

---

# BmyOGG - Building and modeling your Own GPU Galaxy

---

Manuel Utilisateur

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Caractéristiques</b>	<b>3</b>
1.1 Historique . . . . .	3
1.2 La voie Lactée . . . . .	3
1.3 Classification des galaxies . . . . .	3
1.4 Galaxies spirales . . . . .	4
1.5 Galaxies elliptiques . . . . .	5
<b>2 Modélisation</b>	<b>6</b>
2.1 Modèle de Springel-Hernquist . . . . .	6
2.1.1 Halo de matière noire . . . . .	6
2.1.2 Disque . . . . .	7
2.1.3 Combinaison du Disque et du Halo . . . . .	7
2.2 Génération des positions initiales . . . . .	8
2.2.1 Méthode de rejet - Von-Neumann . . . . .	8
2.2.2 Démonstration de la méthode de rejet . . . . .	9
2.2.3 Méthode MCMC (Markov Chain Monte Carlo) . . . . .	9
2.2.3.1 Chaîne de Markov . . . . .	10
2.2.3.2 Algorithme . . . . .	11
2.2.4 Halo de matière noire . . . . .	11
2.2.5 Résultats . . . . .	12
2.2.6 Disque . . . . .	14
2.2.7 Résultats . . . . .	14
2.3 Génération des vitesses initiales . . . . .	18
2.3.1 Première méthode - Vitesse circulaire locale . . . . .	18
2.3.2 Deuxième méthode - Dispersion statistique . . . . .	18
2.3.2.1 Équation de Boltzmann sans collision . . . . .	18
2.3.2.2 Équation de Jeans . . . . .	20
2.3.2.3 Cas du disque . . . . .	21
2.3.2.4 Cas du halo de matière noire . . . . .	21
<b>Bibliographie</b>	<b>22</b>

# Introduction

Ce projet porte sur la modélisation et la simulation numérique de la dynamique d'une galaxie grâce à un code N-Body GPU/OpenCL. L'interface est réalisée avec le framework Qt et le rendu graphique par le biais des VBO (Vertex Buffer Object) OpenGL. Ci-dessous sur la figure 1 une image montrant un exemple de conditions initiales générées pour une galaxie à disque; en bleu est représentée la matière noire et en blanc les particules de matière dite "classique", c'est-à-dire un agrégat d'étoiles. Les conditions initiales pour les positions et les vitesses sont générées via le modèle de Springel-Hernquist avec un halo massif de matière noire et un disque stellaire.

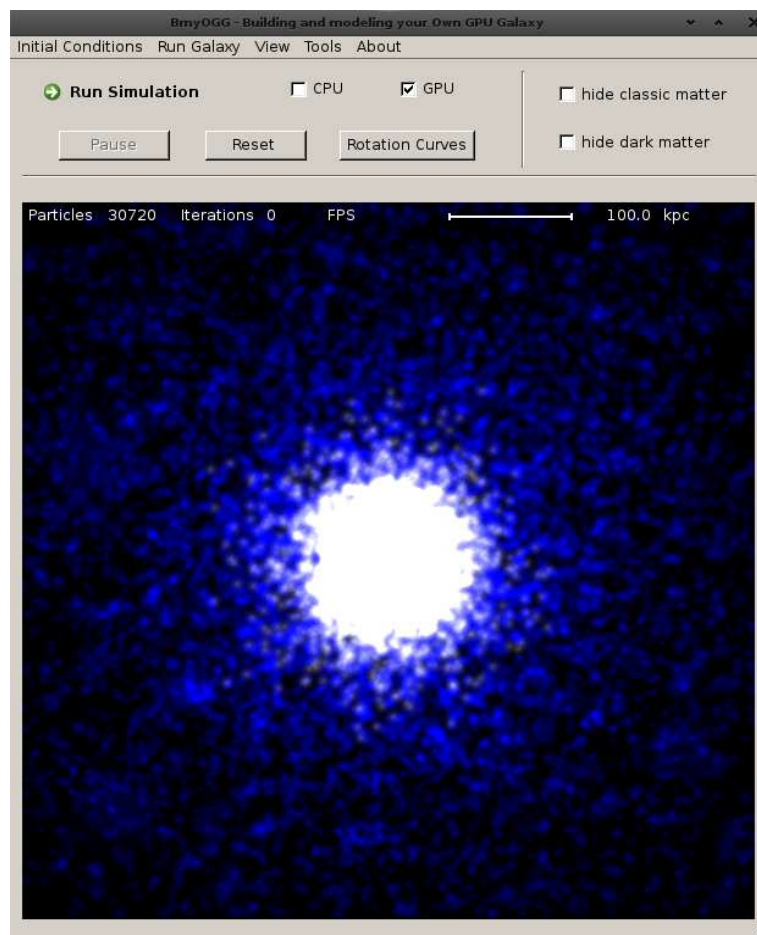


FIGURE 1 – Exemple de conditions initiales générées pour une galaxie à disque

Après une courte introduction sur les principales caractéristiques des galaxies, nous aborderons dans le chapitre 2 les différents modèles théoriques ainsi que les outils numériques nécessaires pour accomplir ces simulations sur les deux types principaux de galaxies : spirale et elliptique

# Chapitre 1

## Caractéristiques

### 1.1 Historique

Les galaxies ne sont connues en tant que mondes à part équivalents à notre Voie Lactée que depuis le début du 20<sup>ème</sup> siècle. Hubble, en 1924, parvint à résoudre la "nébuleuse" d'Andromède en étoiles, et à prouver ainsi qu'il s'agit d'une autre galaxie et non d'une nébuleuse de gaz comme celle d'Orion qui doit son éclat au rayonnement de l'hydrogène ionisé.

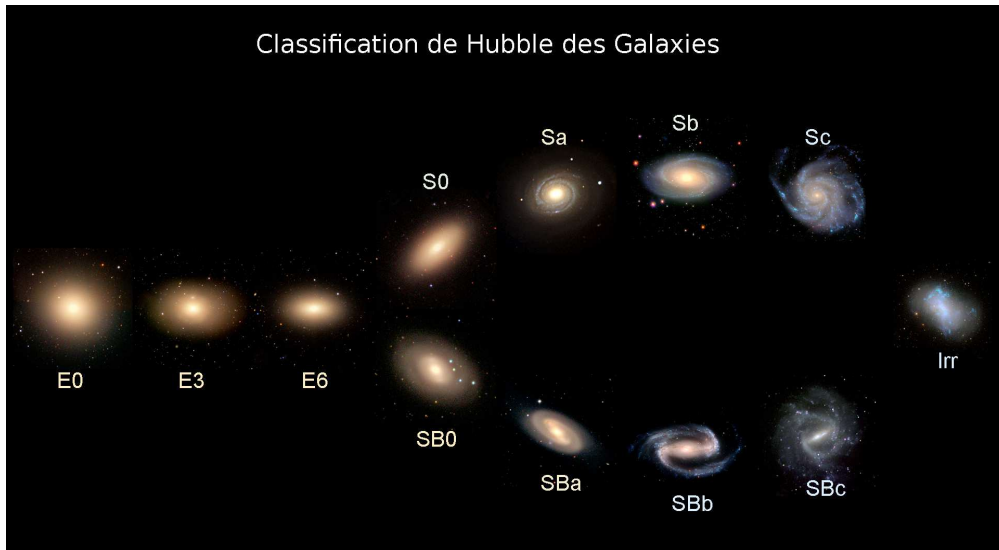
### 1.2 La voie Lactée

Une galaxie est un gigantesque amas d'étoiles, de poussières et de gaz. Notre Voie Lactée contient approximativement 100 milliards d'étoiles. C'est une galaxie spirale, véritable disque mince en rotation, d'un diamètre environ égal à 30 kpc ( $1 \text{ pc} = 3.26 \text{ a.l.}$ ) et d'une épaisseur de l'ordre de 1 kpc. La densité moyenne d'étoiles est alors égale à 0.1 étoile par  $\text{pc}^3$ .

Le gaz interstellaire ne représente aujourd'hui qu'une faible fraction de la masse totale des galaxies, de l'ordre de 10 % dans les galaxies spirales. Pourtant c'est à partir du gaz que se sont formées et se forment encore actuellement les étoiles. Ce gaz est essentiellement de l'hydrogène, sous forme atomique ou moléculaire ou encore parfois ionisé, mélangé à de l'hélium (25 % en masse), et à d'autres éléments.

### 1.3 Classification des galaxies

Les principaux types morphologiques sont représentés par le célèbre "diapason" de Hubble sur la figure ci-dessous ; les galaxies sont séparées en trois classes principales : elliptiques (E), spirales (S) et irrégulières (Irr). Les spirales se composent de deux familles, les spirales dites "normales" et les spirales barrées (SB), et se divisent en outre en types Sa, Sb, Sc qui correspondent plutôt à une évolution graduelle qu'à des classes bien distinctes. De gauche à droite sur le diapason de Hubble, le disque inexistant dans les elliptiques, prend de l'importance, de même que la proportion de gaz et d'étoiles jeunes. Les galaxies lenticulaires (SO) sont un intermédiaire entre les spirales et les elliptiques. Environ 2/3 des galaxies sont spirales, l'autre tiers se partageant essentiellement entre 10 % d'elliptiques et 20 % de lenticulaires. Les irrégulières ne constituent que quelques pour cent. Voici ci-dessous la classification de Hubble :

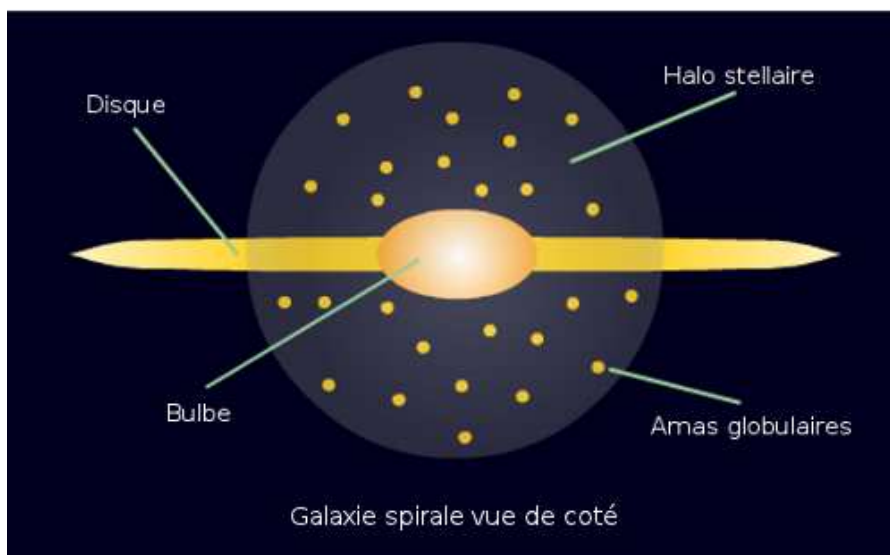


## 1.4 Galaxies spirales

Les galaxies spirales (S) doivent leur appellation bien sûr aux spectaculaires bras spiraux qui s'enroulent dans un disque très mince : ces structures sont très aplaties comme le montrent certains spécimens vus par la tranche ; leur rapport d'axes peut aller jusqu'à 100 ! Les bras spiraux rejoignent vers le centre le composant le plus brillant, le bulbe, dont la forme est ellipsoïdale et bien moins aplatie que le disque ; c'est le bulbe qui est à l'origine de la forme renflée au centre d'une galaxie spirale vue de profil. Dans les galaxies spirales barrées (SB), le noyau est traversé par une barre d'étoiles, aux extrémités de laquelle débutent les bras spiraux. Ceux-ci sont en général moins enroulés : on parle de spirale ouverte.

La séquence de Hubble, de Sa (dit type "précoce" ou "early") vers Sc (type plus "tardif" ou "late"), est constituée selon plusieurs critères :

- importance relative du bulbe, le rapport de taille bulbe/disque décroît régulièrement de Sa vers Sc.
- résolution et proéminence des bras spiraux
- présence de gaz et de poussières, de régions ionisées et d'étoiles jeunes qui s'accroît régulièrement vers Sc.



Dans les bras spiraux se forment de nombreuses jeunes étoiles, ce qui leur donne cette couleur bleue caractéristique. A l'inverse, le bulbe contient des étoiles âgées (de couleur rouge). Il est admis aujourd'hui que dans la plupart des galaxies, le bulbe contient en son centre un trou noir supermassif de l'ordre de plusieurs millions de masse solaire. Le halo stellaire se compose d'amas globulaires, c'est-à-dire des amas d'étoiles isolées et vieilles. Il représente entre 10 et 30 % de la masse totale du disque.

## 1.5 Galaxies elliptiques

Les galaxies elliptiques (E) sont des concentrations de forme quasi-sphérique de milliards d'étoiles. Elles nous apparaissent en projection sur le ciel comme des ellipses plus ou moins aplaties. Le rapport des axes (a et b) varie de 1 à 3 seulement, l'ellipticité e définie par  $e=(a-b)/a$  (a étant le grand axe) varie donc de 0 à 0.7. Les elliptiques sont classées par un indice qui vaut  $10e$  (de E0 à E7). Les galaxies les plus massives que l'on connaisse sont des galaxies elliptiques, qui sont en grande majorité plus lumineuses que les spirales. Il existe pourtant une classe de galaxies elliptiques naines, en général compagnons de galaxies plus grosses. Les galaxies elliptiques n'ont pas de sous-structures particulières, ce qui entraîne des mouvements d'étoiles aléatoires contrairement aux galaxies spirales. Leur luminosité décroît très régulièrement du centre au bord. Elles ne possèdent pas ou très peu de gaz, mais des étoiles de population relativement vieille, et des amas globulaires, qui ne sont que de très vieux amas d'étoiles. Hubble qualifiait ces galaxies de "précoces", pensant qu'elles étaient le stade antérieur dans l'évolution vers une forme spirale. Aujourd'hui, les astrophysiciens pensent au contraire qu'elles sont le résultat de la fusion de deux galaxies spirales

# Chapitre 2

## Modélisation

### 2.1 Modèle de Springel-Hernquist

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, le modèle de Springel-Hernquist permet de produire des conditions initiales (positions et vitesses) pour 2 types de particules, celles du halo massif de matière noire et celles du disque stellaire. Dans ce modèle, le milieu interstellaire ainsi que le bulbe ne sont pas pris en compte.

#### 2.1.1 Halo de matière noire

La densité de matière noire s'écrit :

$$\rho(r) = \frac{M_{DM}}{2\pi} \frac{a}{r} \frac{1}{(r+a)^3} \quad (2.1)$$

où  $M_{DM}$  est la masse totale de la matière noire. Le paramètre  $a$  dépend de la longueur d'échelle du halo,  $r_s$ , et de la concentration du halo,  $c = r_{200}/r_s$ , du profil NFW [Springel et al., 2005] :

$$a = r_s \sqrt{2[(\ln(1+c) - c/(1+c))]} \quad (2.2)$$

La distribution de masse est décrite par :

$$M(r) = \frac{M_{DM} r^2}{(r+a)^2} \quad (2.3)$$

et le potentiel gravitationnel par [Hernquist, 1990] :

$$\Phi = -\frac{GM}{r+a} \quad (2.4)$$

La vitesse circulaire locale s'écrit :

$$v_c^2(r) = r \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{GM r}{(r+a)^2} \quad (2.5)$$

La masse totale de la matière noire est calculé en reliant la vitesse virielle à la masse virielle du profil NFW [Springel and White, 1999] :

$$M_{200} = \frac{v_{200}^3}{10GH} \quad (2.6)$$

et  $r_{200}$  est donné par :

$$r_{200} = \frac{v_{200}}{10H} \quad (2.7)$$

Nous pouvons donc calculer  $r_s$  à partir de la concentration  $c$  et en déduire ainsi le paramètre  $a$ .

## 2.1.2 Disque

Le disque est modélisé avec la densité suivante :

$$\rho_d(R, z) = \frac{\Sigma(R)}{2 z_0} \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad \text{avec} \quad \operatorname{sech}(z) = (\cosh(z))^{-1} = \frac{2}{e^z + e^{-z}} \quad (2.8)$$

et

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 e^{-R/R_d} = \frac{M_d}{2\pi R_d^2} e^{-R/R_d} \quad (2.9)$$

$M_d$  est masse du disque,  $R_d$  est son échelle de longueur du disque, et  $z_0$  son épaisseur.

Nous supposons que la vitesse locale circulaire correspond à la vitesse circulaire d'un disque purement exponentiel :

$$v_c^2(R) = R \frac{\partial \Phi}{\partial R} = 4\pi G \Sigma_0 \frac{R^2}{4 R_d} \left[ I_0\left(\frac{R}{2 R_d}\right) K_0\left(\frac{R}{2 R_d}\right) - I_1\left(\frac{R}{2 R_d}\right) K_1\left(\frac{R}{2 R_d}\right) \right] \quad (2.10)$$

où  $I$  et  $K$  sont les fonctions de Bessel cylindriques régulières respectivement de première et seconde espèce.

Le potentiel du disque est calculé grâce à une méthode de maillage dont la routine est issue du travail mené par [Hockney and Eastwood, 1981].

## 2.1.3 Combinaison du Disque et du Halo

Nous utilisons pour cette combinaison les travaux analytiques de [Springel and White, 1999] et de [Mo et al., 1998].

Dans ce modèle, 4 hypothèses sont faites sur la nature du disque. Tous les disques sont supposés être exponentiels et dynamiquement stables par rapport à la formation de barres. Les 2 autres hypothèses concernent le moment cinétique et la masse du halo et du disque :

$$J_d = j_d J_{DM} \quad (2.11)$$

$$M_d = m_d M_{DM} \quad (2.12)$$

où  $j_d$  et  $m_d$  sont les rapports du disque par rapport aux quantités globales. [Mo et al., 1998] définit aussi le moment cinétique global du halo par rapport au paramètre de spin :

$$\lambda = \frac{J_{DM} |E|^{1/2}}{G M_{DM}^{5/2}} \quad (2.13)$$

avec, en supposant que les particules sont toutes sur des orbites circulaires :

$$E = -\frac{G M_{DM}^2}{2 r_{200}} f_c \quad (2.14)$$

et :

$$f_c = \frac{c}{2} \frac{1 - 1/(+c)^2 - 2(\ln(1+c))/(1+c)}{[c/(1+c) - \ln(1+c)]^2} \quad (2.15)$$

En utilisant la définition ci-dessus de l'énergie, du paramètre de spin et du moment cinétique, on peut écrire :



$$J_d = M_d R_d v_{200} \int_0^{r_{200}/R_d} e^{-u} u^2 \frac{v_c(R_d u)}{v_{200}} du \quad (2.16)$$

L'équation suivante définit la longueur d'échelle pour le disque :

$$R_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{j_d}{m_d} \right) \lambda r_{200} f_c^{-1/2} f_R(\lambda, c, m_d, j_d) \quad (2.17)$$

avec

$$f_R(\lambda, c, m_d, j_d) = 2 \left[ \int_0^\infty e^{-u} u^2 \frac{v_c(R_d u)}{v_{200}} du \right]^{-1} \quad (2.18)$$

La vitesse circulaire du système est :

$$v_c(r) = \sqrt{v_{c,d}(r)^2 + v_{c,DM}(r)^2} \quad (2.19)$$

Voir la section (2.3) pour plus de détails sur le calcul de la vitesse circulaire.

Pour trouver la longueur d'échelle du disque, nous utilisons dans le code la fonction de fit suivante pour  $f_r$  [Mo et al., 1998] :

$$f_R \sim \left( \frac{(j_d/m_d) \lambda}{0.1} \right)^{-0.06+2.71 m_d+0.0047/[(j_d/m_d)\lambda]} (1-3m_d+5.2m_d^2) (1-0.019c+0.00025c^2+0.52/c) \quad (2.20)$$

Connaissant maintenant la longueur d'échelle, le paramètre du halo  $a$  et les autres paramètres définis par l'utilisateur, nous pouvons construire un modèle.

## 2.2 Génération des positions initiales

Nous devons à présent générer les positions initiales qui suivent les fonctions de densité de probabilité (pdf) du halo de matière noire et du disque stellaire. Si la fonction de répartition est inversable, nous pouvons nous servir la méthode de la transformée inverse ; Nous allons cependant implémenter 2 méthodes plus générales, celle de la méthode de rejet (appelée aussi méthode de Von-Neumann) et celle utilisant l'algorithme de Metropolis-Hastings.

### 2.2.1 Méthode de rejet - Von-Neumann

Soit  $f$  une fonction de densité de probabilités. On suppose qu'il existe une densité de probabilités  $g$  telle que :

$$\exists K > 0, \forall x \in \mathbb{R} f(x) \leq K g(x) \quad (2.21)$$

Soit alors  $Z$  suivant la loi de densité  $g$ , et  $Y \sim \mathcal{U}([0; Kg(Z)])$ . Alors la variable aléatoire  $X = \{Z | Y \leq f(Z)\}$  suit la loi de densité  $f$ . L'algorithme a donc la forme suivante :

---

**Algorithme** Méthode du rejet - Génération de la v.a  $X$  suivant  $f_X$ 

---

**Input:** On suppose  $f$ ,  $g$  et  $K$  connus.On tire  $X$  suivant la loi de  $g$  et  $Y \sim \mathcal{U}([0; Kg(Z)])$ **if**  $Y \leq f(X)$  **then** on garde  $X$ **else** on tire un nouveau couple  $(X, Y)$  jusqu'à ce que  $Y \leq f(X)$ **end if**

---

Dans la pratique, avec  $g(Z)$  une loi uniforme égale à  $g(Z) = \frac{1}{b-a}$ , nous prenons  $K = (b-a) f_{max}$ .

## 2.2.2 Démonstration de la méthode de rejet

On va démontrer l'égalité suivante :  $\mathbb{P}(X \leq x_0 | Y \leq f(X)) = F(x_0)$ 

$$\mathbb{P}(X \leq x_0 | Y \leq f(X)) = \frac{\mathbb{P}[(X \leq x_0) \cap (Y \leq f(X))]}{\mathbb{P}(Y \leq f(X))} \quad (2.22)$$

Or,

$$\mathbb{P}[(X \leq x_0) \cap (Y \leq f(X))] = \int_{-\infty}^{x_0} \mathbb{P}[Kg(x)U \leq f(x)] g(x) dx \quad (2.23)$$

$$= \int_{-\infty}^{x_0} \mathbb{P}\left[U \leq \frac{f(x)}{Kg(x)}\right] g(x) dx \quad (2.24)$$

$$= \int_{-\infty}^{x_0} \frac{f(x)}{Kg(x)} g(x) dx = \frac{F(x_0)}{K} \quad (2.25)$$

et d'autre part, on a :

$$\mathbb{P}(Y \leq f(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}[Kg(x)U \leq f(x)] g(x) dx = \frac{1}{K} \quad (2.26)$$

D'où le résultat voulu. L'égalité (2.26) nous indique le pourcentage de cas favorables sur le nombre total de tirages :

$$\mathbb{P}(U \leq f(x)/(Kg(x))) = \frac{1}{K} \quad (2.27)$$

**Remarque importante :** La forme initiale de cette méthode ne fixe pas à l'avance le nombre de points de notre échantillon. Dans l'algorithme de BmyOGG, nous ferons en sorte que le nombre de positions générées soit égal au nombre de tirages aléatoires. Pour cela, nous itérerons l'indice  $i$  de la  $i$  - ème position produite seulement sur les cas favorables. Néanmoins, le choix de  $K$  est nécessaire et doit être fait de manière judicieuse car il permet d'avoir une très bonne estimation du taux de cas favorables et ainsi d'évaluer la rapidité avec laquelle l'algorithme a produit l'échantillon.

## 2.2.3 Méthode MCMC (Markov Chain Monte Carlo)

Cette méthode MCMC (Markov Chain Monte Carlo) définit une chaîne de Markov dont la distribution stationnaire est la distribution de probabilité à échantillonner.

### 2.2.3.1 Chaîne de Markov

Afin de mieux comprendre l'algorithme de Metropolis-Hastings qui implémente cette méthode MCMC, nous rappellons brièvement le concept de chaîne de Markov :

**Définition** : Une chaîne de Markov est un processus stochastique tel que :

$$P(X_{n+1} = x | X_n = x_n, \dots, X_1 = x_1) = P(X_{n+1} = x | X_n = x_n) \quad (2.28)$$

De manière intuitive, on peut voir qu'un processus Markovien ne dépend que de l'état précédent. On démontre que ce processus, sous certaines conditions (voir ci-dessous), converge asymptotiquement vers une distribution stationnaire unique  $\pi(x)$ .

Une chaîne de Markov est définie par ses probabilités de transition, c'est-à-dire la probabilité  $P(x \rightarrow x')$  de passer d'un état  $x$  à  $x'$ . Ce processus a une distribution stationnaire  $\pi(x)$  quand les 2 conditions suivantes sont réunies :

- Existence d'une distribution stationnaire : ceci est garanti par le fait que chaque transition  $x \rightarrow x'$  est réversible ; autrement dit, on vérifie :  $\pi(x) P(x \rightarrow x') = \pi(x') P(x' \rightarrow x)$ .
- Unicité de la distribution stationnaire : garantie par le critère d'ergodicité du processus Markovien.

L'algorithme de Metropolis construit une chaîne de Markov qui remplit les 2 conditions ci-dessus et telle que la distribution stationnaire  $\pi(x)$  corresponde à  $P(x)$ . La réversibilité de cette chaîne peut aussi s'écrire :

$$\frac{P(x \rightarrow x')}{P(x' \rightarrow x)} = \frac{P(x')}{P(x)} \quad (2.29)$$

Une approche commune est de séparer les transitions en 2 étapes, celle de la proposition et celle de l'acceptation/rejet :

La distribution de proposition  $g(x \rightarrow x')$  est la probabilité conditionnelle de proposer un état  $x'$  sachant  $x$ , et la distribution d'acceptation  $A(x \rightarrow x')$  est la probabilité conditionnelle d'accepter l'état proposé  $x'$  sachant  $x$ . Il suit :

$$P(x \rightarrow x') = g(x \rightarrow x') A(x \rightarrow x') \quad (2.30)$$

ce qui donne avec (2.29) :

$$\frac{A(x \rightarrow x')}{A(x' \rightarrow x)} = \frac{P(x') g(x' \rightarrow x)}{P(x) g(x \rightarrow x')} \quad (2.31)$$

La prochaine étape consiste à choisir une acceptation qui vérifie l'équation (2.31). Un choix usuel est donné par :

$$A(x \rightarrow x') = \min\left(1, \frac{P(x') g(x' \rightarrow x)}{P(x) g(x \rightarrow x')}\right) \quad (2.32)$$

Dans cette méthode, la distribution de proposition est à choisir ; en pratique, nous choisirons une distribution uniforme.

Supposons que la dernière valeur échantillonnée soit  $x_t$ . Il suit, grâce à la symétrie de la distribution de proposition :

$$\frac{g(x' \rightarrow x)}{g(x \rightarrow x')} = 1 \quad (2.33)$$

En prenant :

$$a = \frac{P(x')}{P(x_t)} \quad (2.34)$$

le nouvel état  $x_{t+1}$  sera alors choisi de la manière suivante :

### 2.2.3.2 Algorithme

---

**Algorithme** Metropolis-Hastings

---

**Input:** On part d'une valeur initiale  $x_t$

On tire une nouvelle valeur  $x'$

On calcule  $a = \frac{P(x')}{P(x_t)}$

**if**  $a \geq 1$  **then**  $x_{t+1} = x'$   
**else**

$$x_{t+1} = \begin{cases} x' & \text{avec une probabilité } a \\ x_t & \text{avec une probabilité } 1 - a \end{cases}$$

**end if**

---

### 2.2.4 Halo de matière noire

En partant de la définition de la densité volumique  $\rho(r)$ , nous pouvons relier la différentielle de probabilité à la différentielle de masse par la normalisation suivante :

$$dP = \frac{dm}{M_{total,DM}} \quad \text{avec} \quad dm = 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad (2.35)$$

avec  $M_{total,DM}$  la masse totale du halo. Prenons l'exemple d'une distribution de densité comme celle d'Hernquist (voir eq(2.1)).

La fonction de répartition s'écrit :

$$\begin{aligned} P(R \leq r) &= \int_0^r \frac{dm}{M_{total,DM}} = \int_0^r 4\pi r'^2 \frac{1}{M_{total,DM}} \frac{M_{total,DM}}{2\pi} \frac{a}{r'} \frac{1}{(r' + a)^3} dr' \\ &= \int_0^r \frac{2a r'}{(r' + a)^3} dr' = \frac{r^2}{(r + a)^2} \end{aligned} \quad (2.36)$$

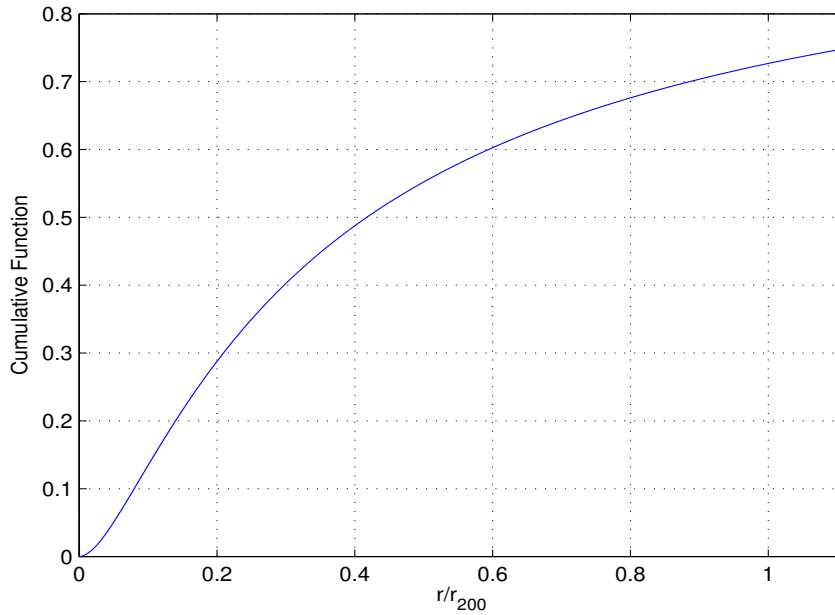


FIGURE 2.1 – Fonction de répartition avec  $c = 10$ ,  $v_{200} = 160 \text{ km.s}^{-1}$ ,  $a = 38.97 \text{ kpc}$

La figure 2.1 montre cette solution avec  $c = 10$ ,  $v_{200} = 160 \text{ km.s}^{-1}$ ,  $r_{200} = v_{200}/10H = 225.35 \text{ kpc}$ ,  $r_s = 22.53 \text{ kpc}$  et donc  $a \simeq 1.73 r_s = 38.97 \text{ kpc}$ .

## 2.2.5 Résultats

Nous utilisons pour ces résultats la méthode de rejet, dans sa seconde forme, c'est-à-dire quand le nombre de positions générées est égal au nombre de tirages (voir **Remarque** au 2.2.2). La figure 2.2 représente la distribution obtenue (de taille  $10^6$ ) :

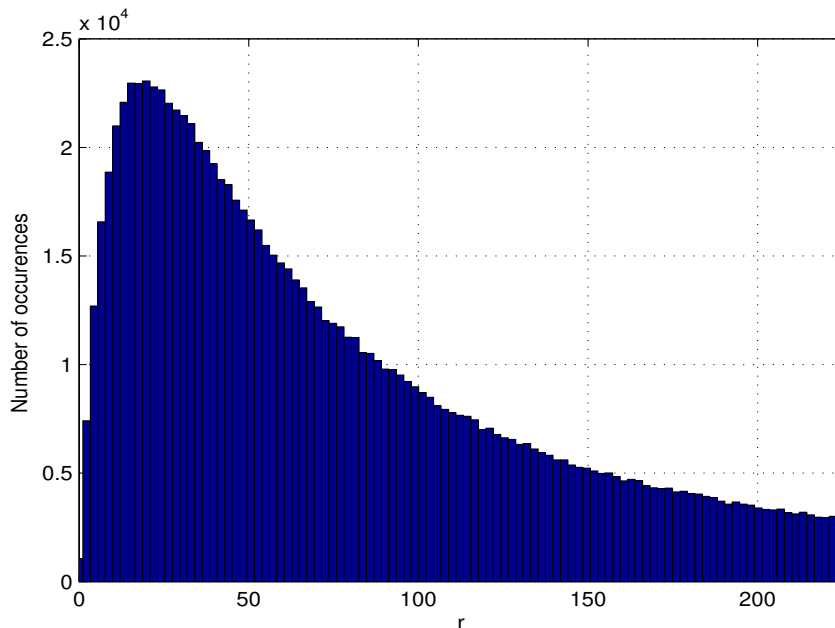


FIGURE 2.2 – Histogramme de distribution du halo de matière noire de taille  $10^6$

Voici le code Matlab permettant de produire cet échantillon :

```

1  %%% Von Neumann Random Sampling for Halo %%%
2
3  %%% Number of random
4  nmax=1000000;
5  %%% a parameter
6  a=38.97;
7  %%% Virial radius
8  r200=225.35;
9  %%% fmax=8/(27*a) got for r=a/2
10 fmax=8/(27*a);
11 %%% Pdf to follow
12 f=@(r) 2*a.*r./(r+a).^3;
13 %%% Main loop %%%
14 %%% i : total number of cases
15 %%% j : number of favorable cases
16 i=0;
17 j=1;
18 k=0;
19 while(j<=nmax)
20     x=r200*rand(1);
21     fval=f(x);
22     y=fmax*rand(1);
23     i=i+1;
24     if(y<fval)
25         xval(j)=x;
26         j=j+1;
27     else
28         k=k+1;
29     end
30 end
31 %%% Plot hist
32 figure(1);
33 hist(xval,0:2.2:r200);
34 grid on;
35 xlabel('r');
36 xlim([0 r200]);
37 ylabel('Number of occurrences');
38 %%% disp biased value
39 disp('1/K biased value');
40 disp(r200^2/(a+r200)^2*1/(r200*fmax));
41 %%% disp favorable cases
42 disp('Favorable cases proportion');
43 disp(1-k/i);

```

En remarquant pour ce profil que  $f_{max} = \frac{8}{27a}$  pour  $r = a/2$ , il suffit de prendre pour  $K$  :

$$K = r_{200} f_{max} = 225 \times 0.0076 = 1.71 \quad (2.37)$$

Le nombre de cas favorables est biaisé par la valeur de la fonction de répartition en  $r_{200}$  ( $P(R \leq r_{200}) = 0.72$ ). En effet, nous avons d'après la formulation de la méthode du rejet :

$$\mathbb{P}[(X \leq x_0) \cap (Y \leq f(X))] = \frac{F(x_0)}{K} \quad (2.38)$$

Nous pouvons alors déduire qu'en moyenne, nous obtiendrons  $\frac{0.72}{K} = \frac{0.72}{1.71} = 0.42$  de cas favorables, soit 42 %.

Il reste désormais à produire les 2 autres v.a  $\theta$  et  $\phi$ . Nous les distribuons uniformément respectivement sur  $[0, \pi]$  et  $[0, 2\pi]$ ; ainsi nous déduisons les coordonnées initiales  $x, y, z$  des particules de matière noire et nous les injectons dans le code.

## 2.2.6 Disque

Nous suivons le même raisonnement que précédemment pour les positions initiales des particules du disque. La pdf dépend ici des variables  $r$  et  $z$ . On peut écrire :

$$dP = \frac{dm}{M_{total,d}} \quad \text{avec} \quad dm = 2\pi r dr dz \rho(r, z) \quad (2.39)$$

où  $\rho(r, z)$  est égal à (2.8) :

$$\rho_d(r, z) = \frac{M_{tot,d}}{\pi r_d^2} e^{-r/r_d} \frac{1}{4 z_0} \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad \text{avec} \quad \operatorname{sech}(z) = (\cosh(z))^{-1} = \frac{2}{e^z + e^{-z}} \quad (2.40)$$

Étant donné que les v.a  $r$  et  $z$  sont indépendantes, nous pouvons créer les deux distributions indépendamment l'une de l'autre. On peut réécrire (2.39) sous la forme d'un produit de deux pdf :

$$P(R \leq r \cap Z \leq z) = \int_0^r \frac{2r}{r_d^2} e^{-r/r_d} dr \int_0^z \frac{1}{4 z_0} \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{z_0}\right) dz = \int_0^r pdf_r(r) dr \int_0^z pdf_z(z) dz \quad (2.41)$$

## 2.2.7 Résultats

Pour la pdf dépendant de  $r$ , nous utilisons la même méthode que pour le halo de matière noire, celle de rejet; pour cela, nous choisissons pour  $K$ , avec  $r_d = 3$  kpc et  $r_{disk} = 20$  kpc :  $K = (b - a) f_{max} = r_{disk} f(r_d) = 4.9051$ . La proportion de cas favorables est donc :

$$\frac{F(r_{disk})}{K} = \left[ (b - a) f_{max} \right]^{-1} F(r_{disk}) = \left[ r_{disk} f(r_d) \right]^{-1} F(r_{disk}) = \left[ \frac{2 r_{disk}}{r_d} e^{-1} \right]^{-1} F(r_{disk}) = 0.4037 \quad (2.42)$$

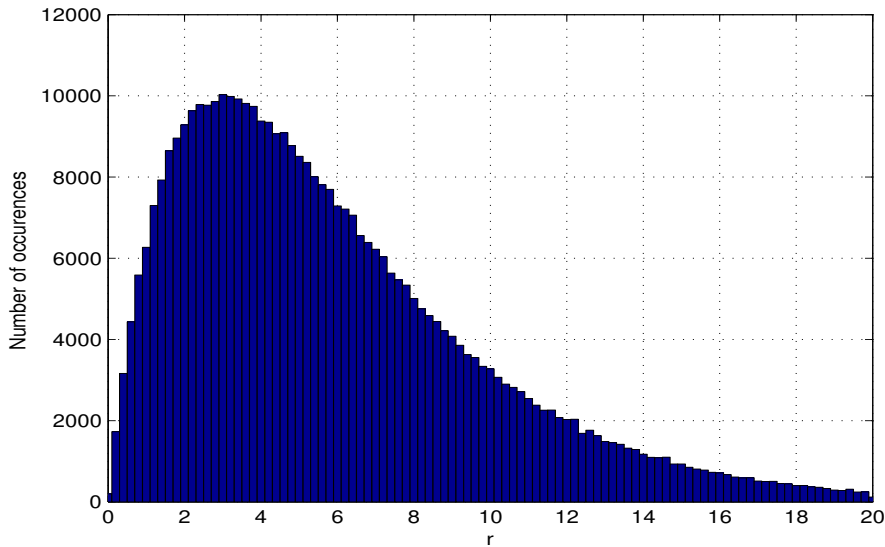


FIGURE 2.3 – Histogramme de distribution pour la partie  $r$  de taille  $10^6$  ( $r_d = 3$  kpc et  $r_{disk} = 20$  kpc)

Sur la figure 2.3 est représenté l'histogramme de la distribution produite.

Voici le code pour produire l'échantillon radial du disque :

```

1  %%% Von Neumann Random Sampling for r part of Disk %%%
2
3  %%% Number of random
4  nmax=1000000;
5  %%% Disk scale length
6  rd=3;
7  %%% Disk radius
8  rdisk=20;
9  %%% fmax
10 fmax=1/rd*exp(-1);
11 %%% Pdf to follow
12 f=@(r) r/rd^2.*exp(-r/rd);
13 %%% Main loop %%%
14 %% i : total number of cases
15 %% j : number of favorable cases
16 i=0;
17 j=1;
18 k=0;
19 while(j<=nmax)
20     x=rdisk*rand(1);
21     fval=f(x);
22     y=fmax*rand(1);
23     i=i+1;
24     if(y<fval)
25         xval(j)=x;
26         j=j+1;
27     else
28         k=k+1;
29     end
30 end
31 %%% Plot hist
32 figure(1);
33 hist(xval,100);
34 grid on;
35 xlabel('r');
36 xlim([0 rdisk]);
37 ylabel('Number of occurrences');
38 %%% disp biased value
39 disp('1/K biased');
40 disp((1-((rd+rdisk)/(rd*exp(rdisk/rd)))/(rdisk*fmax)));
41 %%% disp favorable cases
42 disp('Favorable cases proportion');
43 disp(1-k/i);

```

Faisons de même pour la pdf dépendante de  $z$ . En prenant  $z_0 = 1$  kpc, on a :  $K = z_0 g_{max} = z_0 g(0) = 0.25$ , ce qui donne une proportion de succès :  $\frac{G(z_0)}{K} = \frac{G(z_0)}{z_0 g(0)} = \frac{0.1904}{0.25} = 0.7616$ . Nous obtenons ainsi la figure 2.4 :



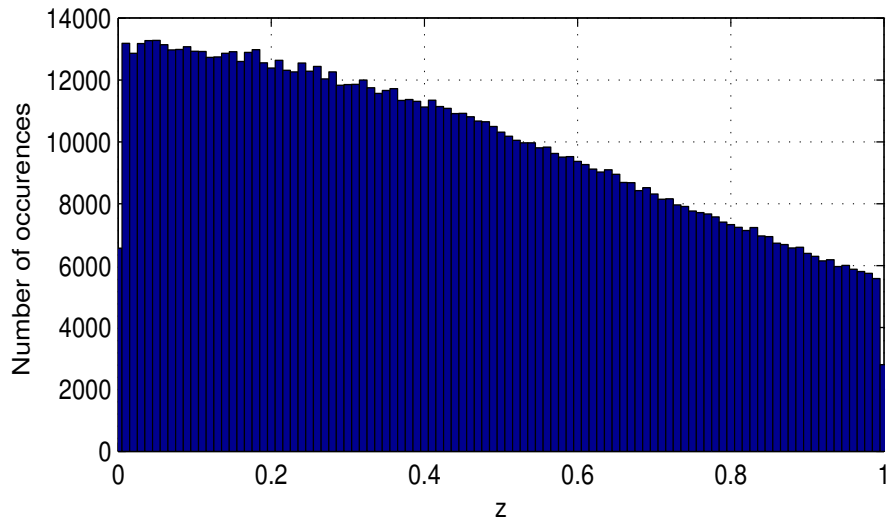


FIGURE 2.4 – Histogramme de distribution pour la partie  $z$  avec un échantillon de taille  $10^6$

et le code Matlab associé pour cette partie en  $z$  :

```

1  %%% Von Neumann Random Sampling for z part of Disk %%%
2
3  %%% Number of random
4  nmax=1000000;
5  %%% Disk scale length
6  z0=1;
7  %%% fmax
8  fmax=1/(4*z0)*(sech(0))^2;
9  %%% Pdf to follow
10 f=@(r) 1/(4*z0).*(sech(r/z0)).^2;
11 %%% Main loop %%%
12 %% i : total number of cases
13 %% j : number of favorable cases
14 i=0;
15 j=1;
16 k=0;
17 while(j<=nmax)
18     z=z0*rand(1);
19     fval=f(z);
20     y=fmax*rand(1);
21     i=i+1;
22     if(y<fval)
23         xval(j)=z;
24         j=j+1;
25     else
26         k=k+1;
27     end
28 end
29 %%% Plot hist
30 figure(1);
31 hist(xval,0:0.01:z0);
32 grid on;
33 xlabel('z');
34 xlim([0 z0]);
35 ylabel('Number of occurrences');
36 %%% disp biased value
37 disp('1/K biased');
38 disp(quad(f,0,z0)/(z0*fmax));

```

```

39 %%% disp favorable cases
40 disp('Favorable cases proportion');
41 disp(1-k/i);

```

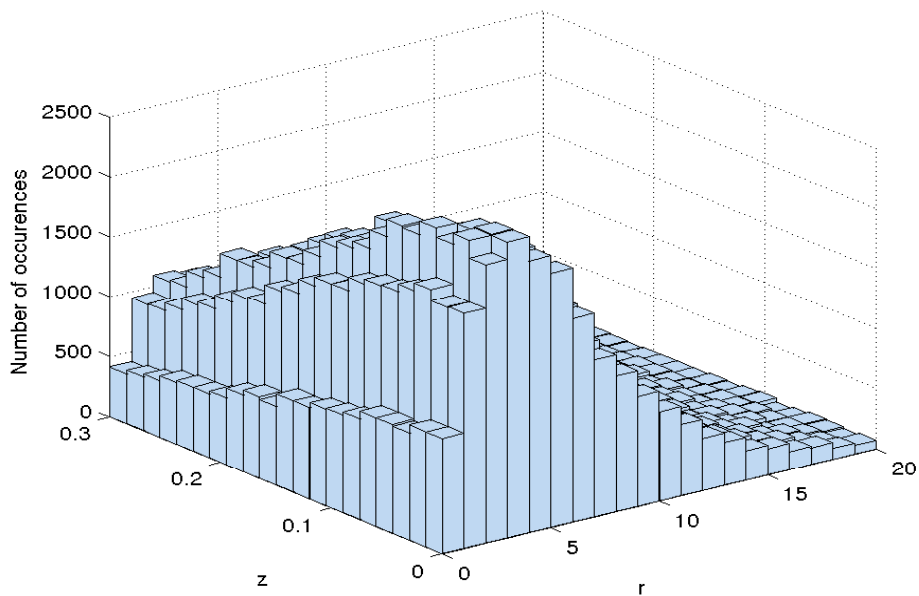


FIGURE 2.5 – Histogramme de la distribution du couple  $(r, z)$  de taille  $10^6$

Combinons le produit des deux pdf qui donne une distribution du couple  $(r, z)$ . Nous obtenons, avec  $z_0 = 0.3$ , les deux figures 2.5 et 2.6.

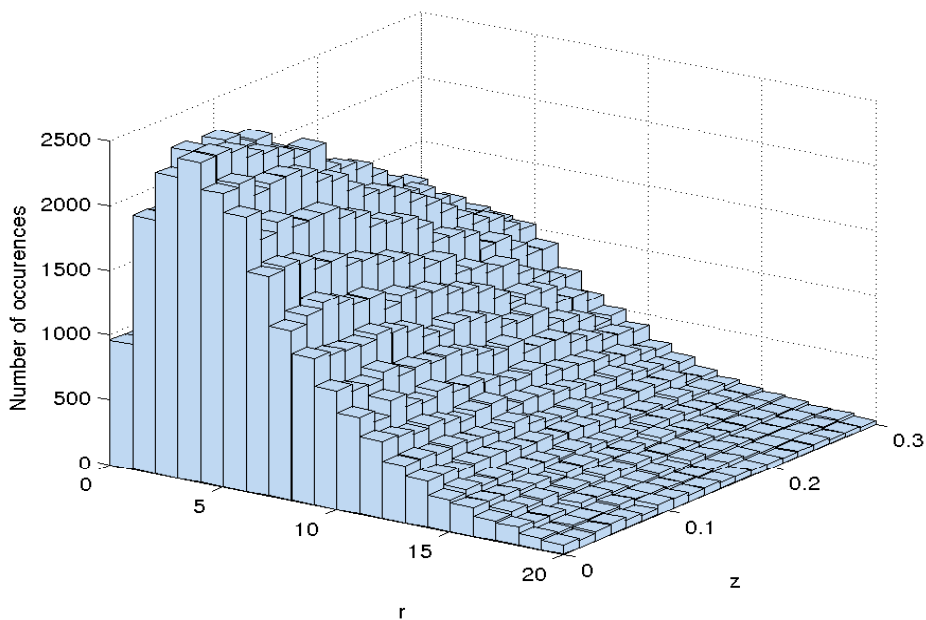


FIGURE 2.6 – Histogramme de la distribution du couple  $(r, z)$  de taille  $10^6$

## 2.3 Génération des vitesses initiales

Après avoir produit les positions, nous nous intéressons dans cette section aux vitesses initiales. Deux choix s'offrent à nous : utiliser directement la vitesse circulaire locale ou calculer la dispersion statistique des vitesses et échantillonner selon une loi normale. Le programme permet à l'utilisateur de choisir l'une des deux. La première méthode est la plus simple à mettre en place tandis que la seconde est la plus précise.

### 2.3.1 Première méthode - Vitesse circulaire locale

Rappelons la formule (2.19) permettant de calculer la vitesse correspondant à un mouvement képlerien :

$$v_c(r) = \sqrt{v_{c,d}(r)^2 + v_{c,DM}(r)^2} \quad (2.43)$$

On fait apparaître les contributions du disque et du halo de matière noire. Dans le cas d'un halo adiabatiquement comprimé,  $v_{c,DM}$  s'écrit :

$$v_{c,DM} = \sqrt{G(M_f(r) - M_d(r))/r} \quad (2.44)$$

avec, [Mo et al., 1998] :

$$M_f(r) = M_d(r) + M(r)(1 - m_d) \quad (2.45)$$

où  $M(r)$  est la masse totale contenue à l'intérieur du rayon  $r$ .

### 2.3.2 Deuxième méthode - Dispersion statistique

Pour calculer les dispersions des vitesses, nous utilisons la méthode décrite dans [Hernquist, 1993] et [Springel and White, 1999]. Faisons tout d'abord un rappel sur les équations régissant la dynamique d'un système à  $N$  corps comme celui d'une galaxie.

#### 2.3.2.1 Équation de Boltzmann sans collision

Les étoiles d'une galaxie, interagissant de manière gravitationnelle entre elles, forment un système dynamique sans collision. On le qualifie de "sans collision" car le mouvement d'une étoile est mieux déterminé par le potentiel gravitationnel global que par les interactions avec les étoiles voisines. Le critère le plus pertinent pour caractériser cette propriété est le temps de relaxation qui correspond à l'échelle de temps au bout de laquelle une étoile est déviée de manière significative de sa trajectoire moyenne par les étoiles proches. Un calcul simple donne pour ce temps de relaxation une valeur voisine de  $10^{17}$  ans alors que le temps de traversée de la galaxie par une étoile est typiquement de l'ordre du centième de l'âge de l'Univers, soit  $10^8$  ans. Les collisions n'ont donc aucune importance pour les étoiles dans une galaxie.

En mécanique classique, l'état d'un système de particules est déterminé par la position et la vitesse de chaque particule. Quand le nombre  $N$  de particules est élevé, nous pouvons adopter une description continue du système ; nous introduisons alors une fonction de distribution  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  telle que le nombre d'étoiles situées dans un volume  $d^3\mathbf{x}$  et dans un intervalle de vitesse  $d^3\mathbf{v}$  soit égal à :

$$dN = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v} \quad (2.46)$$

La définition de  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  correspond, à un facteur près, à celle d'une fonction de densité de probabilité (pdf) dans un espace des phases à 6 dimensions. Différencions maintenant cette pdf selon  $t$ ,  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{v}$  :

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} \quad (2.47)$$

En divisant (2.47) par  $dt$ , on obtient :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (2.48)$$

Cette équation a la propriété d'être nulle :

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad (2.49)$$

Ceci signifie que la densité locale de l'espace de phase  $f$  autour d'un point de phase donné est constante au cours du temps.

On obtient finalement l'équation de Boltzmann sans collision (CBE pour Collisionless Boltzmann Equation) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (2.50)$$

avec  $\Phi$  le potentiel gravitationnel.

Nous définissons maintenant la densité de particules ainsi que la vitesse moyenne d'une particule :

$$\nu = \int f d^3\mathbf{v} \quad \text{et} \quad \bar{v}_i = \frac{1}{\nu} \int f v_i d^3\mathbf{v} \quad (2.51)$$

En intégrant (2.50) sur toutes les vitesses et en utilisant la convention de sommation d'Einstein, on a :

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d^3\mathbf{v} + \int v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3\mathbf{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\mathbf{v} = 0 \quad (2.52)$$

Le premier et second terme peuvent s'écrire en utilisant (2.51) :

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d^3\mathbf{v} = \frac{\partial \nu}{\partial t} \quad (2.53)$$

$$\int v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3\mathbf{v} = \frac{\partial(\nu \bar{v}_i)}{\partial x_i} \quad (2.54)$$

Pour le troisième terme, on a :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\mathbf{v} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} [f]_0^{+\infty} \int d^2\mathbf{v} \quad (2.55)$$

Or, la pdf  $f$  s'annulant sur le support  $[0, +\infty[$ , ce troisième terme s'annule ; On peut donc déduire de la somme des deux premiers termes l'équation de continuité suivante :

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial(\nu \bar{v}_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.56)$$

### 2.3.2.2 Équation de Jeans

Multiplions désormais la CBE (2.50) par  $v_j$  et intégrons sur toutes les vitesses :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f v_j d^3\mathbf{v} + \int v_i v_j \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3\mathbf{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\mathbf{v} = 0 \quad (2.57)$$

En utilisant (2.51), les deux premiers termes (2.57) peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f v_j d^3\mathbf{v} = \frac{\partial(\nu \overline{v_j})}{\partial t} \quad (2.58)$$

$$\int v_i v_j \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3\mathbf{v} = \frac{\partial(\nu \overline{v_i v_j})}{\partial x_i} \quad (2.59)$$

Pour le troisième terme, on a :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\mathbf{v} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \left[ [v_j f]_0^{+\infty} - \int \frac{\partial v_j}{\partial v_i} f d^3\mathbf{v} \right] \quad (2.60)$$

$f$  décroissant plus vite que  $v_j$  ne croît, on a  $[v_j f]_0^{+\infty} = 0$ . Il vient :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\mathbf{v} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \delta_{ij} \int f d^3\mathbf{v} = -\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \quad (2.61)$$

ce qui donne finalement avec (2.57), (2.58) et (2.59) :

$$\frac{\partial(\nu \overline{v_j})}{\partial t} + \frac{\partial(\nu \overline{v_i v_j})}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0 \quad (2.62)$$

avec

$$\overline{v_i v_j} = \frac{1}{\nu} \int v_i v_j f d^3\mathbf{v} \quad (2.63)$$

En faisant apparaître  $\sigma_{ij}^2$  dans le deuxième terme de (2.62) grâce à :

$$\sigma_{ij}^2 = \overline{(v_i - \overline{v_i})(v_j - \overline{v_j})} = \overline{v_i v_j} - \overline{v_i} \overline{v_j} \quad (2.64)$$

et en utilisant l'équation de continuité (2.56) dans le développement du premier terme de (2.62), on obtient l'équation de Jeans :

$$\nu \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial t} + \nu \overline{v_i} \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i} = -\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial(\nu \sigma_{ij}^2)}{\partial x_i} \quad (2.65)$$

ou encore avec la convention de sommation standard :

$$\nu \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial t} + \sum_i \nu \overline{v_i} \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i} = -\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \sum_i \frac{\partial(\nu \sigma_{ij}^2)}{\partial x_i} \quad (2.66)$$

L'équation de Jeans est l'équivalent pour la dynamique galactique de l'équations de Euler pour l'hydrodynamique. Ici,  $\nu \sigma_{ij}^2$  représente un tenseur de contraintes qui décrit une pression anisotropique.

### 2.3.2.3 Cas du disque

Le disque étant un système axisymétrique, exprimons à présent l'équation de Jeans en coordonnées cylindriques [Binney and Tremaine, 2008] :

$$\frac{\partial(\overline{\nu v_R})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\nu v_R^2})}{\partial R} + \frac{\partial(\overline{\nu v_R v_z})}{\partial z} + \nu \left( \frac{\overline{v_R^2 - v_\phi^2}}{R} + \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) = 0 \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial(\overline{\nu v_\phi})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\nu v_R v_\phi})}{\partial R} + \frac{\partial(\overline{\nu v_\phi v_z})}{\partial z} + \frac{2\nu}{R} \overline{v_\phi v_R} = 0 \quad (2.68)$$

et

$$\frac{\partial(\overline{\nu v_z})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\nu v_R v_z})}{\partial R} + \frac{\partial(\overline{\nu v_z^2})}{\partial z} + \frac{\overline{\nu v_R v_z}}{R} + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (2.69)$$

L'énergie  $E$  et le moment cinétique  $L_z$  sont conservés le long des orbites. En supposant que la fonction de distribution  $f$  dépend uniquement de  $E$  et  $L_z$ , on peut démontrer [Magorrian and Binney, 1994] que :

$$\overline{v_R} = \overline{v_z} = \overline{v_R v_z} = \overline{v_z v_\phi} = \overline{v_R v_\phi} = 0 \quad (2.70)$$

et

$$\overline{v_R^2} = \overline{v_z^2} \quad (2.71)$$

En multipliant l'équation de Jeans (2.66) par  $m$  et en faisant apparaître la densité massique  $\rho = m \nu$ , on obtient d'après (2.69) :

$$\overline{v_z^2} = \frac{1}{\rho} \int_z^{+\infty} \rho(R, z') \frac{\partial \Phi}{\partial z'}(R, z') dz' \quad (2.72)$$

et d'après (2.67) :

$$\overline{v_\phi^2} = \overline{v_R^2} + \frac{R}{\rho} \frac{\partial}{\partial R} (\rho \overline{v_R^2}) + v_c^2 \quad (2.73)$$

avec  $v_c^2 = R \frac{\partial \Phi}{\partial R}$ .

### 2.3.2.4 Cas du halo de matière noire

Pour le halo de matière noire, la vitesse azimuthale est calculée selon :

$$\overline{v_\theta^2} = \overline{v_r^2} + \frac{r}{\rho} \frac{\partial (\rho \overline{v_z^2})}{\partial \rho} + v_c^2 \quad (2.74)$$

et pour le disque :

$$\overline{\sigma_\theta^2} = \frac{\overline{\sigma_r^2}}{\gamma} \quad (2.75)$$

où  $\gamma$  [Springel and White, 1999] est donné par l'approximation de l'épicycle, cf [Binney and Tremaine, 2008].

# Bibliographie

- [Binney and Tremaine, 2008] Binney, J. and Tremaine, S. (2008). *Galactic Dynamics*. Princeton University Press, 41 William Street, Princeton, New Jersey.
- [Hernquist, 1990] Hernquist, L. (1990). An analytical model for spherical galaxies and bulges. *The Astrophysical Journal*, 356 :359–364.
- [Hernquist, 1993] Hernquist, L. (1993). N-body realizations of compound galaxies. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 86 :389–400.
- [Hockney and Eastwood, 1981] Hockney, R. and Eastwood, J. (1981). *Computer Simulations Using Particles*. CRC Press, 6000 Broken Sound Parkway, NW, (suite 300) Boca Raton, FL.
- [Magorrian and Binney, 1994] Magorrian, J. and Binney, J. (1994). Predicting line-of-sight velocity distributions of elliptical galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 271 :949.
- [Mo et al., 1998] Mo, H., Mao, S., and White, S. (1998). The formation of galactic disks. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 295 :319–336.
- [Springel et al., 2005] Springel, V., Matteo, T. D., and Hernquist, L. (2005). Modelling feedback from stars and black holes in galaxy mergers. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 361 :776–794.
- [Springel and White, 1999] Springel, V. and White, S. (1999). Tidal tails in cold dark matter cosmologies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 307 :162–178.