créé par une distribution de matière centrale symétrique est donc :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - (2GM/rc^2)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (4.110)$$

Lorsque  $r$  tend vers l'infini, cette métrique devient automatiquement euclidienne.

9. La métrique spatiale est donnée par l'expression de distance spatiale :

$$dl^2 = \frac{1}{1 - (2GM/rc^2)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (4.111)$$

10. À de grandes distances de l'origine des coordonnées, la métrique (4.110) s'écrit :

$$ds^2 = ds_0^2 - \frac{2GM}{rc^2} (dr^2 + c^2 dt^2) \quad (4.112)$$

où  $ds_0$  est l'intervalle euclidien. Pour une distribution de masses quelconques à l'origine, le champ gravitationnel est central symétrique à de grandes distances. Par conséquent, la correction apportée par le dernier terme de l'équation (4.112) s'ajoute à la métrique euclidienne pour n'importe quel système de masses lorsqu'on se trouve à des distances suffisamment grandes.



# Chapitre 5

## Vérifications expérimentales

Trois tests classiques permirent de valider rapidement la théorie einsteinienne. Il s'agit de l'avance du périhélie de Mercure calculée dès 1915 par Einstein, de la déviation des rayons lumineux au voisinage du Soleil en 1919, et du décalage spectral gravitationnel vers le rouge, dans les naines blanches, en 1925.

L'absence d'autres expériences en laboratoire ou d'autres observations astronomiques engendra une certaine désaffection des physiciens pour la recherche en relativité générale jusque dans les années 1960. La découverte de l'effet Mössbauer, en 1958, devait permettre la mesure en laboratoire du décalage spectral d'origine gravitationnel. Le développement d'une astrophysique relativiste permet de nos jours de vérifier la théorie de la relativité générale avec une précision de plus en plus grande.

La découverte fortuite en 1965 du rayonnement fossile des débuts de l'Univers suscita un immense intérêt envers la cosmologie qui commença à se développer sur des bases expérimentales en liaison avec la théorie relativiste. De nombreux laboratoires travaillent actuellement sur les modèles cosmologiques issus de la relativité générale.

### 5.1 Avance du périhélie de Mercure

La trajectoire d'une planète isolée autour du Soleil, déterminée selon la théorie newtonienne, est une ellipse invariable. Cependant, l'observation montre que le périhélie d'une planète (point le plus proche du Soleil au cours de sa trajectoire) se déplace lentement au cours des siècles ; son orbite n'est pas fixe mais tourne lentement dans son plan.

#### 5.1.1 Insuffisance de la théorie newtonienne

Cette perturbation du mouvement elliptique de chaque planète a pour cause divers facteurs : attraction des autres planètes, aplatissement éventuel du Soleil, etc. On peut calculer par la mécanique newtonienne classique, la valeur de l'avance du périhélie due à chacun des facteurs mais on constate qu'il reste un résidu inexplicé.

Plus la planète est proche, plus le résidu est important. Pour Mercure, on observe un résidu de l'avance du périhélie par siècle de  $43.11 \pm 00.45$  secondes d'arc, pour Vénus de  $8.4 \pm 4.8$ , et pour la Terre de  $5.0 \pm 1.2$  secondes.

Ces valeurs sont très petites mais elles furent suffisantes pour que les astronomes les eussent mesurées avec précision et qu'elles leur posassent une énigme.

C'est au 19e siècle que l'astronome Urbain le Verrier (1811-1877) (qui prévit par le calcul l'existence de la planète Neptune, découverte par la suite) établit la théorie de l'orbite de Mercure en tenant compte des perturbations dues à d'autres planètes. Le Verrier nota un petit désaccord entre les observations astronomiques séculaires et ses calculs effectués à partir de la mécanique newtonienne.

### 5.1.2 Mouvement d'une particule dans un champ de Schwarzschild

L'étude du mouvement d'une planète dans le champ de gravitation créé par le Soleil peut être assimilé à celui d'une petite particule qui ne perturbe pas le champ à symétrie centrale sphérique étudié par Schwarzschild. La métrique de l'espace-temps où évolue la particule est celle donnée par (4.50) :

$$ds^2 = A c^2 dt^2 - \frac{1}{A} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (5.1)$$

On a posé :  $A = 1 - \frac{2GM}{rc^2}$ . Dans l'espace-temps considéré, la trajectoire d'une particule est une géodésique donnée par les équations (4.15) :

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\chi \beta}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\chi}{ds} = 0 \quad (5.2)$$

Les symboles de Christoffel sont calculés à partir de la métrique de Schwarzschild (5.1). Écrivons les équations (5.2) pour  $x^2 = \theta$  ; il vient :

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \sin\theta \cos\theta \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0 \quad (5.3)$$

Supposons le mouvement initial tel que :

$$\theta_{s=0} = \frac{\pi}{2} ; \quad \left( \frac{d\theta}{ds} \right)_{s=0} = 0 \quad (5.4)$$

Ces conditions initiales donnent :  $d^2\theta/ds^2 = 0$ . On peut choisir un système de coordonnées tel que les conditions (5.4) restent identiques au cours du mouvement qui s'effectue dans un plan. Les autres caractéristiques de la trajectoire sont fournies par les équations des géodésiques. Pour  $x^0 = ct$  et  $x^3 = \varphi$ , les équations (5.2) ont respectivement pour solutions :

$$A \frac{dt}{ds} = \frac{L}{c^2} ; \quad r^2 \frac{d\varphi}{ds} = \frac{K}{c} \quad (5.5)$$

où  $L$  et  $K$  sont des constantes d'intégration ;  $c$  est la vitesse de la lumière.

Pour  $x^1 = r$ , on va utiliser l'expression de  $ds^2$  donné par (5.1) et éliminer de cette expression  $dt$  et  $ds$  compte tenu de (5.5). Posant  $u = 1/r$ , on obtient une première équation des trajectoires :

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{K^2} + \frac{3GM}{c^2} u^2 \quad (5.6)$$

La première équation (5.5) nous donne :  $dt/ds = L/Ac^2$ . Reportant cette dernière relation dans la seconde équation (5.5), il vient :

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = r^2 \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{ds} = r^2 \frac{d\varphi}{dt} \frac{L}{Ac^2} = \frac{K}{c} \quad (5.7)$$

Reportant la valeur :  $A = 1 - 2GM/rc^2$  dans (5.7), on obtient une seconde équation des trajectoires :

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = \frac{Kc}{L} \left( 1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) \quad (5.8)$$

Les équations (5.6) et (5.8) du mouvement de la particule dans un champ de gravitation à symétrie sphérique sont peu différentes des équations de la mécanique newtonienne qui sont les suivantes :

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{K^2} ; \quad r^2 \frac{d\varphi}{dt} = K \quad (5.9)$$

Les termes supplémentaires qui apparaissent dans les équations de la relativité générale sont très petits lorsque la vitesse de la particule est faible devant  $c$ . C'est le cas pour les mouvements des planètes autour du Soleil ; les équations relativistes des trajectoires montrent que les orbites des planètes sont bien les géodésiques de l'espace-temps riemannien.

### 5.1.3 Avance du périhélie des planètes

Calculons par approximation l'avance séculaire du périhélie des planètes. La solution de la première équation newtonienne (5.9) est :

$$u_0 = \frac{GM}{K^2} [1 + e \cos(\varphi - \bar{\omega})] \quad (5.10)$$

Les paramètres  $e$  et  $\bar{\omega}$  sont des constantes d'intégration. Elles représentent respectivement l'excentricité de l'orbite de la planète et la longitude de son périhélie. Si  $a$  est la demi longueur du grand axe de la trajectoire elliptique, on a :

$$K^2 = GMa(1 - e^2) \quad (5.11)$$

Calculons, par approximations successives, une solution de l'équation relativiste (5.6). Pour cela, substituons la solution (5.10), qui est une solution approchée de (5.6), dans le terme supplémentaire que fait intervenir cette dernière équation. On obtient :

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u \simeq \frac{6M^3G^3}{c^2K^2} e \cos(\varphi - \bar{\omega}) \quad (5.12)$$

Les autres termes ne sont pas retenus car ils apportent une contribution négligeable. L'équation (5.12) admet comme solution particulière :

$$u_1 = \frac{3G^3M^3}{c^2K^4} e \varphi \sin(\varphi - \bar{\omega}) \quad (5.13)$$

Une solution de seconde approximation peut être formée par la superposition des solutions  $u_0$  et  $u_1$  ; on obtient :

$$u = u_0 + u_1 = \frac{GM}{K^2} [1 + e \cos(\varphi - \bar{\omega} - \delta\bar{\omega})] \quad (5.14)$$

où l'on a posé :  $\delta\bar{\omega} = 3G^2M^2\varphi/c^2K^2$ . Compte tenu de l'expression de  $K^2$  donnée par (5.11), on a :

$$\delta\bar{\omega} = \frac{3GM}{ac^2(1-e^2)}\varphi \quad (5.15)$$

Lors de la révolution complète d'une planète autour du Soleil, c'est-à-dire pour  $\varphi = 2\pi$ , l'avance du périhélie a donc pour expression :

$$\delta\bar{\omega} = \frac{6\pi GM}{ac^2(1-e^2)} \quad (5.16)$$

En ce qui concerne la planète Mercure, les calculs de mécanique newtonienne compte tenu de l'action perturbatrice des autres planètes, donnent une avance séculaire de 5557 secondes d'arc environ. Or les observations astronomiques montrent que cette avance est en réalité de 5600 secondes d'arc environ. C'est ce résidu  $\delta\bar{\omega}$  de 43 secondes, inexpliqué par la théorie de Newton, dont rend compte la relativité générale.

Dans le cas de Mercure, l'excentricité de son orbite est relativement importante :  $e = 0.2056$ , et son orbite est la plus proche du Soleil, donc  $a$  est la plus faible valeur des demi axes des ellipses planétaires. Le résidu d'avance du périhélie de Mercure est ainsi le plus important des planètes.

L'application de la formule (5.16) conduit à une valeur du résidu d'avance séculaire du périhélie de Mercure égale à 43.15 secondes d'arc. Cette valeur coïncide avec les mesures astronomiques,  $43.11 \pm 0.45$  secondes, compte tenu de leur incertitude expérimentale.

## 5.2 Déviation des rayons lumineux

Le champ de gravitation de Schwarzschild permet également l'étude de la déviation d'un rayon lumineux passant au voisinage du Soleil.

### 5.2.1 Équation de la déviation d'un rayon lumineux

Les trajectoires des rayons lumineux sont également des géodésiques mais celles-ci sont de longueur nulle :

$$ds = 0 \quad (5.17)$$

Cette condition nécessite, selon la seconde équation (5.5), que  $K$  devienne infini. Par conséquent, l'équation des trajectoires (5.6) pour des rayons lumineux se réduit à :

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{3GM}{c^2} u^2 \quad (5.18)$$

Cette dernière équation s'intègre également par approximations successives. La solution de l'équation sans second membre est :

$$u_0 = \frac{1}{R} \cos \varphi \quad (5.19)$$

dans laquelle  $R$  est une constante d'intégration. Substituons cette solution dans le second membre de (5.18). L'équation ainsi obtenue admet la solution particulière :

$$u_1 = \frac{GM}{c^2 R^2} (\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi) \quad (5.20)$$

Une solution de seconde approximation de l'équation (5.18) peut être formée par la superposition des solutions  $u_0$  et  $u_1$ , soit :

$$u = u_0 + u_1 = \frac{1}{R} \cos \varphi + \frac{GM}{c^2 R^2} (\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi) \quad (5.21)$$

Utilisons des coordonnées cartésiennes :  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Avec  $u = 1/r$ , l'équation (5.21) nous donne l'équation des trajectoires :

$$x = R - \frac{GM}{c^2 R} \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (5.22)$$

Le second terme du membre de droite de (5.22) représente une très petite déviation du rayon lumineux par rapport à la droite  $x = R$ . Pour trouver les asymptotes, il suffit de prendre  $y$  très grand par rapport à  $x$ . L'équation (5.22) devient alors :

$$x = R \pm \frac{2GM}{c^2 R} y \quad (5.23)$$

L'angle  $\alpha$  des asymptotes, c'est-à-dire la déviation totale de la lumière à son passage dans le champ de gravitation, est donc :

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 R} \quad (5.24)$$

Une déviation mesurable nécessite la présence d'un champ de gravitation très intense. La première mesure fut réalisée en 1919 en observant la déviation des rayons passant en incidence rasante au voisinage du Soleil.

## 5.3 Décalage gravitationnel de la fréquence d'un rayonnement

Nous avons vu, dans la partie 3.4.2, le calcul du décalage gravitationnel de la fréquence d'un rayonnement électromagnétique dans un champ d'accélération. Par suite du principe d'équivalence, la fréquence subit le même sort dans un champ gravitationnel. Une vérification de ce phénomène a été réalisée à partir de 1925 par l'observation de la lumière émise par des étoiles de très forte densité, les naines blanches.

### 5.3.1 Décalage théorique d'une fréquence

Un champ de gravitation est dit constant s'il est possible de trouver un système de référence tel que toutes les composantes du tenseur métrique ne dépendent plus de la coordonnée temporelle  $x^0$ ; cette dernière sera appelée **temps universel**. Seul le champ créé par un seul corps massif peut être strictement constant. Dans un système qui comporte plusieurs corps, leur attraction gravitationnelle mutuelle engendre un certain mouvement et par la suite le champ dans l'espace-temps n'est plus constant.

À des laps de temps universel  $\Delta x^0$  identiques en différents points de l'espace correspondent cependant des laps  $\Delta\tau$  de temps propre différents. Le laps de temps propre (4.3) qui n'est valable que pour des événements infiniment voisins lorsque le système de référence est quelconque, s'étend, pour le temps universel, à des laps de temps finis arbitraires. On peut donc écrire :

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} \Delta x^0 \quad (5.25)$$

Dans des champs gravitationnels faibles, la composante  $g_{00}$  du tenseur métrique est donnée par (4.22). L'expression (5.25) s'écrit alors :

$$\Delta\tau = \frac{\Delta x^0}{c} \sqrt{1 + \frac{2\Phi}{c^2}} \simeq \frac{\Delta x^0}{c} \left( 1 + \frac{\Phi}{c^2} \right) \quad (5.26)$$

Considérons un rayon lumineux qui se propage dans un champ de gravitation constant. Soit  $\Psi$  la phase de l'onde lumineuse; le quadrivecteur d'onde est tel que :  $k_\alpha = \partial_\alpha \Psi$ . La fréquence mesurée en temps universel  $x^0/c$  est donc égale à :  $\omega_0 = c \partial_0 \Psi$ . Étant donné que l'équation de propagation (4.25) d'un rayon lumineux dans un champ constant ne contient pas  $x^0$  explicitement, la fréquence  $\omega_0$ , mesurée en temps universel, reste constante en tout point du champ le long du rayon lumineux.

Par contre, la fréquence mesurée en temps propre est différente en chaque point de l'espace; elle est égale à :  $\omega = \partial\Psi/\partial\tau$ . La relation (5.25), nous donne :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} = \frac{\partial\Psi}{\partial x^0} \frac{\partial x^0}{\partial\tau} = \frac{\partial\Psi}{\partial x^0} \frac{c}{\sqrt{g_{00}}} \quad (5.27)$$

Avec  $\omega_0 = c\partial_0\Psi$ , la fréquence mesurée en temps propre est égale à :

$$\omega = \omega_0 \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \quad (5.28)$$

Lorsque le champ gravitationnel est faible, la formule (4.22) donne pour limite newtonienne de la fréquence (5.28) :

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) \quad (5.29)$$

Considérons un rayon de lumière émis en un point où le potentiel de gravitation est égal à  $\Phi_1$  et soit  $\omega$  sa fréquence mesurée en temps propre en ce point. Lorsque ce même rayon arrive en un autre point de potentiel de gravitation  $\Phi_2$ , sa fréquence  $\omega'$  mesurée en temps propre au point d'arrivée est égale à :

$$\omega' = \frac{\omega}{1 - (\Phi_1/c^2)} \left(1 - \frac{\Phi_2}{c^2}\right) \simeq \omega \left(1 + \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{c^2}\right) \quad (5.30)$$

Chaque raie de fréquence  $\omega$  d'un rayonnement passant d'un potentiel  $\Phi_1$  à  $\Phi_2$  est ainsi décalée d'un intervalle  $\Delta\omega = \omega' - \omega$  tel que :

$$\Delta\omega = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{c^2} \omega \quad (5.31)$$

Si l'on observe sur la Terre un spectre émis par les étoiles où le potentiel de gravitation  $\Phi_1$  est bien plus intense que sur notre planète où il a une valeur  $\Phi_2$ , on a  $|\Phi_1| > |\Phi_2|$ . Le potentiel  $\Phi$  d'une masse  $M$  a une valeur négative donnée par (4.17). Par suite, le décalage de fréquence (5.31) est négatif et  $\omega' < \omega$  ; ce décalage a lieu vers les petites fréquences, c'est-à-dire vers les grandes longueurs d'onde.

Les longueurs d'onde d'un rayonnement électromagnétique émis par une étoile sont plus grandes mesurées sur Terre que mesurées sur l'étoile ; on a donc un **décalage vers le rouge**.

Un atome situé sur une étoile a les raies du spectre qu'il émet déplacées vers le rouge par rapport aux raies du spectre terrestre qui résulte d'un même atome. Cependant les fréquences des raies spectrales qui seraient mesurées sur l'étoile elle-même sont identiques à celles du spectre terrestre.

### 5.3.2 Mesures du décalage gravitationnel

Les premières tentatives de vérification du décalage gravitationnel furent réalisées en 1925 en observant le rayonnement émis par des étoiles de très forte densité, au moins 50 000 fois celle de l'eau, appelées **naines blanches**. Mais la détermination à la fois du rayon et de la masse de ces étoiles à cette époque n'était pas très précise et les résultats furent controversés.

Ce n'est qu'à partir de 1960 que des mesures faites en laboratoire permirent de vérifier avec suffisamment de précision les valeurs théoriques du décalage gravitationnel. De telles mesures furent possibles grâce à l'apparition de l'effet Mössbauer en 1958.

Rudolf Mössbauer, prix Nobel de physique 1961, a montré que le rayonnement émis par les noyaux excités d'un cristal porté à basse température pouvait être absorbé par résonance par un cristal de même nature. La raie de résonance peut être extrêmement fine. Par exemple, pour la largeur de raie  $\gamma$  émise lors de la transition  $^{67}\text{Ga} \Rightarrow ^{67}\text{Zn}$  à 93 keV, on obtient :  $\Delta\omega/\omega = 5.2 \times 10^{-16}$ . Par conséquent, l'effet Mössbauer permet d'avoir des sources suffisamment mono-chromatiques pour permettre de détecter de très faibles perturbations induites par des variations du champ gravitationnel terrestre.

Les expériences réalisées en 1960 consistèrent à placer la source de photons  $\gamma$  à une hauteur distante d'environ 22 mètres de l'absorbeur situé en bas d'une tour de l'Université de Harvard. La variation du champ de gravitation est extrêmement faible mais la finesse des raies utilisées permit de vérifier l'excellent accord entre les valeurs théoriques de la relativité générale et les résultats expérimentaux.

### 5.3.3 Système de positionnement GPS

L'heure indiquée par des horloges situées à différentes altitudes ne sera pas la même par suite du décalage gravitationnel de l'onde transmise entre les deux horloges. L'amélioration considérable de la stabilité des horloges utilisant des masers a permis dans ce domaine des mesures d'une précision remarquable.

Les masers peuvent être utilisés en oscillateurs hyperfréquences doués d'une très grande pureté spectrale. Le premier maser à molécule d'ammoniac a été inventé en 1954 et présente actuellement surtout un intérêt historique. Par la suite, le maser à hydrogène a permis de réaliser une horloge atomique qui présente la meilleure stabilité de fréquence à court et moyen terme.

Une expérience spectaculaire a consisté, en 1976, à envoyer dans une fusée une horloge constituée d'un maser à hydrogène jusqu'à une altitude de 10 000 km. Pendant toute la durée du vol aller-retour, la fréquence de l'horloge embarquée et celle d'une horloge identique au sol, étaient comparées par l'échange de signaux hertziens. Dans cette expérience, le décalage en fréquence est dû à l'effet gravitationnel et à la dilatation du temps de la relativité restreinte. De plus, un terme correctif doit prendre en compte la rotation de la Terre.

Les résultats obtenus montrèrent que les mesures des écarts en fréquence vérifiaient parfaitement les prévisions de la relativité, tant restreinte que générale.

De nos jours, des effets relativistes du même genre sont testés en permanence par le système de positionnement **Global Positioning System** connu sous le sigle



GPS. Ce système utilise des horloges atomiques embarquées sur des satellites. Il permet de déterminer les positions sur Terre à une dizaine de mètres près et le système européen donne une précision supérieure.

Cette technique de positionnement nécessite une concordance très précise entre les horloges embarquées et terrestres. Or, le décalage accumulé sur 24 heures par une horloge satellitaire serait d'environ 50 microsecondes pour l'effet gravitationnel duquel il faut déduire 10 microsecondes dues à la relativité restreinte, soit un décalage journalier de l'ordre de 40 microsecondes, durée qui est mille fois plus importante que la précision nécessaire. La mise au point de cette technique de positionnement nécessite donc la maîtrise de tous les effets relativistes.

## 5.4 Déclin de l'orbite d'un pulsar double

La meilleure vérification expérimentale de l'existence des ondes gravitationnelles est sans nul doute l'étude faite depuis 1974 sur les variations de l'orbite du pulsar double PSR 1913+16. Celui-ci fut découvert dans notre galaxie par Russel Hulse et Joseph Taylor grâce au radio télescope situé dans l'île de Puerto Rico.

### 5.4.1 Émission radio d'un pulsar

Un pulsar est une étoile à neutrons qui tourne très rapidement sur elle-même. Le champ magnétique du pulsar est très intense en forme de dipôle. La rotation de ce champ magnétique engendre des champs électriques qui arrachent des particules chargées aux calottes polaires de l'étoile à neutrons. Ces particules subissent une accélération conduisant à une émission radio sous forme de deux faisceaux d'une ouverture d'environ 10 degrés, ancrés aux pôles magnétiques. Si l'un des deux faisceaux est orienté de telle sorte qu'il croise la Terre, un radiotélescope le détecte comme une suite d'impulsions régulières à la fréquence qui correspond à la vitesse de rotation du pulsar.

On a mesuré les vitesses de rotation d'environ 600 pulsars connus dans les années 1990. Ils tournent entre 640 tours par seconde et un quart de tour, du plus rapide au plus lent. Le chronométrage des pulsars consiste à mesurer précisément les temps d'arrivées des impulsions reçues par un radiotélescope. Ces mesures ont montré que les pulsars ralentissent lentement et que l'énergie perdue est convertie essentiellement en radiation aux fréquences radio comprises entre 100 et 1000 mégahertz.

### 5.4.2 Pulsars binaires

Les pulsars binaires sont formés de deux étoiles à neutrons en orbite très excentriques avec une période de révolution de quelques heures ; par exemple, les pulsars binaires PSR 1534+12 et PSR 1913+16 ont respectivement pour période 10 et 8 heures.

Un tel système binaire perd de l'énergie sous forme de radiation gravitationnelle attestée par la diminution de la période orbitale mesurée par chronométrage. De plus, les mesures de chronométrage permettent de détecter l'avance du périastre de l'orbite. Cette avance est de 4.22 degrés par an, ce qui est énorme comparé aux mêmes phénomènes dans le système solaire puisque l'avance du périhélie de Mercure n'est que d'environ 43 secondes par siècle.

La dilatation du temps due à la courbure de l'espace-temps associée au fort potentiel gravitationnel des deux étoiles est une autre vérification expérimentale de la relativité générale. Le potentiel gravitationnel d'un pulsar est en effet énorme car une étoile à neutron ayant une masse égale à celle du Soleil, dont le rayon est d'environ 700 000 km à l'équateur, est confinée dans une sphère de seulement 10 km de rayon. La masse volumique au coeur d'une étoile formée d'un superfluide de neutrons dépasse 100 millions de tonnes par centimètre cube et peut peut-être atteindre une densité cent fois plus importante au centre de l'étoile s'il est formé d'un fluide de quarks.

### 5.4.3 Pulsar binaire PSR 1913+16

L'enregistrement des impulsions envoyées par le pulsar PSR 1913+16 a été réalisé depuis 1974. En étudiant les petites variations des impulsions enregistrées durant 15 années, différents phénomènes relativistes en ont été déduits, en particulier la vérification de l'existence d'ondes gravitationnelles.

Les différents paramètres du pulsar binaire résultant des mesures sont également déterminés et sont les suivants : masses des pulsars, l'unité étant la masse du Soleil :  $1.4408 \pm 0.0003$  ;  $1.3873 \pm 0.0003$  ; excentricité :  $e=0.6171338 \pm 0.000004$  ; période orbitale :  $P=0.322997462727$  jour ; taux de variation de la période orbitale :  $dP/dt=(-2.4211 \pm 0.0014) \times 10^{-12}$  s/s.

Le calcul du taux de variation de la période orbitale en partant de la théorie de la relativité générale conduit à des valeurs très précisément égales à celles observées. La figure 5.1 porte en ordonnées les variations cumulées, en secondes, des dates correspondant au périastre, c'est-à-dire au point le plus proche entre les deux pulsars. La parabole en trait plein est celle calculée à partir de la relativité générale et les points sont les mesures. Dans beaucoup de cas, les incertitudes sur les mesures sont inférieures à la largeur de la ligne en trait plein. L'absence des mesures aux alentours de l'année 1995 est due aux travaux d'amélioration des performances du radiotélescope.

## 5.5 Exercices

### 5.5.1 Avance séculaire du périhélie de Mercure

La formule (5.16) donne l'avance du périhélie d'une planète au cours d'une révolution autour du Soleil, à savoir :

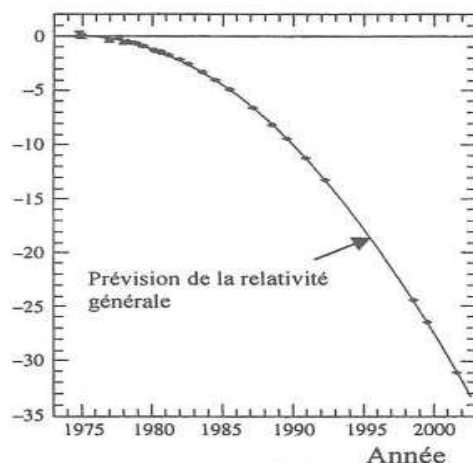


FIGURE 5.1.

$$\delta\bar{\omega} = \frac{6\pi GM}{ac^2(1-e^2)} \quad (5.32)$$

1. La masse du Soleil est :  $M = 1.983 \times 10^{30}$  kg. Calculer, en fonction de l'excentricité et de la demi-longueur du grand axe de l'orbite d'une planète, la quantité  $\delta\bar{\omega}$  en secondes d'arc.
2. Si  $T$  est la durée de révolution de la planète exprimée en jours sidéraux, déterminer l'avance du périhélie réalisée en un siècle en fonction de  $T$ ,  $a$  et  $e$ .
3. On a les données suivantes pour la planète Mercure :  $a = 5.8 \times 10^{10}$  m,  $e = 0.2056$ ,  $T = 87.97$  jours. Calculer l'avance séculaire, en secondes d'arc, du périhélie de la planète Mercure.

## 5.5.2 Correction

1. La constante de gravitation est égale à :  $G = 6.6725 \times 10^{-11}$  m<sup>3</sup>/(kg.s<sup>2</sup>); la masse du Soleil :  $M = 1.983 \times 10^{30}$  kg; la vitesse de la lumière : 299 792 458 m/s. La formule (5.16) donne les valeurs des angles en radians. Il faut donc convertir ces valeurs en secondes d'arc, soit :

$$\delta\bar{\omega} = \frac{6\pi GM}{ac^2(1-e^2)} \frac{360 \times 3600}{2\pi} \quad (5.33)$$

On obtient :

$$\delta\bar{\omega} = \frac{57.34 \times 10^{10}}{a(1-e^2)} \text{ secondes d'arc} \quad (5.34)$$

2. Si  $T$  est la durée de révolution de la planète exprimée en jours sidéraux, l'avance du périhélie  $d\Omega$  réalisée en un siècle sera :

$$d\Omega = \frac{100 T_{\text{Terre}}}{T_{\text{planète}}} d\bar{\omega} = \frac{36525}{a(1-e^2) T_{\text{planète}}} d\bar{\omega} \text{ secondes d'arc} \quad (5.35)$$

3. En portant dans la formule (5.35) les données numériques pour la planète Mercure, on obtient :

$$d\Omega = 42.9 \text{ secondes d'arc} \quad (5.36)$$

Cette valeur correspond sensiblement aux résultats expérimentaux compte tenu de l'incertitude expérimentale.

### 5.5.3 Variation de la période orbitale d'un pulsar binaire

La perte d'énergie par radiation gravitationnelle d'un pulsar binaire conduit à une variation de sa période orbitale que nous allons calculer. Pour simplifier, considérons un pulsar binaire formé par deux masses égales  $M$ , situées à la distance  $2R$ , qui effectuent un mouvement circulaire.

1. On note  $G_b$  la constante de gravitation de chaque masse  $M$  du pulsar. Soit  $V$  la vitesse de chacune des masses par rapport à un référentiel fixe. Écrire l'expression de l'énergie totale  $E$  du système des deux masses en mécanique classique.
2. Déterminer l'expression de la vitesse  $V$  à partir de la mécanique classique.
3. La fréquence de l'onde gravitationnelle  $\omega_b$  est liée à la fréquence de la période orbitale  $P_b$  par :  $\omega_b = 2\pi/P_b$ . Calculer la distance  $R$  en fonction de la période orbitale  $P_b$ . En déduire l'expression de l'énergie totale  $E$  en fonction de la période orbitale.
4. Démontrer la relation  $dE/E = (-2/3) dP_b/P_b$ . En déduire l'expression de la variation de la période  $dP_b/dt$  en fonction du taux de perte d'énergie  $dE/dt$ .
5. Le taux de perte d'énergie par radiation gravitationnelle, calculé à partir de la relativité générale, est donné par :  $dE/dt = 128 G_b \omega_b^6 M^2 R^4 / 5c^5$ .  
En déduire l'expression du taux de variation de la période orbitale  $dP_b/dt$  en fonction de  $P_b$ .

### 5.5.4 Correction

1. L'énergie totale  $E$  du système formé par le pulsar binaire est égale à l'énergie cinétique des deux masses plus leur énergie potentielle, soit :

$$E = M V^2 - \frac{G_b M^2}{2R} \quad (5.37)$$

2. L'équation newtonienne du mouvement conduit à la relation :

$$M \frac{V^2}{R} = \frac{G_b M^2}{(2R)^2} \quad (5.38)$$

d'où :

$$V^2 = \frac{G_b M}{4R} \quad (5.39)$$

3. La fréquence de l'onde gravitationnelle  $\omega_b$  est liée à la fréquence de la période orbitale  $P_b$  par :  $\omega_b = 2\pi/P_b$ . De plus, la vitesse  $V$  est donnée par :  $V = \omega_b R$ . La relation (5.39) nous donne :

$$R = \frac{G_b M}{4V^2} = \frac{G_b M}{4} \left( \frac{2\pi R}{P_b} \right)^{-2} \quad (5.40)$$

soit :

$$R^3 = \frac{G_b M}{16\pi^2} P_b^2 \quad (5.41)$$

L'énergie totale (5.37) s'écrit en substituant l'expression (5.39) de  $V^2$  dans  $E$  ; il vient :

$$E = -\frac{G_b M^2}{4R} \quad (5.42)$$

En remplaçant  $R$  dans l'expression de l'énergie par sa valeur tirée de (5.41), on obtient :

$$E = -M \left( \frac{\pi M G_b}{2} \right)^{2/3} P_b^{-2/3} \quad (5.43)$$

4. En différentiant l'expression (5.43), on obtient :

$$\frac{dE}{E} = -\frac{2}{3} \frac{dP_b}{P_b} \quad (5.44)$$

En divisant par  $dt$  et réarrangeant la relation (5.44), il vient :

$$\frac{dP_b}{dt} = -\frac{3 P_b}{2} \frac{dE}{dt} \quad (5.45)$$

5. Le taux de perte d'énergie par radiation gravitationnelle, calculé à partir de la théorie de la relativité générale, est donné par :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{128 G_b}{5c^5} \omega_b^6 M^2 R^4 \quad (5.46)$$

Reportant cette dernière expression de  $dE/dt$  dans (5.45), on obtient :

$$\frac{dP_b}{dt} = -\frac{48\pi}{5c^5} \left( \frac{4\pi G_b M}{P_b} \right)^{5/3} \quad (5.47)$$

La théorie que l'on vient de développer donne le principe du calcul pour l'étude des variations de la période orbitale d'un pulsar binaire. Pour un pulsar réel donné, il faut tenir compte de l'excentricité de l'orbite suivie par les deux masses ainsi que du fait que ces masses ne seront pas égales entre elles en général.

La formule (5.47) doit alors être multipliée par le facteur suivant qui prend en compte l'excentricité  $e$  d'une orbite elliptique, soit :

$$\alpha = \frac{1 + (73/24) e^2 + (37/96) e^4}{(1 - e^2)^{7/2}} \quad (5.48)$$

D'autre part, pour le pulsar binaire PSR 1913+16, les masses sont légèrement différentes ; on les note  $M_a$  et  $M_b$ . Il faut alors remplacer dans la formule (5.47) la quantité  $(2M)^{5/3}$  par le terme  $\beta = 4 M_a M_b (M_a + M_b)^{-3/2}$ . Compte tenu des masses  $M_a$  et  $M_b$ , on obtient finalement en relativité générale un taux de variation de la période orbitale donné par :

$$\frac{dP_b}{dt} = - \left( \frac{192\pi M_a M_b}{5c^5 (M_a + M_b)^{3/2}} \right) \left( \frac{1 + (73/24) e^2 + (37/96) e^4}{(1 - e^2)^{7/2}} \right) \left( \frac{2\pi G_b}{P_b} \right)^{5/3} \quad (5.49)$$

Compte tenu des paramètres numériques du pulsar binaire PSR 1913+16, on obtient pour valeur théorique :

$$\frac{dP_b}{dt} = -(2.40247 \pm 0.00002) \times 10^{-12} \text{ s/s} \quad (5.50)$$

La valeur observée doit être corrigée pour l'accélération galactique du pulsar binaire qui engendre également une petite variation de la période orbitale, soit :  $(dP_b/dt)_{\text{galactique}} = -(0.0125 \pm 0.0050) \times 10^{-12} \text{ s/s}$ . Le taux de variation corrigé a ainsi pour valeur :

$$\left( \frac{dP_b}{dt} \right)_{\text{corrigé}} = \left( \frac{dP_b}{dt} \right)_{\text{observé}} - \left( \frac{dP_b}{dt} \right)_{\text{galactique}} = -(2.4086 \pm 0.0052) \times 10^{-12} \text{ s/s} \quad (5.51)$$

On obtient une excellente vérification de la prévision théorique (5.50). De plus, ce phénomène de diminution de la période orbitale confirme l'existence des ondes gravitationnelles que prédit la relativité générale.